UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA

UN APPROCCIO PEDAGOGICO ATTRAVERSO IL GIOCO ALLE MATEMATICHE ELEMENTARI TRA GLI 11 E I 15 ANNI: ANALISI DI UNA PROPOSTA DI INNOVAZIONE DIDATTICA, IL CON-CORSO «MATEMATICA PER TUTTI»

Dottorato di Ricerca in Matematica – XXXIV ciclo

Dottorando:

Luigi Regoliosi

Relatori:

Luca Biasco, Ana Millán Gasca

Coordinatore: **Alessandro Giuliani**

On charge les hommes, dès l'enfance, du soin de leur honneur, de leur bien, de leurs amis, et encore du bien et de l'honneur de leurs amis. On les accable d'affaires, de l'apprentissage des langues et d'exercices. Et on leur fait entendre qu'ils ne sauraient être heureux sans que leur santé, leur honneur, leur fortune et celles de leurs amis soient en bon état, et qu'une seule chose qui manque les rendra malheureux. Ainsi on leur donne des charges et des affaires qui les font tracasser dès la pointe du jour. Voilà, direz-vous, une étrange manière de les rendre heureux. Que pourrait-on faire de mieux pour les rendre malheureux ? Comment, ce qu'on pourrait faire ? Il ne faudrait que leur ôter tous ces soins, car alors ils se verraient, ils penseraient à ce qu'ils sont, d'où ils viennent, où ils vont. Et ainsi on ne peut trop les occuper et les détourner, et c'est pourquoi, après leur avoir tant préparé d'affaires, s'ils ont quelque temps de relâche, on leur conseille de l'employer à se divertir, à jouer et à s'occuper toujours tout entiers.

Blaise Pascal (1623-1662), *Pensées*, frammento 7 sul Divertimento

¿Dónde acaba el juego y dónde empieza la matemática seria? [...] Para muchos que la ven desde fuera, la matemática, mortalmente aburrida no tiene nada que ver con el juego. En cambio, para la mayoría de los matemáticos, la matemática nunca deja de ser totalmente un juego, aunque, además, pueda ser muchas otras cosas.

Miguel de Guzmán (1936-2004), conferenza alle giornate di insegnamento e apprendimento della matematica a Santa Cruz de Tenerife, Spagna, 1984

Indice

Introduzione I

Parte I - Materiali per un approccio pedagogico attraverso il gioco alle matematiche elementari nella scuola secondaria obbligatoria **1**

Introduzione alla parte I 2

Cronologia dell'evoluzione della matematica ricreativa in Europa 5

Capitolo 1 "Ricreazioni matematiche": il gioco nell'universo matematico **7**

1.1 Cosa è la matematica ricreativa? Un patrimonio culturale e la sua storia 9

1.1.1 Un approccio storico-culturale alla matematica ricreativa: l'evoluzione degli studi *11*

I problemi attraverso il tempo e le latitudini: il contributo di David E. Smith e Vera Sanford 15

Un approccio storico-culturale al patrimonio ricreativo nella matematica 18

1.1.2 Giochi, scherzi e trucchetti: i filoni della matematica ricreativa, dalla storia all'attualità *24*

Lucas: «Récreations mathématiques» 24

Ball: «Mathematical recreations and problems of past and present times» 26

Ahrens: «Mathematische Unterhaltungen und Spiele» 33

König: Mathematikai mulatságok 35

Kordemsky: «Matematicheskaya smekalka» 36

Schaaf: «Bibliography of Recreational Mathematics» 37

Singmaster: Sources in recreational mathematics – An annotated bibliography 38

I filoni attuali della matematica ricreativa 41

1.1.3 "Di lieve aparenza": indagare il patrimonio immateriale e materiale della matematica ricreativa *44*

1.2 Il gioco nella condizione umana e nella cultura: prospettive antropologiche 47

1.2.1 L'antropologia filosofica europea: le sue origini e le sue ricadute nel pensiero educativo *49*

1.2.2 Homo ludens: l'elemento di gioco della cultura secondo Johan Huizinga *53*

1.2.3 L'analisi del gioco di Caillois: ludus e paidia *59*

1.2.4 Un riepilogo sulle implicazioni educative degli studi sul gioco *65*

1.3 L'investigazione matematica come attività ricreativa e la matematica come grande gioco 67

1.3.1 La lettura di Huizinga da parte di Miguel de Guzmán *68*

1.3.2 Il gioco e le virtù nella matematica secondo Francis Su *72*

Capitolo 2 Matematica e gioco a scuola: verso un approccio antropologico **77**

2.1 Giocare con la matematica a scuola 79

2.1.1 La matematica ricreativa europea moderna e l'insegnamento della matematica *81*

La matematica ricreativa in Europa 81

Matematica ricreativa e istruzione a cavallo del 1900: l'influsso di Lucas 87

L'uso della matematica ricreativa nel contesto didattico: i contributi fra le due guerre mondiali 91

2.1.2 Acume, creatività, apprendimento e piacere: Boris Anastasevic Kordemsky (1907-1999) *95*

Il grande successo di «Matematicheskaya smekalka»: lo sviluppo dell'"acume matematico" 97

La pedagogia kordemskyana: "iniziativa matematica" ed educazione all'attività mentale creativa 98

2.1.3 Let's play mathematics: la visione di Zoltan Dienes (1916-2014) *107*

Il Mathematics-Learning Project: "fare matematica" è un gioco! 108

La dinamica dell'apprendimento della matematica e i giochi 110

2.1.4 Layman E. Allen (1927-2018) e il gioco matematico «Equations» in una situazione di difficoltà *117*

2.1.5 I contributi della rivista «Mathematics in School» (1986-1992) *120*

«A rationale for the use of games in the teaching of mathematics» di Paul Ernest (n. 1944) 122

Games in the teaching of mathematics: David Kirkby e Bernard J Oldfield 126

Una classificazione didattica dei giochi matematici: Bernard Oldfield 131

2.1.6 Insegnamento della matematica, approccio attraverso il gioco ed euristica: Miguel de Guzmán (1936-2004) *134*

2.2 Rivisitare i problemi ricreativi per giocarli a scuola: l'esempio del «Four Fours Problem» e del gioco «Rolling CUBES Pytagora» 141

2.2.1 Piccola storia del Problema dei quattro "quattri" *142*

2.2.2 L'esplorazione didattica del Problema dei quattro "4": il numero bersaglio *145*

2.2.3 Costruire un'uguaglianza "qualsiasi": un simulatore con il linguaggio di programmazione Python *149*

2.2.4 Rolling CUBES Pytagora *152*

Analisi degli aspetti didattici 153

Come usare il gioco in classe: si gioca! 155

2.3 La matematica può essere «ricreativa» per tutti 163

La vocazione formativa della matematica 163

Una visione profonda di ciò che significa "attraverso il gioco" 164

Mathematics for the multitudes, mathematics for all: la matematica ci riguarda 167

Idee-guida per iniziare a introdurre un approccio attraverso il gioco a scuola 171

Chi ha paura dei programmi? 177

Parte II - «Matematica per tutti»: un percorso per trasformare la matematica a scuola attraverso il gioco 179

Introduzione alla parte II 181

Considerazioni metodologiche 182

Capitolo 3 La progettazione 187

3.1 Le origini della proposta Con-corso Matematica per tutti 187

3.1.1 L'esperienza di formazione docenti *187*

3.1.2 Un'esperienza in un contesto didattico con forte svantaggio socio-economico ed elevato rischio di dispersione scolastica *194*

3.1.3 L'incontro con i giochi di CreativaMente *199*
3.2 Fra alunni e insegnanti: il design del Con-corso 201
3.2.1 La fase di avvio e di organizzazione, il lavoro di comunicazione e presentazione *201*
3.2.2 Un'opportunità di formazione per i docenti: da fruitori a co-ideatori dei contenuti *203*
3.2.3 Il lavoro in classe con gli studenti: cooperazione, inclusione e confronto *205*
3.2.4 La competizione nazionale *206*
3.3 I giochi da tavola di Matematica per tutti 209
3.3.1 Rolling CUBES Pytagora *210*
3.3.2 Polyminix *212*
Ricopri la figura 214
Risolvi il problema 215
Osservazioni 216
3.3.3 Pytagora SMARTY Puzzle *217*
Pytagora 218
Osservazioni 220
Pytagora PRO 221
3.3.4 La Boca *222*
3.3.5 SET *226*
Il training test e gli assiomi di SET 228
Come si gioca 230
Curiosità dal libro "The joy of SET" (McMahon et al 2017) 231
3.3.6 FUNB3RS *233*
Il gioco FUNB3RS 234
Il gioco delle tabelline 238
Codici di attivazione 239
3.4 Oltre i giochi: i materiali di lavoro in classe 242
3.4.1 La scelta dei materiali: quesiti, problemi e sfide *242*
3.4.2 Aritmetica (+Algebra) *244*
3.4.3 Geometria *247*
3.4.4 Rompicapo *250*
3.4.5 Problemi *253*
3.4.6 Sfide *257*
3.4.7 Calcolo mentale *259*
Capitolo 4 Analisi delle applicazioni sul campo 265
4.1 L'evoluzione di Matematica per tutti nel corso delle tre edizioni 265
4.1.1 Partecipazione e distribuzione geografica delle classi *265*

4.1.2 I giochi ... *267*

4.1.3 La competizione ... *270*

4.1.4 Il lavoro con i docenti partecipanti ... *275*

4.2 Analisi qualitativa: riflessioni ... 278

4.2.1 Analisi complessiva ... *278*

4.2.2 Difficoltà e speranze ... *285*

Conclusioni generali ... 287

Bibliografia ... 291

B1 Articoli e raccolte di matematica ricreativa ... 291

B2 Altre fonti e studi ... 296

B3 Sitografia ... 308

B4 Videografia ... 309

B5 Relazioni a convegni e seminari ... 310

Appendice A – *Four Fours problem* ... 311

A.1 La voce 7.I di David Singmaster [2004] ... 311

A.2 I programmi con Python ... 311

A.2.a – Bersaglio.py ... *311*

A.2.b – Rolling.py ... *311*

A.3 Un percorso-avventura con *Rolling CUBES Pytagora* ... 311

Appendice B – Dienes ... 312

B.1 A detailed examination of the mathematical abstraction process [Dienes 2007, pp. 18-30] ... 312

Appendice C – Mathematics for human flourishing ... 313

C.1 Desirees & virtues [Su 2020, pp. 229-231] ... 313

Appendice D – ANFoMAM: L'Officina di Geometria ... 314

D.1 Le tre sessioni intorno a *Polyminix* ... 314

D.2 La sessione intorno a *La Boca* ... 314

Appendice E – I materiali del Con-corso ... 315

E.1 La schermata di «Una sfida al giorno» ... 315

E.2 I problemi per il corso «Istituzioni di matematica» ... 315

E.2.a Il problema del PolyMaxxi ... *315*

E.2.b Il problema del lancio infinito di Rolling ... *315*

E.3 Le sfide ... 315

E.3.a Le sfide di Rolling CUBES Pytagora ... *315*

E.3.b Le sfide di Polyminix ... *315*

E.3.c Le sfide di SET ... *315*

E.4 Il calcolo mentale ... 315

E.5 Foto dei giochi dalle classi 315
E.6 Prove di selezione locale 315
E.6.a Prima Edizione M1-M2 ..... *315*
E.6.b Prima Edizione M3-S1 ..... *315*
E.6.c Seconda Edizione M1-M2 ..... *315*
E.6.d Seconda Edizione M3-S1 ..... *315*
E.6.e Terza Edizione M1-M2 ..... *315*
E.6.f Terza Edizione M3-S1 ..... *315*
Appendice F – Le regole dei giochi di CreativaMente 316
F.1.a Rolling CUBES Pytagora *316*
F.1.b Pytagora SMARTY Puzzle *316*
F.1.c Polyminix *316*
F.1.d La Boca *316*
F.1.e SET *316*
F.1.f FUNB3RS *316*
Appendice G – I dati dell'analisi qualitativa 317
G.1 Il questionario 317
G.2 Le interviste da vicino 317

INTRODUZIONE

gi̇̀òco (letter. giuòco) s. m. [lat. *iŏcus* «scherzo, burla», poi «gioco»] Qualsiasi attività liberamente scelta a cui si dedichino, singolarmente o in gruppo, bambini o adulti senza altri fini immediati che la ricreazione e lo svago, sviluppando ed esercitando nello stesso tempo capacità fisiche, manuali e intellettive [...]

dal *Vocabolario della lingua italiana* Treccani

Ever since problems began to be set, the mathematical puzzle has been in evidence. Without defining the limits that mark the recreation problem it may be said that the Egyptians and Orientals proposed various questions that had no applications to daily life, the chief purpose being to provide intellectual pleasure. The Greeks were even more given to this type of problem, and their geometry was developed partly for this very reason. In the later period of their intellectual activity they made much of indeterminate problems, and thereafter this type ranked among the favorite ones.

In the Middle Ages there developed a new form of puzzle problem, one suggested by the later Greek writers and modified by Oriental influences. This form has lasted until the present time and will probably continue to have a place in the schools.

David Eugene Smith, *History of mathematics* (1925)

Purtroppo moltissimi insegnanti continuano a ignorare il potenziale educativo della matematica divertente. Per 40 anni ho fatto del mio meglio per convincere gli educatori che la matematica ricreativa andrebbe inserita nel normale programma di studio come un modo per suscitare l'interesse degli studenti nei confronti delle meraviglie della matematica.

Martin Gardner, «Le Scienze» («Scientific American», 1998)

Matematica nella scuola dell'obbligo e il significato politico-culturale di una matematica rivolta a tutti: com'è nata la mia indagine

Questa ricerca è partita dall'esigenza di trovare idee e risorse per affrontare l'istruzione matematica elementare che, nella prospettiva del XXI secolo, è rivolta a una scuola dell'obbligo caratterizzata da una grande diversità tra gli alunni, sotto più punti di vista: il contesto familiare e sociale, le radici culturali e linguistiche, la personalità e maturazione individuale, i condizionamenti dovuti a disabilità fisiche o cognitive. Questa "scuola di massa" pone una domanda basilare sul *significato pedagogico di una matematica rivolta a tutti*, soggiacente a ogni proposta operativa di innovazione didattica per i vari livelli scolastici e per vari bersagli didattici (quali l'inclusione, il rendimento, il collegamento fra la matematica e l'esperienza dell'alunno, o i singoli contenuti matematici elementari).

Nel mondo contemporaneo l'istruzione obbligatoria ha *finalità politico-sociali ed economico-lavorative*, individuali – l'esercizio della cittadinanza, l'equità, l'opportunità di accedere a un lavoro e a una vita degna – o collettive – lo sviluppo economico e produttivo nazionale. Nel discorso politico e della burocrazia dei sistemi di istruzione europei e in altre aree del mondo, la presenza della matematica è spesso rigidamente circoscritta alle sole finalità politico-sociali ed economico-lavorative dell'istruzione, e si basa sulla utilità dei concetti e delle tecniche matematiche in ogni campo delle occupazioni quotidiane, delle attività e del lavoro (cui fa riferimento il concetto oggi molto diffuso a livello istituzionale delle "competenze"). Questa circostanza – sottolineata in Italia da Giorgio Israel (2013) – è sotto gli occhi di tutti: basti pensare al fatto che la indagine PISA sul rendimento degli allievi, che dà grande spazio alla alfabetizzazione numerica, è promossa dall'OCSE, un'organizzazione che si occupa di cooperazione e sviluppo economico; oppure al ruolo che il governo di Singapore assegna alla istruzione matematica, fiore all'occhiello del sistema di istruzione di quel paese; o al fatto che la matematica è stata qualificata in Spagna come sapere "strumentale" in ambito scolastico; infine, alla questione STEM/STEAM apertasi negli Stati Uniti all'inizio del 2000 che attualmente è un vero e proprio slogan[1].

Tuttavia, nella tradizione europea l'istruzione obbligatoria è anche espressione di un fine altro, superiore, un *fine umanistico* che riguarda l'espressione delle potenzialità di ogni singolo essere umano, della sua personalità, del suo talento, della sua capacità simbolica, della formulazione di un orizzonte vitale dotato di valori; e questo anche indipendentemente da metodi e concetti matematici che trovano applicazione in particolari professioni o mestieri[2].

Tuttavia, questa visione della matematica come *paideia*, che ha le sue radici nelle concezioni pedagogiche (e politiche) di Platone[3], è stata storicamente realizzata in una formazione secondaria rivolta a *pochi* fanciulli, maschi e di famiglie benestanti – tranne qualche eccezione –, volta a sviluppare "menti superiori" destinate alla presa di decisioni in ruoli sociali di spicco. Ancora fino ai primi del Novecento, ad alti funzionari, uomini politici, ingegneri o docenti era stato offerto in giovinezza un modello educativo basato sull'*areté* greca, incentrato sulle lingue classiche, eppure riservando un certo ruolo alla geometria di Euclide, al suo metodo dimostrativo, e ai problemi di geometria euclidea. Il ruolo pedagogico della matematica riguardava quindi l'assimilazione delle regole della deduzione logica e di una forma di razionalità, l'uso del simbolismo, l'acquisizione del "rigore" e l'allenamento dell'astrazione (Barbin, Menghini 2014).

Nella storia europea, l'ampliamento della platea sociale di coloro che hanno accesso alla cultura scientifico-matematica alle classi popolari, alle donne, e via dicendo è un obiettivo che si è fatto strada

[1] Solo qualche riferimento al riguardo: sulla concezione degli scopi dell'istruzione di PISA Sjøber 1019, Zhao 2020 sulle STEM e STEAM Gonzalez, Kuenzi 2012, Hallinen 2005 e Skorton, Bear 2018 (quest'ultima sull'ondata di ritorno negli Stati Uniti); su Singapore, una ricostruzione storica è presentata in Romeo 2021.

[2] Israel 2013; Israel, Millán Gasca 2012; Fried 2018; Su 2020. Sulla matematica nella *vocational education* si vedano ad esempio Dalby, Noyes 2015, Watters, Christensen 2014, Sträßer 2014.

[3] Si veda "Plato's development theory" in Egan 1983, pp. 56-106 Lo studio classico del sorgere di una matematica come propaideia nelle opere di Platone è *Paideia. La formazione dell'uomo greco* (1944) di Werner Jaeger, si veda Jaeger 2003. Questa è la visione contenuta nel Libro VII della Repubblica di Platone: "in servizio della guerra e della tranquillità dell'anima, sì da condurla dal generato alla verità e all'essere".

fra Ottocento e Novecento (e si trova già formulato nelle memorie sulla pubblica istruzione di Condorcet alla fine del Settecento). Tuttavia, alle classi popolari era proposta nella prassi una aritmetica pratica legata all'esercizio dei mestieri, in continuità con la consuetudine precedente (nel caso dell'Italia, si veda Roggero 1994), tutt'al più era proposto il disegno geometrico (D'Enfert 2006), con la scolarizzazione limitata alla scuola primaria.

L'imperativo «to assume in our modern democratic way that everyone should have access to the highest good»[4] ha portato all'estensione dell'obbligo scolastico alla scuola secondaria, eppure il significato pedagogico classico "liberale" paideutico attribuito alle matematiche elementari nell'educazione dei più giovani è stato soffocato – o quanto meno insidiato – dalla prevalenza delle finalità economico-lavorative ("utilitaristiche") cui si è accennato[5]. Inoltre, anche la diffusione dell'istruzione matematica di tradizione europea ad aree del mondo di tradizioni culturali molto diverse, come quelle orientali o africane, ha portato al suo inevitabile appannamento. Infine, nelle società opulente, il grande ampliamento del pubblico scolastico ha messo a dura prova tale ambizione, al punto che oggi si è persa un po' ovunque e quasi completamente la consapevolezza di questo modello, non solo nella società in generale, ma anche fra molti o quasi tutti gli insegnanti di matematica[6]. Un saggio recente, del matematico statunitense Francis Su, ha cercato di riproporre la paideia in un linguaggio moderno parlando di *human flourishing* (Su 2020), mettendo in guardia contro l'ossessione delle *abilità o competenze* spendibili e della *performance*.

Questa costatazione è anche frutto di un'esperienza decennale di insegnamento nella scuola secondaria italiana di primo e secondo grado, sia liceale, sia tecnica e professionale, e in particolare in classi con molti allievi con riconosciuto il sostegno, con insuccesso completo nell'apprendimento della matematica, e spesso con una distanza umana oltre l'indifferenza. Si ritiene che l'astio, la distanza, il rifiuto, l'ansia per la matematica più di ogni cosa siano dovuti alla mancanza di una visione pedagogica rinnovata che giustifichi e sostenga la matematica a scuola, molto più della difficoltà intrinseca della matematica, più delle difficoltà specifiche dei concetti matematici e del fatto che la matematica tratti di cose "campate per aria", ossia prive di esistenza fisica come le piante o i minerali, i paesaggi, le persone o le macchine e persino le parole (che hanno pur sempre un suono).

Di fronte a questa esperienza reale in aula, soprattutto in situazioni limite, quali classi del primo biennio delle superiori piene di ripetenti, è risultato naturale iniziare a proporre quesiti e indovinelli matematici insieme a dei giochi con contenuto matematico. La situazione di estrema difficoltà è stata decisiva per superare un tabù: quello di pensare che la matematica ricreativa non fosse "matematica seria",

---

[4] Egan, cit. p. 44.

[5] In Italia, ne è una testimonianza l'opera *L'educazione in Europa 1400-1800* pubblicata da Eugenio Garin nel 1957, come si desume dalla prefazione di Garin.

[6] Ne è una testimonianza la conferenza di Michael N. Fried al 13th International Congress on Mathematical Education già citata in nota 2 (Fried 2018).

ma semplicemente intrattenimento e in fondo una "perdita di tempo". La situazione della matematica nella scuola secondaria obbligatoria appare tuttavia talmente compromessa oggi, che non può sorprendere che in molti paesi essa sia diventata opzionale: poiché il paradigma pedagogico tradizionale appare improponibile e si rinuncia a priori a riformularlo.

Una matematica umanistica rivolta a tutti nel contesto attuale attraverso il gioco

Questa ricerca parte dalla convinzione che la presenza della matematica nell'istruzione obbligatoria rivolta a tutti nel mondo contemporaneo sia giustificata e possa essere feconda e valida se essa offre uno specifico contributo pedagogico all'*espressione dell'umanità* di ogni singolo allievo. Se, in altre parole, apprendere matematica, fare matematica, è occasione di maturazione, espande gli orizzonti dell'immaginazione, avvicina alla bellezza, suscita domande sul mondo, potenzia le risorse linguistiche e simboliche, incoraggia l'iniziativa e avvicina agli altri attraverso il dialogo e la condivisione.

Se nel passato, dopo la scuola primaria, vi era una distinzione netta fra due rami della istruzione secondaria (istruzione generalista o liberale vs istruzione tecnico-professionale, in inglese *general/vocational*), l'estensione dell'obbligo scolastico (oggi arrivato ai 16 anni, ossia 10 anni di scolarizzazione) implica l'idea di offrire *a tutti* un'opportunità formativa umanistica. Ma **come può la matematica offrire un fine umanistico a tutti?**

Non si tratta di una questione che possa essere affrontata esclusivamente in termini di *contenuti* (i programmi o, come si usa dire in ambito anglosassone, di *curriculum*) e nemmeno di *strumenti e strategie didattiche*[7], bensì richiede la formulazione di una rinnovata visione pedagogica complessiva, sulla quale possano basarsi le scelte in merito ai contenuti e alla didattica. Questa tesi esplora ciò che il patrimonio della matematica ricreativa può offrire allo sviluppo di un *approccio pedagogico umanistico rinnovato alla matematica scolastica imperniato sul gioco*, avvalendosi della ricerca antropologica sulla dimensione del gioco nella cultura umana; presenta e discute inoltre un progetto sperimentale, il *Con-corso nazionale Matematica per tutti*, riguardante la scuola secondaria nei livelli dell'obbligo in Italia (scuola secondaria di primo grado e primo anno del primo biennio delle scuole secondarie di secondo grado) ispirato da un tale approccio e volto anche a metterlo alla prova sul campo.

Il progetto sperimentale che è l'oggetto di questa tesi si è sviluppato in collegamento con un'indagine teorica rivolta a tre ambiti distinti:

7 Sia i contenuti (si pensi alla "matematica moderna" o *new math*), sia i metodi didattici sono stati al centro della ricerca sull'istruzione matematica dal 1950, e lo sono ancora oggi. L'intensa attività di ricerca sull'insegnamento, sulla comprensione e sull'apprendimento della matematica fino ai 16 anni si è concentrata, dopo la crisi della *new math* e fino a tempi recenti, sulle questioni *didattiche*, avendo come scopo principale il miglioramento del rendimento individuale. Da cosa dipende il rendimento, l'effettivo apprendimento e la raggiunta capacità di risolvere calcoli, esercizi e problemi di matematica?

1) la matematica ricreativa e la sua storia

2) lo stato dell'arte sulla questione dell'introduzione della matematica ricreativa a scuola e più in generale sull'approccio pedagogico attraverso il gioco alla matematica a scuola (primaria e secondaria)

3) l'esplorazione di alcuni contributi dell'antropologia filosofica novecentesca sul gioco

Per quanto riguarda il primo ambito - la matematica ricreativa e la sua storia - queste sono state le tappe dell'indagine:

a) la costituzione di una *bibliografia/raccolta di materiale di matematica ricreativa* (raccolte di problemi e quesiti in forma di libro, articoli singoli e serie di articoli, raccolte digitali e siti web, giochi in scatola, puzzle meccanici e così via), principalmente in italiano e in inglese, partendo da libri in commercio in Italia, raccolte celebri a livello internazionale, per arrivare alle raccolte classiche pubblicate in Francia, Gran Bretagna e Germania a cavallo del 1900: ciò ha portato, da una parte, a familiarizzare con i grandi temi ricorrenti, e, dall'altra a individuare aspetti relativi allo stile di questa produzione nell'attualità (in Italia e nel mercato e ambito culturale internazionale in lingua inglese). La copiosa letteratura di raccolte di matematica ricreativa pubblicate nel Novecento nelle lingue più svariate ha un doppio pubblico: quello degli amatori con l'hobby di giochi e indovinelli matematici (una sorta di "matematica popolare") e quello con interessi pedagogici.

b) la creazione di una rete di *contatti con alcuni dei protagonisti della matematica ricreativa* in Italia

c) una ricostruzione sull'*evoluzione della storiografia sulla matematica ricreativa*, che ha portato a mettere in evidenza come la storiografia novecentesca è arrivata a concepire la matematica ricreativa come un patrimonio culturale immateriale e materiale. La matematica ricreativa è spesso vista nell'universo matematico (fra docenti di matematica e amatori) come un coacervo di singole questioni, oggetto di una conoscenza "collezionistica" fatta di casi isolati, anche per via di questa soluzione collaudata dal punto di vista editoriale. Tale visione può essere arricchita, grazie alla ricerca storica, verso una prospettiva più integrata, che a sua volta è la chiave per lo sviluppo di un approccio didattico alla matematica ricreativa che non si riduca all'occasionale proposta di singoli quesiti in momenti puntuali.

d) una ricostruzione dell'*evoluzione della matematica ricreativa nel contesto culturale europeo*, che ha portato a mettere in evidenza la presenza costante della matematica ricreativa fin dal Medioevo, e l'accentuazione di questo legame con la matematica superiore fra la fine dell'Ottocento e i primi del Novecento – si pensi al contributo del matematico francese Édouard Lucas (1842-1891), come ha mostrato Anne-Marie Decaillot (2014) – e soprattutto nella seconda metà del Novecento: si evidenziano l'originalità e l'interesse del contributo di una donna, Vera Sanford (in collegamento con le sue ricerche storiche) e di un grande cultore della matematica ricreativa in Unione Sovietica, Boris Anastasevic Kordemskij (1907-1999) (d'ora in poi Kordemsky[8]), il cui contributo si colloca sulla scia di un interesse per questi temi in Russia nel periodo prerivoluzionario

e) un'*indagine sui grandi filoni della matematica ricreativa in una selezione di classiche raccolte europee fra la fine dell'Ottocento e i primi del Novecento* (in inglese, francese e tedesco)

Per quanto riguardo il secondo ambito - lo stato dell'arte sulla questione dell'introduzione della matematica ricreativa a scuola e più in generale sull'approccio pedagogico attraverso il gioco alla matematica a scuola (primaria e secondaria) - vi sono state due tappe principali:

a) l'analisi del contributo del matematico spagnolo Miguel de Guzmán Ozámiz[9] (a partire dal 1984), che spicca proprio perché egli, partendo dal suo convinto sostegno all'introduzione della matematica, è arrivato alla considerazione più generale di un approccio pedagogico attraverso il gioco alla matematica a scuola (primaria e secondaria). Tale possibilità, secondo lui, si collega a una visione della matematica come gioco, ed egli per primo ha argomentato la pertinenza delle tesi di *Homo ludens* (1938) dello studioso olandese Johan Huizinga (1872-1945), caposaldo della ricerca novecentesca sulla antropologia del gioco.

b) l'analisi di una serie di altri contributi, fra cui una serie di articoli di vari autori pubblicati nella rivista britannica «Mathematics in school» sull'introduzione dei giochi matematici a scuola, a partire del 1986 (fra cui ancora oggi molto citato il primo contributo, dovuto a Paul Ernest) e il gioco *Equations* inventato negli anni Sessanta; il contributo di Zoltan Dienes (seppur incentrato sulla scuola primaria, ma di respiro pedagogico generale); e infine di Kordemsky, che introduce categorie originali come l'iniziativa matematica.

c) lo sviluppo di uno studio monografico su un caso di studio: si è scelto di considerare un filone dei quesiti ricreativi (di origine europea moderna), il *Four Fours problem*, e la sua trasformazione in gioco matematico, rivisitandolo in chiave attuale attraverso la programmazione con Python e attraverso un gioco da tavolo in commercio.

Il terzo aspetto - l'esplorazione di alcuni contributi dell'antropologia filosofica novecentesca sul gioco - è stato suggerito dall'indagine e dal pensiero di Guzmán. Esso rende possibile approfondire l'aspetto umanistico dell'approccio attraverso il gioco ed esaminare il gioco in quanto scelta pedagogica,

[8] La traslitterazione dal cirillico al latino sarebbe infatti Kordemskij, ma si sceglie di riportare quella utilizzata su tutte le pubblicazioni dell'autore tradotte in italiano.
[9] Da qui in avanti semplicemente Guzmán.

in contrasto con ricerche degli anni Duemila che non problematizzano la parola «gioco» – e nemmeno l'aggettivo «ludico», usato come un puro equivalente di «giocoso» – e che non distinguono fra i giochi/*games* e il giocare (*play*), nel grande ventaglio di impulsi e manifestazioni umane che esso raccoglie. Sono stati esaminati altri contributi coevi di quello di Huizinga, fra cui spicca quello di F. J. J. Buytendijk (1887-1974), e soprattutto quello di Roger Caillois (1913-1978), nella sua opera *Les hommes et le jeux* (1958), che amplia e integra le idee di Huizinga incentrandosi non tanto sul giocare quanto sui giochi, e soprattutto proponendo una serie di categorie che permettono di esaminare l'incontro degli alunni adolescenti con la matematica attraverso il gioco. Sulla scia di Huizinga, che si concentra sull'aspetto ludico del gioco-competizione, Caillois ha aggiunto una componente cruciale, chiamata da lui *paidia*, che integra gli aspetti di *mimesis* e di brivido/vertigine che hanno rilevanza pedagogica della matematica in giovane età.

Il gioco appare in queste opere in contrapposizione con il reale, con l'utile, con il lavoro, con la preoccupazione e la noia; terreno della immaginazione, della libertà, del divertimento, quasi della vertigine. Il gioco appare legato alla *vita*, intesa come ciò che non è la "vita quotidiana", ma come ciò che dà senso all'esistenza oltre le nostre esigenze di sussistenza come esseri viventi.

Appare un'ipotesi fondata che il legame fra gioco e matematica – che riguarda non solo il contenuto matematico di alcuni giochi, ma anche le questioni matematiche divertenti e la matematica stessa come attività umana – possa arricchire la nostra visione antropologica della matematica, senza ridurla a pura manifestazione della logica o del *problem solving* o pensiero produttivo, e che ciò possa avere ricadute dal punto di vista della questione pedagogica nella matematica elementare.

Il progetto sperimentale Con-corso Matematica per tutti e i suoi partner esterni all'università

Il progetto sperimentale che è al centro di questa ricerca è stato condotto nelle scuole pubbliche statali e paritarie italiane in tre tornate negli anni 2018-2021. Si tratta di un progetto che si colloca sulla scia della moderna ricerca-azione (action research) e della ricerca basata sulla progettazione (*Designed Based Research*, DSB), quindi implica due aspetti in simbiosi:

- con un *enfoque* pragmatico, è stato progettato per promuovere il miglioramento dell'insegnamento-apprendimento della matematica in un contesto educativo reale (quindi non in contesti con condizioni sperimentali controllate): classi all'interno di scuole secondarie di primo e secondo grado (primo anno) sul territorio nazionale italiano che hanno aderito al progetto attraverso i loro insegnanti; il progetto si rivolge sia agli alunni delle classi (per i quali si propone anche un concorso nazionale) sia agli insegnanti delle classi (per i quali si configura come un'occasione di aggiornamento e innovazione didattica, con una parte pratica in aula) e si svolge nel corso di alcuni mesi dell'anno scolastico

- una visione teorica, che lo ha sostenuto e che viceversa il progetto ha contribuito a sviluppare, ossia un approccio pedagogico attraverso il gioco nella matematica della scuola secondaria dell'obbligo.

In particolare, il progetto si avvicina alla metodologia DSB in quanto è stato ideato per la sua applicazione reiterata, con una evoluzione della progettazione nelle fasi successive alla prima che implica raffinamento a partire dalla prova condotta nella pratica reale. La seconda e la terza tornata sono state svolte in condizioni reali molto diverse dalla prima originaria (2018-2019), a causa dell'emergenza sanitaria iniziata in Italia nel febbraio 2020, con la chiusura delle scuole e la didattica a distanza.

Questo progetto è stato ideato e implementato in collaborazione con il settore di ricerca e innovazione di una piccola azienda produttrice di giochi didattici, Creativamente[10] di Concorezzo (MB). Nel corso del suo svolgimento sono stati ideati e messi in produzione tre giochi: *Polyminix* (dicembre 2019), *Pytagora SMARTY Puzzle* (marzo 2020) e *FUNB3RS* (ottobre 2021). Inoltre, si è lavorato alla revisione delle regole e alla nuova edizione del gioco *La Boca* (marzo 2019) e alla selezione di nuovi giochi matematici distribuiti dall'azienda, come nel caso di *SET* (giugno 2019).

L'ideazione, progettazione e implementazione del progetto si è avvalsa anche della collaborazione con l'Associazione ToKalon[11], fondata nel 2013 e con sede a Roma, riconosciuta come ente di formazione accreditata dal Ministero dell'Istruzione, che ha un accordo di collaborazione con il Dipartimento di Scienze della Formazione dell'Università Roma Tre, della quale è stata partner all'interno del progetto Erasmus + ANFoMAM (2018-2021).

Le collaborazioni con CreativaMente e ToKalon avvicinano il progetto alla metodologia DSB, che punta a sviluppare metodi ingegneristici nella ricerca didattica ed educativa:

> [...] design experiments, modeled on the procedures of design sciences such as aeronautics or artificial intelligence [... to engineer innovative educational environments and simultaneously conduct experimental studies of these innovations. This involves orchestrating all aspects of a period of daily life in classrooms [Brown 1992, p. 141]

---

10 Nel 2003 Emanuele Pessi fonda l'azienda CreativaMente srl, di cui è ancora oggi amministratore delegato. Ritornerà spesso nella tesi il suo nome, in quanto ideatore della maggior parte dei giochi editi e distribuiti dall'azienda e, in particolare dei giochi matematici oggetto del Con-corso Matematica per tutti. Si rimanda al sito ufficiale per ulteriori dettagli: www.creativamente.eu

11 L'associazione ToKalon nasce nel 2013 da alcuni docenti appassionati al loro lavoro, alle discipline insegnate e soprattutto ai loro studenti. Il nome dell'associazione deriva da una frase di San Paolo, che leggiamo nella prima lettera ai Tessalonicesi (1Ts 5,21): πάντα δὲ δοκιμάζετε, τὸ καλὸν κατέχετε, che vuol dire "Vagliate tutto e trattenete τὸ καλὸν, To Kalon, ciò che vale, il bello". Questo è anche lo scopo dell'associazione: trattenere To kalon – il valore, il bello delle discipline scolastiche e trasmetterlo a TUTTI (studenti di ogni ordine e grado, docenti, genitori, educatori). La mission si realizza principalmente attraverso l'organizzazione di corsi di aggiornamento e innovazione didattica per docenti di scuola di ogni ordine e grado, di concorsi per studenti di scuola primaria e secondaria e di pubblicazioni di materiale didattico e divulgativo. Dall'a.s. 2019/2020 l'associazione ToKalon è ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale docente. Si rimanda al sito ufficiale per ulteriori dettagli: www.associazionetokalon.com

Struttura della tesi

Il lavoro è diviso in due parti.

Nella parte I, divisa in due capitoli, si presentano alcuni materiali volti a definire i lineamenti di un approccio ricreativo alla matematica nella scuola dell'obbligo. Nella parte II si presenta e discute il progetto/proposta sperimentale *Con-corso Matematica per tutti* ideata e realizzata in interazione con la indagine/proposta teorica che si presenta nella prima parte, nelle sue fasi di progettazione e di realizzazione; e si valutano i risultati ottenuti, usando metodi principalmente qualitativi sostenuti da alcuni elementi quantitativi.

Nel primo capitolo della Parte I si indaga il gioco nell'universo matematico. L'indagine parte dalla matematica ricreativa come fenomeno storico e attuale, che la storiografia della matematica ha permesso di iniziare a esaminare in quanto patrimonio culturale, che comprende sia i giochi matematici, sia i quesiti o indovinelli (*puzzle*). Si espone, inoltre, il pensiero di due studiosi, i matematici Miguel de Guzmán e Francis Su, che, avvalendosi dei contributi della antropologia filosofica sul gioco, hanno considerato la matematica (come sapere e come pratica) in quanto gioco, o detto in altro modo la componente di gioco della matematica.

Il secondo capitolo della Parte I indaga il gioco nella matematica a scuola, alla ricerca di un approccio antropologico ispirato anche da quanto si desume dal primo capitolo. Per farlo, propone due aspetti. In primo luogo, si considera l'evoluzione delle idee: si parte da una rassegna del collegamento fra matematica ricreativa e insegnamento della matematica nella tradizione europea, fino ai primi decenni del Novecento; e si raccolgono, in ordine cronologico e presentandoli nei loro vari contesti culturali, alcuni significativi contributi sul giocare con la matematica a scuola e sui giochi matematici e i problemi ricreativi a scuola, di autori della seconda metà del Novecento che sono stati individuati nel corso della ricerca. Il secondo aspetto è un caso di studio, che riguarda il fare matematica a scuola ispirato da un grande filone della matematica ricreativa rivisitato in chiave attuale: il *Four Fours problem*, che coinvolge i numeri naturali, l'idea di uguaglianza e scomposizione, pari e dispari e così via. Si tratta di offrire una prima descrizione di *ciò che ci si può aspettare, di ciò che avviene in classe* quando viene proposto un gioco o una attività di matematica ricreativa, l'esperienza umana vissuta, le forze e le spinte che vengono risvegliate e "messe in gioco" nei singoli allievi e nella dinamica del gruppo classe: coinvolgimento, mimesi, sentirsi catturati o trascinati, confronto, gioia, entusiasmo.

Nell'introduzione alla parte I viene presentata una Cronologia delle tappe dell'evoluzione della matematica ricreativa in Europa.

Nella Parte II, divisa anch'essa in due capitoli, si presenta il *Con-corso Matematica per tutti*, un progetto per trasformare attraverso il gioco la matematica nella scuola dell'obbligo nel livello secondario. Si tratta di un percorso rivolto a singole classi del sistema dell'istruzione pubblica italiano e ai loro insegnanti, che consiste nell'abbinamento di una competizione matematica per studenti da svolgersi a squadre e non individuale, ad una formazione per gli insegnanti, nell'arco di un intero anno scolastico. Vengono esplorati i temi, le attività, il modo di lavorare in classe che concorrono a creare una pedagogia basata sul gioco – una "matematica accessibile a tutti"–; così come anche le vie che possono permettere di far comprendere e accompagnare la sua diffusione fra gli insegnanti, in un modo che susciti e ispiri il coraggio di cambiare e l'autonomia professionale sostenuta dalla relazione fra insegnanti di classi diverse.

Il terzo capitolo presenta la fase di progettazione, rintracciando le origini e descrivendo la struttura del Con-corso e la fase di avvio; e descrivendo i materiali che sono stati portati nelle classi: i sei giochi dell'azienda Creativamente; e i materiali di lavoro suddivisi nei vari ambiti (aritmetica/algebra, geometria, rompicapo, problemi, sfide e calcolo mentale). Il quarto capitolo descrive prima la realizzazione delle tre iterazioni o tornate, includendo anche alcuni dati quantitativi; presenta poi la valutazione qualitativa condotta attraverso l'osservazione da vicino (con note di campo), un questionario di domande aperte a un gruppo di insegnanti partecipanti e una serie di interviste-conversazione in profondità a persone con grado e tipo di coinvolgimento diverso nella esperienza.

Per entrambe le parti della tesi sono state create delle appendici con materiali integrativi riguardanti, ad esempio, i contributi di alcuni matematici citati come Su e Dienes e una panoramica più approfondita dei materiali strutturati all'interno del Con-corso.

La sola categoria di "divertente" non può bastare a tratteggiare la presenza secolare dei quesiti ricreativi nella storia della matematica; viceversa, divertente non è solo la matematica ricreativa bensì la matematica di per sé, che procura un piacere del quale abbiamo innumerevoli testimonianze in matematici di ieri e di oggi. Le categorie del serio e dello scherzoso, della sfida, del rigore, del piacere, dell'utilità e dello svago si intersecano e attraversano l'intera storia della matematica: rilevarle richiede una prospettiva umana sulla matematica. Si tratta di una questione cruciale per poter rivisitare i contenuti tradizionali di aritmetica, geometria, algebra e probabilità che si affrontano a scuola fra gli 11 e i 15 anni (in Italia nelle scuole medie e nel primo biennio delle superiori) dall'ottica del gioco, partendo da giochi per introdurre i concetti, proponendo esercizi e problemi sotto forma di gioco, valutando attraverso quesiti ricreativi o addirittura riorganizzando i contenuti o introducendone di nuovi.

L'intento della ricerca è stato quello di affrontare la questione pedagogica della matematica elementare nella scuola secondaria dell'obbligo oggi, scuola inclusiva e pluriculturale, partendo da una riflessione sulla matematica ricreativa, sul suo significato nell'insieme del pensiero matematico e sul suo legame con le matematiche elementari, e legando poi questa riflessione all'antropologia del gioco: ciò permette di superare quella riduzione della matematica ricreativa a un mero complemento "leggero" delle lezioni di matematica "seria", e fa comprendere quanto invece l'introduzione dei giochi e della matematica ricreativa possa essere una chiave di trasformazione della matematica elementare, impregnandola di un approccio pedagogico formativo e umanistico per tutti. Si vuole superare una matematica procedurale "rigorosa" quanto noiosa, l'utilitarismo disseccato e privo d'anima, che risulta davvero repellente nei ragazzi fra gli 11 e i 15 anni, e sostituirla con una matematica allegra, coinvolgente, che prepara e accoglie la vita, che permette a ognuno l'espressione di sé e la scoperta avventurosa di un grande patrimonio della cultura umana.

In estrema sintesi, si è voluto ricercare elementi da offrire per fondare la perentoria affermazione di Ernest, ispirata a Dienes, «*all* mathematics teaching should begin with games» (Ernest 1986, p. 3, corsivo mio), esplorando le vie per forgiare una matematica *per tutti* fedele alla tradizione umanistica, una matematica davvero inclusiva per la scuola dell'obbligo plurale, specchio delle società del XX secolo.

PARTE I - MATERIALI PER UN APPROCCIO PEDAGOGICO ATTRAVERSO IL GIOCO ALLE MATEMATICHE ELEMENTARI NELLA SCUOLA SECONDARIA OBBLIGATORIA

Introduzione alla parte I

Lo sviluppo di un approccio pedagogico attraverso il gioco alle matematiche elementari che viene proposto in questa prima parte si basa sia su ricerche di storia della scienza (storia della matematica) sia su indagini antropologico-filosofiche, presentate separatamente nel **Capitolo 1 "Ricreazioni matematiche": il gioco nell'universo matematico**. Al termine di questa introduzione si è inserita una *cronologia* della matematica ricreativa in Europa.

Il *primo paragrafo del Capitolo 1* riguarda il patrimonio culturale della matematica ricreativa (giochi, indovinelli e problemi). Si discutono i filoni della matematica ricreativa, che comprendono tematiche antiche e moderne, a partire di una serie di raccolte e bibliografie europee pubblicate fra la fine dell'Ottocento e il Novecento. Si tratta di un imponente coacervo accumulato attraverso il tempo e le culture, suddiviso in due grandi campi: i giochi matematici da una parte e i problemi sotto forma di indovinello o rompicapo dall'altra. All'interno di questi due campi è possibile ancora distinguere per argomenti matematici (i numeri in varie prospettive, dall'"indovinare un numero" alle curiosità aritmetiche, le forme in varie prospettive, dalle scomposizioni ai "tracciati continui"). Tuttavia, sono i singoli item quelli che spiccano, con i loro nomi caratteristici molto evocatori, spesso pieni di fantasia o spirito scherzoso.

Gli studi storici hanno portato progressivamente a sviluppare un approccio storico-culturale di fronte a questo "ammasso" di quesiti e giochi, prima con i lavori di David Eugene Smith e Vera Sanford (strettamente collegati al loro interesse per la matematica elementare e il suo insegnamento), e poi con una serie di contributi più organici a partire dagli anni Settanta-Ottanta del Novecento. Descrivere quest'eredità nel suo dinamismo, parte del dinamismo culturale della matematica in senso largo, rende possibile superare lo sbriciolamento in questioni singolari (ma senza sfigurarle e rispettando il loro definirsi millenario): quindi appunto considerandola in quanto patrimonio immateriale e materiale, che – nelle sue origini e per millenni – ha fatto parte della cultura matematica popolare (da accostare ad altre forme di folklore, quali le tradizioni orali di racconti e detti e le tradizioni popolari di musica e danza). Uno sguardo complessivo storico-culturale alla matematica ricreativa è interessante di per sé stesso, ma in questa sede riveste valore per contestualizzare la copiosa pubblicistica attuale – disponibile in ogni lingua anche in forma digitale e in rete – nella quale gli insegnanti spesso si muovono senza punti di riferimento, con esplorazioni e sperimentazioni dei singoli.

La matematica ricreativa, sotto questo sguardo storico-culturale che va oltre l'apparenza frantumata in mille rivoli degli indovinelli e giochi, pone la questione antropologica della dimensione del serio e del ricreativo/giocoso che la definisce e attraversa, al di là dei confini culturali e dei contenuti matematici. Essa si collega a sua volta alla dimensione del gioco della matematica dotta a partire dalle radici greche: non sono gli stessi tre grandi problemi della matematica greca (la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo, la quadratura del cerchio) intrisi di uno spirito leggero, oltre il loro esplorare il paradossale? Non è lo sguardo curioso e libero del matematico intriso anche della ricerca del piacere e del divertimento? Nel gioco, quando si parla di matematica, si incontrano sia il bambino sia lo studioso: lo aveva sottolineato a metà degli anni Ottanta del Novecento il matematico spagnolo Miguel de Guzmán (1936-2004), che si riferiva alla messe di studi novecenteschi sull'antropologia del gioco.

Nel *secondo paragrafo del Capitolo 1* dunque raccogliamo alcuni importanti risultati che sono il frutto delle ricerche di antropologia filosofica sul gioco nella vita e nella cultura umana, nelle due fasi prima e dopo la Seconda guerra mondiale, attraverso due rappresentanti dell'una e dell'altra fase: rispettivamente, lo storico Johan Huizinga (lo studioso letto da Guzmán) e il sociologo Roger Caillois, che allarga la riflessione dello studioso olandese. La loro riflessione è incentrata sul gioco come manifestazione umana, e in particolare come sguardo e rielaborazione del mondo da parte degli esseri umani e come forma di comprensione umana, quindi cruciale nella conoscenza e nella cultura. Tale riflessione è posta nel Capitolo 1 ma è decisiva nell'articolare l'analisi della matematica ricreativa con l'approccio antropologico che nel Capitolo 2 si cercherà di delineare riguardo a matematica e gioco a scuola. Infatti, essa ha ricadute e offre quindi prospettive in varie direzioni: il rapporto fra il serio e il ricreativo nell'indagine matematica; le caratteristiche che configurano il carattere giocoso di attività matematiche elementari; il valore conoscitivo dell'entrare in contatto con i giochi, dell'"essere giocato dai giochi" (Gadamer 1960); le caratteristiche del coinvolgimento (entusiasmo, curiosità) che il movimento del giocare implica nel giocatore/allievo o studioso che sia.

Nel *terzo paragrafo del Capitolo 1* si volge lo sguardo alle considerazioni di matematici che in tempi recenti hanno riflettuto sulla matematica come gioco, fra cui Guzmán e, recentemente, lo studioso statunitense Francis Su nel suo saggio *Mathematics for human flourishing* (2020). Queste riflessioni hanno origine, nei vari autori, da problemi diversi che essi si pongono: alcune derivano dal tentativo di definire la matematica ricreativa; altre dalla possibilità e opportunità di usare giochi e divertimenti matematici per migliorare l'insegnamento della matematica; altre ancora, con un orizzonte più ampio, dallo sforzo di restituire la matematica alla cultura. Tali riflessioni non sono quindi limitate al gioco nella matematica scolastica, ma hanno implicazioni profonde e quasi immediate per l'insegnamento della matematica nella scuola dell'obbligo e costituiscono un contributo prezioso per la discussione del Capitolo 2.

Il **Capitolo 2 Matematica e gioco a scuola: verso un approccio antropologico** si avvale di un cospicuo numero di riflessioni sul gioco nell'istruzione matematica e, più in generale, sul gioco come costitutivo della forza educativa delle matematiche elementari. Negli scritti di Leibniz – nel Seicento le ricreazioni matematiche circolano vivacemente in Europa, a giudicare dalla produzione delle raccolte a stampa – si trova già un accenno all'inventiva e la creatività. Tuttavia, nel corso del Novecento, e soprattutto nella seconda metà del secolo, questo argomento è al centro di numerose riflessioni, fra le quali spicca il contributo di Boris A. Kordemsky (1907-1999). Sono riflessioni che si collegano, da una parte, al pensiero di György (da qui in avanti George come viene chiamato in occidente) Pólya (1887-1985) sui problemi e l'euristica nella matematica e nel suo insegnamento; dall'altra, alla questione più in generale della creatività come bersaglio dell'educazione. Nel *primo paragrafo del Capitolo 2* si esamina complessivamente questa letteratura – poco nota nella didattica della matematica attuale, o quanto meno nota in modo molto frammentario – ponendola anche nel suo contesto storico, cercando di individuare le sue conclusioni e la sua portata culturale.

Per indagare concretamente l'approccio alle matematiche elementari attraverso il gioco, si è scelto, *nel secondo paragrafo del Capitolo 2*, di esaminare un singolo esempio di rompicapo aritmetici. Si tratta del *Four Fours problem*, che pur appartenendo a un'area antichissima come l'aritmetica ricreativa, sembra essere nato in Europa (in Gran Bretagna) e risalire a metà Settecento, in una forma particolare, e alla fine dell'Ottocento in forma più generale. Grazie alla consapevolezza storica e antropologico-filosofica raggiunta, è possibile fare una disamina della costruzione di un "microuniverso di indagine" rivolto ad allievi di 11-15 anni che implica una varietà di nodi concettuali delle matematiche elementari quali la scomposizione o l'uguaglianza. Non si tratta di "legittimare" l'introduzione di questo o altri indovinelli e giochi matematici in classe, quanto di sviluppare una riflessione, a partire da un caso specifico, sulla via del gioco come accesso a idee e procedure matematiche; e, inoltre, sulla possibilità di rendere accessibili agli alunni le motivazioni interne della ricerca matematica, l'esperienza creativa in matematica, grazie a una visione di essa più flessibile e culturalmente fondata. Si esaminano i contenuti, le varie forme e generalizzazioni, le vie di risoluzione (anche in termini algoritmici, usando il linguaggio di programmazione Python) del *Four Fours problem*, e le sue implicazioni dotte dal punto di vista matematico. Si tratta di un indovinello matematico, che può essere esaminato con carta e penna o con l'ausilio del calcolatore, ma che può anche usare lo scenario o setting dei giochi veri e propri, che facilitano e generano un microuniverso materiale, il "tavolo da gioco", in corrispondenza con un "insieme organizzato di quesiti": dadi, carte, regole del gioco e dinamica di vincita e competizione o cooperazione. Combinando vari elementi, si può costruire un percorso o filone di attività, le quali, seppure non inquadrabili in nessuno degli argomenti che si affrontano tradizionalmente – a livello internazionale – nella scuola secondaria obbligatoria, sono trasversali a molti di essi. Si tratta di passare quindi dall'"intrattenimento matematico" a una matematica scolastica che *in-trattiene*, che coinvolge e quindi crea apprendimento significativo in quanto contribuisce alla costruzione e al rafforzamento di alcuni nodi della rete concettuale delle matematiche elementari (Lafforgue 2010).

Nel *terzo e ultimo paragrafo del Capitolo 2* che conclude la prima parte della tesi, si delinea un approccio pedagogico attraverso il gioco alla matematica a scuola con studenti e studentesse di 11-15 anni (ossia durante la scuola secondaria obbligatoria, articolata in modi diversi a seconda dei Paesi). Esso si pone sulla scia delle riflessioni presentate nel primo paragrafo, avvalendosi della disamina relativa alla matematica ricreativa come patrimonio culturale e degli elementi presentati per una visione del gioco come manifestazione umana che sia di ampio respiro, che sono stati al centro del Capitolo 1, così come dell'indagine condotta per il caso di studio dell'indovinello *Four Fours problem*. Si cerca quindi di proporre un approccio saldamente radicato dal punto di vista teorico eppure anche operativo, ossia in grado di orientare gli insegnanti nella loro azione didattica. Non si tratta di ricette o metodi, bensì di quadri concettuali complessivi che sostengano l'autonomia dell'insegnante e idee-guida didattiche per ideare, realizzare e valutare attività e lezioni di matematica coinvolgenti, efficaci, educative.

Cronologia dell'evoluzione della matematica ricreativa in Europa

V sec.	Metrodoro, fonte di alcuni quesiti nell'*Antologia* di Costantino Cefala
IX sec.	*Propositiones ad acuendos giovanes* (in latino) di Alcuino di York
X sec.	*Antologia* di Costantino Cefala (unico manoscritto, in greco, Biblioteca Palatina): 44 quesiti aritmetici (Libro XIV)
1202	*Liber abaci* (in latino) di Leonardo Pisano, detto Fibonacci: i capitoli 12 e 13 sono dedicate alle *questiones erraticae*
1250ca	*Annales stadenses* (in latino) di Alberto di Stade: quesiti ricreativi
1290ca	*Livero de l'abbecho secondo l'oppenione di Maiestro Leonardo* (forse il più antico trattato d'abaco)
1450ca	*Ludi mathematici* di Leon Battista Alberti (1404-1472)
1484	*Triparty en la science des nombres* di Nicolas Chuquet (1445-1488)
1508?	*De viribus quantitatis* di Luca Pacioli (1445 circa-1517)
1513	*Libro dicto giochi mathematici* di Piero da Filicaia
1612	*Problèmes plaisants et delectables, qui se font par les nombres* di Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638)
1624	*Récreation mathématique, composée de plusieurs problèmes plaisants et facetieux* probabilmente di Jean Leurechon (1591-1670)
1648	*Mathematicall magik* di John Wilkins (1614-1672)
1694	*Récreations mathématiques et physiques* (1694) di Jacques Ozanam (1640-1718)
1743*	*The Schoolmaster's Assistant, Being a Compendium of Arithmetic both Practical and Theoretical* di Thomas Dilworth (-1780): primo esempio del *Four Fours problem*, in "Questions: A short Collection of pleasant and diverting Questions"
1803	Prima traduzione in inglese da parte di Charles Hutton dell'edizione rivista da Montucla di *Récreations mathématiques et physiques* di Ozanam (ne uscirà un'altra edizione nel 1814 e poi nel 1844 rivista da Riddle)
1857	Edizione del *Liber abaci* curata da Baldassarre Boncompagni Ludovisi (1821-1894)
1874	Edizione di A. Labosne dei *Problèmes* di Bachet
1880*	Lewis Carroll (1832-1898) pubblica la prima di dieci storie umoristiche (*knots*) nel «The Monthly Packet of Evening Readings»; formeranno il libro *A tangled tale* (1885)
	Edizione del *Triparty en la science des nombres* di Aristide Marre (1823-1918)
1881	primo esempio del *Four Fours problem* nella rivista illustrata «Knowledge» (sotto pseudonimo)
1882	Primo di 4 voll. *Récréations mathématiques* (1882-1894) di Édouard Lucas (1842-1891) presso Gauthier-Villars (Parigi)
1892	*Mathematical recreations and problems of past and present times* di W.W. Rouse Ball (1850-1925) presso McMillan (Londra)
1897	*Mathematische Mussestunden* di Hermann Schubert (1848-1911), seconda edizione in 3 volumi dal 1900
1899	*Récreations arithmétiques* di Émile Fourrey (1869-1959)
1901	*Mathematische Unterhaltungen und Spiele* di Wilhelm Ahrens (1872-1927) presso Teubner (Lipsia)
1902	voce "Mathematische Spiele" di Ahrens nell'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* (in appendice al primo volume in due parti)
	Mathematikai mulatságok, Vol. 1 di Dénes König (1884-1944)

1903	*Giochi di matematica, intrattenimento e attività* (in russo) di Emelyan Ignatievich Ignatiev (1869-1923)
1904	Primo volume di *Nel regno degli ingegnosi*, *o aritmetica per tutti* (in russo) di Ignatiev
1907	*Curiosités géométriques* di Émile Fourrey
1913	*Matematica dilettevole e curiosa* di Italo Ghersi (1861-1925)
1914	*Cyclopedia of puzzles* di Sam Loyd (1841-1911), presso Franklin Bigelow Co.
1917	*Amusements in mathematics* di Henry Ernst Dudeney (1857-1930) presso Nelson (Londra, Edinburgo, New York)
1921	*New Mathematical Pastimes* di Percy Alexander MacMahon (1854-1929)
1922	*Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen* di Walther Lietzmann (1880-1959) presso Hirt (Breslau)
1924	*Giochi di aritmetica e problemi interessanti* di Giuseppe Peano (1858-1932) presso Paravia (Torino)
1925	trattazione della matematica ricreativa nel vol. 2 (cap. VII, "Elementary Problems") di *History of mathematics* di David Eugene Smith (1860-1944) per Ginn&co. (Boston-New York)
	Geometria ricreativa (in russo) di Yakov Isidorovic Perelman (1882-1942)
1927	tesi di dottorato *The history and significance of certain standard problems in algebra* (1927) di Vera Sanford (1891-1971)
1930	*La mathematique des jeux ou récreations mathematiques* di Maurice Kraitchik (1882-1957); l'anno dopo lancia «Le Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives», uscita fino al 1939.
1941	corso di Kraitchik, New School of Social Sciences (New York); l'anno dopo *Mathematical recreations* (W.W. Norton)
1943	*Wonderlijke problemen. Leerzaam Tijdverdrijf Door Puzzle en Spel* (Problemi meravigliosi. Passatempo istruttivo attraverso puzzle e gioco, in olandese) di Frederik Schuh (1875-1966)
1954	*Matematicheskaya smekalka* (Ingegno matematico) di Boris Anastasevic Kordemsky (1907-1999)
1955	"number game", integrazione alla voce sulla *Encyclopedia Britannica*, redatta da Wiliam L. Schaaf
	Jean Parker pubblica *The use of puzzles in teaching mathematics* sulla rivista «The Mathematics Teacher»
1957	Martin Gardner (1914-2010) pubblica l'articolo sull'esaflexagono (che aveva visto in un incontro di prestigiazione) sulla nuova rubrica "Mathematical games" su «Scientific American»
1958	*Saggi sui problemi matematici per l'ingegno* di Kordemsky
1959	*Mathematical puzzles of Sam Loyd*, a cura di Gardner presso Dover
1961	Primo numero di «Recreational Mathematics Magazine» (1961-64) diretto da Joseph S. Madachi (1927-2014), dal 1968 «Journal of Recreational Mathematics»
1963	*An experimental study of mathematics-learning* di Zoltan P. Dienes (1916-2014)
1967	*Mathematical quickies* di Charles W. Trigg (1898-1989) presso McGraw-Hill
1978	edizione critica di *Propostiones ad acuendos giovanes* a cura di Menso Folkerts presso il periodico «Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse Denkschriften» dell'Accademia delle scienze autriaca
	prima edizione in lingua inglese di *The Tokyo Puzzles* di Kobon Fujimura (1903-1983), a cura di Martin Gardner
1979	trattamento della matematica ricreativa all'interno della nuova edizione di *Geschichte der Elementar Mathematik* di J. Tropfke (a cura di Kurt Vögel, Karin Reich e Helmut Gericke)
1980	*Practical mathematics in the Italian Renaissance. A catalog of Italian abbacus manuscripts and printed books to 1600* di Warren van Egmond, pubblicato dall'Istituto e Museo di storia della scienza di Firenze
1981	*Winning ways for your mathematical* plays di Elwyn R. Berlekamp (1940-2019), John H. Conway (1937-2020) e Richard K. Guy (1916-2020)
1984	*Juegos matemáticos en la enseñanza* di Miguel de Guzmán (1936-2004)
1986	David Singmaster pubblica la prima versione di *Sources in recreational mathematics - An annotated bibliography*
	Games. A Rationale for Their Use in the Teaching of Mathematics in School, di Paul Ernest in «Mathematics in School»
2005	Capitolo su *Mathematical recreations and problems* di Ball di Singmaster in *Landmark writings in Western mathematics 1640-1940*
2014	Primo numero del «Recreational Mathematics Magazine»

*data relativa a un singolo filone di quesiti ricreativi della tradizione europea moderna, il *Four Fours problem* (si veda §2.2)

Capitolo 1 “Ricreazioni matematiche”: il gioco nell’universo matematico

La presenza della matematica ricreativa nell’universo matematico è un enigma storico e un fatto culturale e antropologico che interpella chiunque si interessi di matematica e del suo insegnamento. Si tratta di problemi curiosi e divertenti (indovinelli e rompicapo) e di giochi matematici (dall’antichissimo *tangram* ai recenti *SET* o *Equations*). È un campo che si potrebbe caratterizzare – nella storia europea e fino all’attualità – quasi come “trasgressivo” e “off limits” per il matematico o il docente di matematica, in quanto manifestazione anche popolare, al confine con altri campi della meraviglia (i “mirabilia”), dello spettacolo, del divertimento (presenti per altro al confine di ogni disciplina scientifica). Le ricerche storico-culturali su tale patrimonio (materiale e immateriale) ci offrono elementi irrinunciabili sul significato della matematica nella cultura umana, nella nostra umanità.

Oltre la considerazione complessiva di tale patrimonio – a cavallo fra la matematica dotta e la cultura matematica popolare – si apre la questione più ampia del rapporto fra matematica (come disciplina e come prassi, o se si vuole, come “esperienza”) e gioco o, in modo più radicale, della matematica come gioco.

Questo capitolo si divide in tre paragrafi. Il primo paragrafo è dedicato alla matematica ricreativa e i giochi matematici come patrimonio culturale, alla luce della letteratura secondaria. Lo scopo è doppio: da una parte, si discute dell’evoluzione storica di tale patrimonio, soprattutto nello spazio culturale europeo e principalmente in età contemporanea; dall’altra, si descrivono i grandi filoni della matematica ricreativa e i principali giochi matematici che compongono tale patrimonio. La trattazione si avvale dalla storiografia disponibile oggi per interpretare e conoscere con profondità storico-culturale tale patrimonio: come si vedrà, le prime ricerche sulla storia dell’“intrattenimento matematico” risalgono alla fine dell’Ottocento, e negli ultimi anni si riscontra una crescente attenzione al tema, eppure le conoscenze sono ancora frammentarie perché gli studi sono ancora pochi (si cercherà di spiegarne anche le motivazioni), e tanto meno è disponibile una monografia sull’evoluzione storica complessiva, in particolare per quella europea. Delle raccolte di matematica ricreativa più dotte, pubblicate a partire della fine dell’Ottocento, ci si è avvalsi per raccogliere in modo sintetico il contenuto di questo patrimonio culturale: i principali giochi matematici da una parte, e i problemi/indovinelli/rompicapo classici e più recenti. È un vero e proprio “oceano” – in cui si distinguono alcune grandi aree, scenari, intenzioni – nel quale indagare in cosa consista la dimensione del divertimento e del gioco, in chiave antropologica, storico-culturale e didattica.

Nel secondo paragrafo si discutono alcuni aspetti dell’antropologia del gioco. La domanda sul gioco nell’universo matematico si colloca naturalmente nell’alveo della antropologia filosofica, e in particolare delle ricerche novecentesche su gioco e cultura: questa connessione è stata segnalata dal matematico Miguel de Guzmán (1936-2004), nelle sue riflessioni, condotte negli anni Ottanta e Novanta, volte a proporre la matematica ricreativa nell'insegnamento della matematica. Le indagini di una pluralità di autori, fra cui Johan Huizinga e Roger Caillois, hanno aperto prospettive illuminanti sulla dimensione del libero e gratuito, che è altro rispetto al serio e alla vita attiva, eppure è in intimo rapporto con essa: tali prospettive sono pertinenti alla natura dell'indagine matematica – dagli oggetti primordiali di essa (il numero e la forma) fino alle sofisticate teorie contemporanee – nell'esperienza dei suoi cultori.

Entrambi questi paragrafi non hanno pretese di esaurire l'argomento trattato. Essi però permettono di inquadrare culturalmente la discussione su matematica e gioco, che è l'argomento del terzo paragrafo. Numerose ricerche storiche ed epistemologiche novecentesche hanno indagato come la conoscenza matematica si sia sviluppata a cavallo fra l'immersione nel reale e mondi teorico-speculativi; in questa sede ci rivolgiamo a un'altra, meno frequentata, dicotomia: la matematica si è sviluppata indubbiamente anche sulla scia di interessi mondani di natura pratica, eppure principalmente per diletto e come un gioco, e alcune branche della matematica moderna a partire dal gioco d'azzardo oppure da indovinelli divenuti celebri.

«Per la maggioranza dei matematici, la matematica non manca mai di essere totalmente un gioco, anche se, in più, può essere anche molte altre cose» (Guzmán 2004/1984, p.5).

Nel 2019 il matematico statunitense Francis Su ha incluso numerosi problemi di matematica ricreativa nel suo saggio *Mathematics for human flourishing*, di cui un intero capitolo ha come titolo "Play".

Si è tentato a più riprese – da parte di David Singmaster, autore della più ampia raccolta di giochi matematici e di problemi ricreativi oggi disponibile, e in articoli che si occupano della loro rilevanza nella didattica della matematica – di definire cosa è la matematica ricreativa, nell'ottica di separarla e distinguerla dalla matematica "seria". Al contrario, Martin Gardner (1914-2010) – un grande protagonista, se non il più celebre in assoluto, in questo ambito nella seconda metà del Novecento – ha esplorato piuttosto contagi e ibridazioni, nel tentativo di intrattenere e di fare amare la matematica, anche in collegamento all'attività di matematici britannici sulla frontiera della ricerca come John H. Conway (1937-2020) o Harold (Donald) Coxeter (1907-2003). In questo capitolo si cerca, sulla sua scia, di esplorare le linee di confine mobili e i contatti, i legami fra matematica e gioco, incanto, magia, che sono parte della tensione feconda di razionalità e pensiero strategico con fantasia e piacere.

1.1 Cosa è la matematica ricreativa? Un patrimonio culturale e la sua storia

Le conoscenze oggi disponibili sulle origini e sull'evoluzione storica della matematica ricreativa permettono di comprenderla come vero e proprio *patrimonio culturale* attraverso il tempo e i luoghi del mondo. Come ha scritto Albrecht Heeffer, autore di lavori molto perspicaci sulla tradizione europea in età moderna:

> Anyone engaging in a study of recreational mathematics soon discovers that many of the problems that are still popular today go back a long time in history. [...] Equally surprising is the fact that the same or similar problems appear in very different cultures and geographical regions. [...] problems we now consider as recreational mathematics are omnipresent in mathematical practice and [...] these travel easily between different cultures. [...] Many recreational problems have been disseminated as folk stories through merchant connections and trade routes. Embedding mathematics in cultural practices which can be adapted to suit the cultural context allows problems to cross cultural boundaries. That is the reason why the same problems turn up in such diverse cultures. [Heeffer 2014, p. 401]

"Svelare" questo patrimonio culturale ha richiesto competenza tecnica e una apertura delle domande storiografiche: questi studi sono un riflesso dello sviluppo della storiografia della matematica dalla fine dell'Ottocento a oggi. Si tratta di una tradizione orale, che ha lasciato tracce materiali (artefatti componenti di giochi matematici o di rompicapo in 3D) e spezzoni in fonti manoscritte (dagli indovinelli su tavolette o papiri antichi ai quaderni o zibaldoni medievali europei), prima di arrivare alle prime raccolte vere e proprie di matematica ricreativa, manoscritte o a stampa: quelle europee sono le antesignane dell'imponente numero di raccolte di matematica ricreativa che sono pubblicate al giorno d'oggi in molte lingue, oltre che delle pubblicazioni e raccolte digitali di questo secolo. Lo studio filologicamente accurato delle fonti restituisce un panorama complessivo di grande ricchezza e pregno di implicazioni sul ruolo della matematica nella cultura umana anche molto oltre la cerchia dei "dotti".

A un primo sguardo, questo patrimonio si presenta come un immenso coacervo di singole questioni (giochi e quesiti ricreativi) sempre in crescita, e oggi più vivace che mai: soluzioni e nuove domande, che si inanellano in modo tale che le une abbiano un impatto sulle altre. Un coacervo quindi quasi incomprensibile con uno sguardo complessivo, anche perché si esprime in numerose lingue attuali e lingue morte, e si presenta in svariati contesti culturali e in collegamento con altre questioni che hanno a che vedere con la meraviglia e il divertimento. Di conseguenza, vi sono due spinte di indagine, oggi entrambe in pieno slancio: da una parte, lo sforzo storiografico che stabilisce rigorosamente le fonti e interroga questo patrimonio attraverso domande di ricerca che non riguardano soltanto il contenuto matematico e nemmeno le sole soluzioni; dall'altra, una spinta essenzialmente "catalogatrice", imperniata sulla raccolta e classificazione (anche raccogliendo le relative notizie storiche, derivate anche dai risultati storiografici) volta sia a fare ordine nel materiale, anche per poterlo presentare ai lettori e cultori, sia a raggrupparlo secondo i vari argomenti matematici, a cominciare con la distinzione fra quesiti e giochi di tipo aritmetico o di tipo geometrico.

Vi sono e vi sono stati influssi reciproci fra entrambe tali spinte. La spinta catalogatrice o di raccolta è la più antica delle due, in quanto si può far risalire alle prime raccolte europee manoscritte dell'inizio della età moderna, e soprattutto alle raccolte a stampa che si diffondono a partire del Seicento. Ci si soffermerà (nel §1.1.1) sulle origini e sullo sviluppo della spinta storiografica dalla fine dell'Ottocento a oggi, e sull'emergere di un approccio complessivo di tipo storico-culturale. Prima dei primi studi storici rigorosi, risalenti alla fine dell'Ottocento, vi era scarsa consapevolezza in Europa della provenienza anche antichissima delle varie questioni, e si copiava e riprendeva senza particolare attenzione a mettere in chiaro chi aveva ideato un gioco o indovinello o aveva trovato una soluzione.

La spinta catalogatrice è quella che interagisce direttamente con il campo attuale dei giochi matematici e della matematica ricreativa, ossia con gli studi che propongono nuovi quesiti e cercano nuove soluzioni di questioni vecchie o recenti, oppure immettono nel mercato nuovi giochi matematici ed esplorano i quesiti e il pensiero strategico che vi si collega. Nel contempo, la spinta storiografica non si limita a far chiarezza filologica sulle fonti: il suo contributo principale è che, nel corso del Novecento, essa ha permesso di superare la visione puramente "accumulativa" di un coacervo di giochi matematici e quesiti di matematica ricreativa, mostrando che si è di fronte a un vero e proprio patrimonio culturale. In questo paragrafo si cercherà di portare elementi rilevanti desunti sia dalle opere di raccolta e catalogazione, sia dalle ricerche storiche.

Infatti, da un punto di vista didattico, i cataloghi e le raccolte offrono all'istruzione matematica una quasi illimitata fonte di spunti e attività da proporre in classe. Qualunque insegnante desideri esplorare in classe un approccio ricreativo alle matematiche elementari ha a disposizione svariati giochi matematici: gioco da tavolo (in scatola), dispositivi come i rompicapi geometrici, giochi che non richiedono altro che carta e penna); ha anche a disposizione numerose raccolte di quesiti di matematica ricreativa pubblicate in molte lingue, incluse quelle che riguardano il calcolo mentale. La varietà dei libri o dei siti Internet accessibili e il grande numero dei quesiti sui più diversi temi aritmetici, geometrici o altro possono certamente suggerire episodiche proposte di esercizi o problemi che si aggiungono, allietando gli alunni, a quelli consueti privi – sembrerebbe quasi volutamente – di una sfumatura giocosa o dilettevole. Si mostreranno nel §1.1.2 alcuni esempi di classificazioni e organizzazione del corpus della matematica ricreativa, che guidano nella conoscenza di tale corpus e orientano nella "navigazione" anche a scopo didattico (ossia, per compire scelte didattiche in relazione agli argomenti matematici a trattare o ad altri obiettivi educativi, quali il lavoro in gruppo, la conversazione matematica, il coinvolgimento o altro). Inoltre, si completerà il panorama indicando i filoni che la ricerca storica cerca di individuare, che strutturano internamente il patrimonio complessivo: filoni derivati non solo dal contenuto matematico, ma anche dai contesti culturali o dal tipo di componente dilettevole (inganno, paradosso, enigma e così via). Si tratta di un lavoro in corso che attende ulteriori ricerche, cui hanno dato contributi pionieristici dapprima lo storico americano David Eugene Smith (1923) e, a distanza di più di cinquant'anni, lo storico tedesco Kurt Vögel e suoi collaboratori (1980).

1.1.1 Un approccio storico-culturale alla matematica ricreativa: l'evoluzione degli studi[12]

La crescente attenzione della storiografia alla "matematica non di élite" (Stedall 2012) nella storia, ha portato a un crescente – seppure ancora forse non sufficiente – attenzione ai giochi matematici e ai problemi ricreativi. Ad esempio, ben più sviluppati sono gli studi su temi collegati strettamente nella storia europea all'evoluzione della matematica ricreativa: l'insegnamento della matematica, da una parte, e la "scienza spettacolo" legata alla magia e alla prestigiazione e la "scienza popolare".

Nella presentazione di un numero monografico della rivista «Historia mathematica» del 2014, dal titolo *Explorations in the history of mathematical recreations*, Karine Chemla ha sottolineato il persistere di questo volontario trascurare la questione da parte degli storici della matematica, almeno nelle opere generali, da *Histoire des mathématiques* di Étienne Montucla fino a *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972) di Morris Kline (1908-1992). In realtà, questa "esclusione" del ricreativo e del gioco dalla visione complessiva dell'universo matematico nella sua ricostruzione storica si lega strettamente allo statuto di questi temi fra i matematici dotti europei attraverso la storia. La matematica ricreativa si era presentata come coacervo di questioni disparate e singolari, contigue alla divinazione e a ogni genere di trucco e oggetto o dispositivo capace di ingannare la natura e di meravigliare il pubblico: un ammasso raccolto volta per volta in opere a stampa di serie B rispetto ai trattati dotti, senza autorevolezza né autore. Montucla, riferendosi a una celebre raccolta pubblicata in Francia nel 1624, ristampata, tradotta e anche saccheggiata in altre opere analoghe, parla di "ramas", un *ammasso raccogliticcio, come* ricorda lo storico francese Gilles Chabaud[13].

Tuttavia, a partire dalla fine dell'Ottocento vi è stato un rilevante numero di ricerche storiche sui giochi matematici e sulla matematica ricreativa. Nell'"età dell'oro della storiografia della matematica"[14] che si apre simbolicamente con la pubblicazione del «Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze

---

12 Questo paragrafo riprende i contenuti di uno scritto inedito di Ana Millán Gasca (Millán Gasca, 2021) e di un seminario del dicembre 2021 (ne sono stati ripresi alcuni elementi nella relazione Biasco, Millán Gasca, Regoliosi 2021). In particolare, l'approccio storiografico pionieristico di David Eugene Smith e Vera Sanford, e i collegamenti e ricadute nella didattica della matematica (se ne parlerà nel §2.1.1) con particolare riguardo per il contributo di Sanford, è oggetto di un lavoro in preparazione di Millán Gasca (il contributo della studiosa statunitense è stato posto all'attenzione degli storici da Heeffer 2014).
13 Gioco di parole fra amas (ammasso) e ramassi (guazzabuglio).
14 Nel capitolo finale della *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* (1994) curata da Ivor Grattan Guinness, scritto da lui e intitolato "Talepiece: The history of mathematics and its own history" (Grattan-Guinness 1994). Sulla storia della storiografia della matematica, si veda Dauben, Scriba (2002) e Remmert et al (a cura di) 2016. Stedall (2012), che contiene un breve capitolo finale sulla storiografia, è un tentativo di introdurre questo approccio non incentrato sulle élite in una panorama storico generale; un esempio di un quesito di matematica ricreativa emerge quasi inevitabilmente a un certo punto (all'interno di un quaderno di matematica di una fanciulla del Seicento!, p. 61), anche se non è trattata di per sé esplicitamente.

Matematiche e Fisiche» (1868-1887) di Baldassarre Boncompagni Ludovisi (1821-1894), gli studi sulla tradizione manoscritta di trattati matematici europei medievali e rinascimentali fanno emergere la tradizione dei problemi ricreativi: essi si trovano nel *Liber abaci* (1202) di Leonardo Pisano scoperto e oggetto di una edizione a stampa da parte di Boncompagni nel 1857, nel *Triparty en la science des nombres* di Nicolas Chuquet scoperto da Aristide Marre (1823-1918) nel 1880, e sono l'argomento del *De viribus quantitatis* di Luca Pacioli analizzato da Amedeo Agostini (1892-1958) nel 1924[15].

Nei lavori storici di questo periodo a cavallo del 1900 le questioni ricreative di aritmetica, che si trovano accanto ai problemi di aritmetica commerciale, appaiono un po' sbiadite, poiché non sono considerate tanto da un punto di vista storico-culturale, quanto nell'ambito della nascita e sviluppo dell'algebra classica nel Medioevo[16].

Gli studiosi di questo periodo verosimilmente hanno familiarità con le raccolte di "ricreazioni matematiche e fisiche" o di "magia matematica" che sono circolate in Europa dal Seicento, anche perché il professore di matematica francese A. Labosne[17] pubblica nel 1874 da Gauthier-Villars una edizione commentata dei quesiti ricreativi contenuti nella prima raccolta a stampa di problemi ricreativi, *Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres partie recueillis de divers autheurs, & inventez de nouveau, avec leur demonstration* (1612) di Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638). Labosne elimina la parte preliminare di aritmetica, anteposta ai problemi nell'edizione originale, che comprendeva molte pagine ed era «ben lontana dall'essere piacevole e dilettevole» (Labosne 1874, p. 12).

---

15 Cfr la Cronologia al termine dell'introduzione alla Parte I, sia per le opere medievali e rinascimentali citate, sia per i contributi storiografici.

16 I problemi di matematica ricreativa presenti nelle aritmetiche a stampa dei secoli XV-XVI sono considerati nelle storie della matematica pubblicate da Moritz Cantor (1829-1920) (*Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, 1880-1892 ed edizioni successive) e da Siegmund Günther (1848-1923) (*Geschichte der Mathematik*, 1907), entrambe iniziative editoriali di spicco di questi anni di fioritura degli studi (Heeffer 2006, p. 97)

17 Labosne era figlio d'arte: il padre era un maestro elementare che aveva pubblicato due opere rivolte alle classi operaie: un corso di matematiche elementari applicate al sistema metrico decimale e una guida del muratore ignaro di geometria e di meccanica (1854). Nel 1835 padre e figlio pubblicarono (a Troyes, nel centro nord della Francia) un manuale *Mathématiques élémentaires* (aritmetica applicata, geometria, trigonometria e geodesia) e un Traité 'Arithmétique nel 1857 un libro di *Problèmes de mathématiques et de physique à l'usage des aspirants au Baccalauréat ès sciences et à l'École Centrale*.

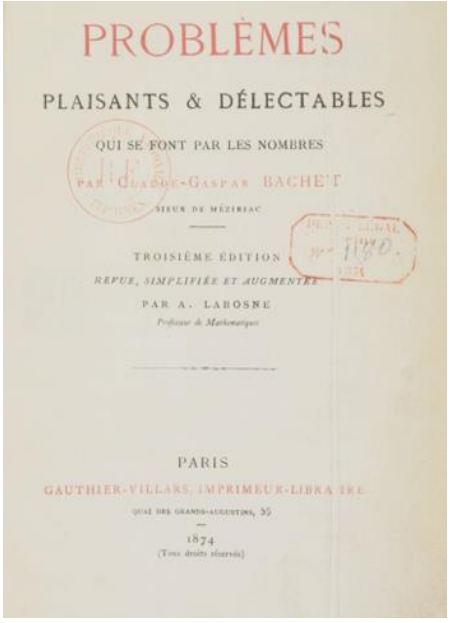


Figura 1.1 - Copertina dell'edizione rivista, semplificata e aumentata di A. Labosne del classico *Problèmes plaisants et delectables, qui se font par les nombres* (a partire dalla seconda edizione pubblicata dal Bachet nel 1624). Questa versione è stata ristampata più volte; nel 1959 l'editore Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard (Parigi) l'ha pubblicata in facsimile con una prefazione dallo storico della matematica e docente del Liceo Henri IV di Parigi Jean Itard (1902-1979); nel 1993 inclusa nella collana «Les grand classiques de Gauthier-Villars»; nel 2011 ha avuto ancora una ristampa in facsimile dal piccolo editore di provincia Les Caractères d'Ulysse.

In ogni caso, le ricerche storiche entrano in sinergia – in quegli anni a cavallo fra i due secoli – con l'interesse di un buon numero di matematici colti dei diversi paesi europei, per lo più in collegamento all'insegnamento e alla divulgazione della matematica[18]: innanzitutto Lewis Carroll (pseudonimo di Charles L. Dogdson, 1832-1898)[19] e Édouard Lucas (1842-1891), e sulla scia di quest'ultimo nel seguito Émile Fourrey (1869-1959) in Francia, William Rouse Ball (1850-1925), Percy Alexander MacMahon (1854-1929), Henry Ernst Dudeney (1857-1930) in Gran Bretagna, Hermann Schubert (1848-1911), Wilhelm Ahrens (1872-1927) e Walther Lietzmann (1880-1959) in Germania, Dénes König (1884-1944) in Ungheria (allora parte dell'Impero astroungarico); Emelyan Ignatievich Ignatiev (1869-1923) e Yakov Isidorovic Perelman (1882-1942) in Russia, Maurice Kraitchik (1882-1957) in Belgio, Giuseppe Peano (1858-1932) e Italo Ghersi (1861-1925) in Italia e Frederik Schuh (1875-1966) nei Paesi Bassi[20].

---

[18] Si indicano i paesi a partire dalla prima opera di riferimento pubblicata: si veda la Cronologia, al termine dell'introduzione alla Parte I.

[19] Nel 1880 Dogdson inizia la pubblicazione sul mensile «The Monthly Packet of Evening Readings» delle sue dieci storie umoristiche (che chiama *knots*), problemi matematici raccolti nel volume *A tangled tale* (1885); dieci anni dopo pubblica *Pillow problems*.

[20] Negli Stati Uniti spicca la figura di Sam (Samuel) Loyd (1841-1911), coetaneo di Lucas, un ingegnere cultore di scacchi, dal 1860 di «Chess Monthly», il quale, in una seconda tappa della sua carriera – in collaborazione con il figlio e per un periodo con Dudley – si occupò di puzzles in senso largo, e in particolare di quelli matematici (si veda Gardner a cura di 1959-60). Nella voce biografica sulla *Encyclopædia Britannica* si sottolinea che i «Loyd puzzles are remarkable for their disguised use of simple algebraic formulas» (ad vocem). In Giappone invece Kobon Fujimura (1903-1983) è autore di numerose raccolte di enigmi e problemi: un'ampia selezione viene pubblicata nel 1978 in lingua inglese con il nome di *The Tokio Puzzles*, a cura di Martin Gardner.

Francia	*Gran Bretagna*	*Germania*	*Ungheria*	*Russia*	*Italia*	*Olanda*	*Paesi Bassi*	*Stati Uniti*
	Carroll (1832-1898)							
Lucas (1842-1891)	Ball (1850-1925)	Schubert (1848-1911)						Loyd (1841-1911)
	Dudeney (1857-1930) MacMahon (1854-1929)				Peano (1858-1932) Ghersi (1861-1925)			
Fourrey (1869-1959)		Ahrens (1872-1927)		Ignatiev (1869-1923)			Schuh (1875-1966)	
		Lietzmann (1880-1959)	König (1884-1944)	Perelman (1882-1942)		Kraitchik (1882-1957)		
				Kordemsky (1907-1999)				Gardner (1914-2010)

Tavola 1.1 – La distribuzione geografica (per colonne) e le generazioni (per righe) di chi si è occupato di matematica ricreativa a cavallo tra Ottocento e Novecento

Alcune di queste opere mostrano attenzione alla ricostruzione storica, alle volte crescente in successive edizioni come nel caso di Ball; spicca in tal senso la raccolta di Ahrens.

In questo paragrafo si intende esporre brevemente come la storiografia novecentesca ha capovolto la visione della matematica ricreativa come vero e proprio "miscuglio" alla rinfusa di singole questioni e giochi, arrivando a riconoscere un patrimonio culturale antichissimo e di persistenza secolare – prevalentemente "immateriale" anche se non solo – che costituisce un fenomeno transculturale. Si è rintracciata la presenza di giochi e problemi ricreativi in molti ambiti culturali e da tempi remoti, inserita nel contesto economico, sociale e culturale: nell'Antichità e per molti secoli in simbiosi con le conoscenze e prassi sul numero e forma che emergono in svariate arti e mestieri; e nell'Europa moderna fino ai tempi nostri, a cavallo fra cultura popolare e matematica dotta.

Un primo contributo in tale direzione fu dovuto a due studiosi statunitensi a cavallo fra le due guerre mondiali, David Eugene Smith e Vera Sanford, come frutto delle ricerche filologiche del periodo immediatamente precedente. L'approccio storiografico pionieristico di Smith e Sanford non ebbe un seguito immediato, per motivi che sono in parte quelli che portano a una generale stagnazione della storiografia della matematica europea a partire dalla Prima Guerra Mondiale e soprattutto nel secondo dopoguerra (si veda §2.1.1). La "segregazione" del ricreativo dalla sfera più accademica eclissa ulteriormente il tema della matematica ricreativa fra gli storici.

Ciò è in contrasto con lo sviluppo della matematica ricreativa stessa, che registra invece una crescita costante nonostante gli eventi bellici (si veda ancora §2.1.1): giochi e indovinelli matematici vecchi e nuovi trovano spazio in rubriche di riviste scientifiche divulgative, fra cui la più celebre di Martin Gardner (1914-2010) su «Scientific American» dal 1957, e sono pubblicate in raccolte che sono tradotte e ristampate a più riprese, fra cui la più celebre forse *Matematicheskaya smekalka* (nota anche con il titolo a effetto della tradizione inglese curata da Gardner, *The Moscow puzzles*) pubblicata in Unione Sovietica nel 1954 da Boris A. Kordemsky (1907-1999).

Quest'ultimo – che conosceva e citava il contributo di Smith – sottolineava nel suo libro *Saggi sui problemi matematici per l'ingegno* (1958) che le origini, lo sviluppo e il vigore continuo dell'«intrattenimento matematico» era concomitante con l'evoluzione generale della matematica, da una parte, e della pedagogia, dall'altra; eppure gli storici della matematica e gli storici della pedagogia non sembravano interessati all'argomento, e quindi egli dedicava uno dei capitoli proprio alla storia dei "problemi matematici per l'ingegno" o "intrattenimento matematico" nella speranza di incoraggiare tali ricerche storiche. Egli accennava al carattere duraturo, attraverso i secoli di storia, della famiglia di problemi ricreativi, alcuni di essi scomparsi dal ricordo, altri chiariti e rinnovati; con sentimento nella scrittura e ricchezza di esempi raccontava un impegno collettivo nel risolvere e nell'ideare, che aveva coinvolto, nel suo sviluppo europeo, professionisti e dotti e dilettanti più o meno colti, includendo figure di primo piano quali Eulero e Gauss.

Gli auspici di Kordemsky hanno avuto un riscontro, sulla scia delle ricerche dei due studiosi statunitensi, a partire dagli anni Sessanta-Settanta, in anni di rilancio e sviluppo delle ricerche di storia della scienza.

I problemi attraverso il tempo e le latitudini: il contributo di David E. Smith e Vera Sanford

Negli anni Venti si sviluppa negli Stati Uniti il lavoro storiografico pionieristico sui problemi ricreativi dello studioso statunitense David Eugene Smith (1860-1944)[21], in collaborazione con l'allieva Vera Sanford (1891-1971)[22]. Smith lavora con Sanford sui problemi ricreativi anche da un punto di vista didattico, cercando nel passato idee per il rinnovamento dell'istruzione (aritmetica e algebra), e

[21] Smith, docente presso il Teachers College della Columbia University, è un cultore sia di storia della matematica sia di didattica della matematica, grande collezionista – sostenuto da George Plimpton – di manoscritti matematici e opere a stampa di diverse latitudini (il fondo Plimpton raccolto da Smith è oggi presso la Columbia University). Nella sua traiettoria l'erudizione e la pratica si combinano in modo naturale (Simons 1945; Donoghue 1998). Fu sua la proposta di creare l'ICMI, durante il Quarto Congresso Internazionale dei Matematici a Roma nel 1908.

[22] A richiamare l'attenzione sul lavoro di Sanford, per il resto misconosciuto, è stato Heeffer 2014. Sanford ottenne la laurea nel 1922 e cinque anni dopo il PhD presso la Columbia University; dal 1915 fu docente delle scuole pubbliche di New York, Pennsylvania e New Jersey, dal 1920 al 1929 presso la scuola-laboratorio (Lincoln School) del Teachers College della Columbia; passò poi all'insegnamento universitario, prima come assistant professor presso la Western Reserve University e dal 1933 presso il College a Oneonta della State University of New York (dove fu direttore del Dipartimento di Matematica e diventò professore nel 1943) al pensionamento come emerita nel 1959 (Harvey, Ogilvie 2000).

accostandoli ad altri generi di problemi. Nell'opera *History of mathematics* (1925) di Smith, dedicata alla storia delle matematiche elementari, e nel saggio *A short history of mathematics* di Sanford (1930), figurano capitoli sui "problemi elementari" (rispettivamente cap. 7 del vol. II e cap. 6) che tracciano un primo panorama dell'eredità della matematica ricreativa:

> Ever since problems began to be set, the mathematical puzzle has been in evidence. Without defining the limits that mark the recreation problem it may be said that the Egyptians and Orientals proposed various questions that had no applications to daily life, the chief purpose being to provide intellectual pleasure. The Greeks were even more given to this type of problem, and their geometry was developed partly for this very reason. In the later period of their intellectual activity they made much of indeterminate problems, and thereafter this type ranked among the favorite ones.
>
> In the Middle Ages there developed a new form of puzzle problem, one suggested by the later Greek writers and modified by Oriental influences. This form has lasted until the present time and will probably continue to have a place in the schools. [Smith 1925, vol. II, p. 532]

L'approccio di Sanford (e Smith) è radicalmente originale[23]. Innanzitutto, evitano accuratamente di definire i confini del ricreativo. Piuttosto si tratta di esplorare con uno sguardo complessivo il coacervo di rompicapi che si trovano accanto ai problemi di indole pratica, e dei giochi matematici: indagare i collegamenti delle fonti europee – attraverso il tempo, principalmente con il mondo greco-romano antico e tardo antico, e nella geografia – con le tradizioni orientali; esaminare i contatti con la sfera del narrativo e del leggendario, come ad esempio i racconti sulla corona di Gerone di Siracusa[24]; e anche il collegamento degli indovinelli o rompicapo con il contesto culturale e delle attività umane che richiedono distribuzioni eque, ad esempio la giurisprudenza, il commercio, le leghe metalliche o altre attività tecniche. L'interesse per il ricreativo si inquadra in quello più generale per la "non-elite mathematics", le matematiche elementari e pratiche.

Essi individuano tre filoni, concepiti in modo molto diverso rispetto alla suddivisione in capitoli per semplici motivi espositivi presente nelle raccolte di matematica ricreativa coeve (si veda §1.1.2 e la Cronologia a pag. 6): sono filoni "culturali", volti a disvelare la struttura e la natura del corpus di problemi ricreativi nei manoscritti medievali e i primi libri a stampa risalenti al Seicento. Per ogni esempio di problemi, nell'opera precedentemente citata, Smith offre numerosi riferimenti bibliografici alle fonti e commenti sui processi evolutivi e varianti:

- i problemi formulati come storielle in un contesto vagamente realistico ma scherzoso o fantasioso, che chiama "Problemi tipici" poiché sono tematiche ricorrenti nel tempo e nelle latitudini: cisterne da riempire, *Turchi e Cristiani* e il *problema di Giuseppe*, il *problema del testamento*, problemi di inseguimento, il problema della scacchiera, *il mulo e l'asino*
- i quadrati magici
- un filone di problemi che si ritrovano in contesti sia pratici sia ricreativi, che ingloba sotto la denominazione "Applicazione dell'algebra"

[23] Nella sua recensione della breve storia della matematica di Sanford, che pubblicò su questi temi negli anni Venti, Elisabeth B. Cowley (1874-1975) sottolinea l'inusuale spazio dedicato alla matematica commerciale e la matematica nell'istruzione (Cowley 1931).

[24] La leggenda della corona di Gerone è narrata da Vitruvio nel libro IX del *De Architectura*.

2. Typical Problems	**4. Applications of Algebra**
Pipes filling the Cisterns	General Nature
Variants of the Problem	The Number Puzzle
Turks and Christians (Josephus Problem)	Simultaneous Linear Equations
Testament Problem	Indeterminate Problems
Problems of Pursuit	The Regula Coecis
The Chessboard Problem	Alligation
The Mule and the Ass	Mint Problems
	Problems of Hiero's Crown
	First Problem in the New World

Tavola 1.2 - I filoni della matematica ricreativa nella *History of mathematics* di David E. Smith. Dettaglio di due paragrafi del capitolo VII *Elementary problems*: *2. Typical problems* e *4. Applications of algebra*; a questi si aggiunge il *5. Magic squares*

Questo ultimo filone indaga il collegamento fra aspetti della tradizione dei problemi pratici e anche ricreativi che si può esaminare come preistoria dell'algebra, e che in ogni caso ebbe un impatto proprio dall'emergenza dell'algebra classica (la teoria delle equazioni algebriche). Sanford, nel suo saggio *The history and significance of certain standard problems in algebra* (1927), pubblicato dal Teachers College della Columbia University (nella serie «Contributions to education», n. 251) esaminò infatti un'ampia selezione di manoscritti e libri antichi del fondo Plimpton ponendosi una questione allora inedita, ossia quella della scomparsa di alcuni problemi nei testi di matematiche elementari e nelle raccolte di matematica ricreativa:

> Problems have been eliminated from elementary textbooks when the business and economic conditions upon which they are based become obsolete; when their subject matter has lost interest; when the mathematical ideas they illustrate have been forgotten; and when the invention of better mathematical tools makes them trivial or causes their transfer to more advanced work. [Sanford 1927, citato in Heeffer 2014, p. 419][25]

In questo lavoro, sulla scia di Smith che lo ispira direttamente, vediamo l'interesse per la "non-elite mathematics" (le matematiche elementari e pratiche), combinato con l'interesse pedagogico-didattico[26]. Questo doppio interesse si arricchisce inoltre di un approccio di stampo epistemologico, che porta l'autrice a distinguere fra tre tipi di problemi verbali elementari: genuini, pseudo-reali e ricreativi. Esplora poi questa distinzione anche nelle sue implicazioni didattiche, su cui si tornerà nel §2.1.1 con alcune considerazioni sul ruolo della matematica ricreativa nella didattica di Smith e Sanford.

[25] Questo lavoro è stato esaminato recentemente da Heeffer (2014), a proposito dell'interazione dello sviluppo dell'algebra con l'evoluzione della matematica ricreativa.

[26] L'opera fu pubblicata con l'indicazione di John Wesley Young (1879-1932) come "editor", ma vi compare una introduzione di Smith, cui Sanford si riferisce così nella prefazione: «[particular acknowledgement should be given] to Professor David Eugene Smith, not only as adviser and critic of the planning of this work and in its execution, but also as the scholar and teacher to whom the author, in company with many others, owes her first interest in the history of mathematics» (Sanford 1930, p. vi).

Lo spazio guadagnato nella storiografia dell'inizio del secolo doveva essere di nuovo riconquistato, restituendo la matematica ricreativa all'alveo complessivo della matematica, e ciò è potuto avvenire a partire dagli anni Sessanta, quando le nuove prospettive nella storiografia della scienza rendono rilevanti epoche, autori e opere prima considerati "minori".

Una "nuova storiografia della matematica", soprattutto a partire dalla fine degli anni Settanta, non si concentra più solo ed esclusivamente sullo sviluppo del pensiero matematico da un punto di vista cumulativo, incentrato su grandi autori e sul progredire di problemi risolti, teoremi dimostrati, nuove branche e teorie quasi avulse dal contesto culturale complessivo. Si va invece delineando, nelle ricerche di storia della matematica, un interesse per temi nuovi in grado di scavare in profondità il ruolo della matematica nella storia della cultura e delle mentalità, e nella storia tout court, nell'evoluzione della tecnica, della società, della vita economica e persino della vita quotidiana.

La rinnovata attenzione al Medioevo e alla prima età moderna europea, da una parte, e alla matematica al di fuori dell'Europa occidentale (in Cina, nel mondo islamico, e così via), dall'altra, portano allo sviluppo di nuovi studi sulla matematica ricreativa, alla ricostruzione filologica di singoli problemi, opere e autori anche in un'opera di sintesi.

Per quanto riguarda la storia europea, in Germania, Menso Folkerts (n. 1943), nel 1978 cura l'edizione delle *Propositiones ad acuendo juvenes* di Alcuino di York, un'opera cruciale delle origini della tradizione europea della matematica ricreativa, ed Eberhard Knobloch (n. 1943) pubblica nella rivista «Sudhoffs Archives. Zeitschrift für Wissenschaftsgeschichte» uno studio monografico sulla tradizione del problema delle pesate (Knobloch 1973)[27]. Le ricerche sulla aritmetica mercantile e dei trattati d'abaco si collocano a cavallo fra storia della matematica e storia economica e storia della contabilità, come si vede nella tesi di dottorato dello statunitense Warren Van Egmont, *The commercial revolution and the beginnings of Western mathematics in Renaissance Florence 1300-1500* (1977), che nel 1980 pubblica un catalogo dei trattati d'abaco. Anche se l'interesse per i trattati d'abaco si concentra sul sapere in aritmetica e algebra e sulle pratiche commerciali, i quesiti ricreativi ricevono progressivamente maggiore attenzione, con la costatazione che la matematica ricreativa fa parte integrale di questo mondo (Franci, Toti Rigatelli 1989; si vedano recentemente i problemi selezionati in Ulivi 2005). Più recentemente, anche con lo sviluppo degli studi sulle botteghe d'abaco, Raffaella Franci ha richiamato l'attenzione sul collegamento con la storia dell'istruzione matematica (Franci 1999, 2000; si veda anche Millán Gasca 2016).

Uno studio di sintesi sui giochi matematici e i problemi di matematica ricreativa attraverso la storia, che approfondisce il tentativo pionieristico di Smith di delineare il patrimonio complessivo, fu pubblicato

[27] Altri studi rilevanti sono ad opera di Jacques Sesiano (n. 1944).

nel 1979 da Kurt Vögel (1888-1985), insieme alla giovane Karen Reich e a Helmut Gericke (1909-2007); esso è ancora oggi una sintesi di riferimento per quanto riguarda la matematica ricreativa dall'Antichità all'età moderna, attraverso le culture (Heeffer 2006). Lo studio fu pubblicato all'interno di una nuova edizione completamente riveduta da Vögel, Reich e Gericke, della parte dedicata all'aritmetica e all'algebra in un'opera monumentale dei primi del Novecento sulla storia delle matematiche elementari, dovuta allo studioso tedesco Johannes Tropfke (1866-1939), dal titolo *Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung*[28]. Questo studio mette insieme i contributi dell'età dell'oro con le ricerche più recenti, e, con l'ambizione di includere tutti i grandi filoni culturali della matematica ricreativa, li raggruppa in sette grandi ambiti (si veda Tavola 1.3). Gli ambiti sono un po' eterogenei: uno essi è il "calcolo geometrico", mentre i grandi filoni classici sono descritti con terminologia matematica come "problemi lineari" (distinguendo fra una o più incognite) o problemi di successioni e progressioni, mentre altri problemi aritmetici sono descritti in termini puramente ricreativi come "indovinare un numero". All'interno di ciascuno di questi ambiti, nella loro catalogazione, emergono con pregnanza le narrazioni, i contesti e gli aspetti storici e geografici di origine dei grandi filoni di un patrimonio che, grazie all'analisi storiografica, si percepisce nella sua ampiezza, varietà e dinamismo. Basti come esempio il filone dei *problemi di movimento* ("Bewegunsaufgaben": viaggi, schiavi in fuga, messaggeri inviati...) incluso fra i problemi lineari a un'incognita, il quale viene suddiviso in cinque ricche sezioni geografiche: Cina, India, Arabi, Armenia e Bisanzio, l'Occidente.

[28] La prima edizione (in due volumi), dell'opera di Tropfke fu pubblicata in 1902-1903 (l'opera fu notevolmente ampliata in edizioni susseguenti, cfr. Heeffer 2006, nota 72). La prima parte del primo volume di Tropfke (1902-1903), dedicata all'aritmetica (*Das Rechnen*), dopo lo studio di numeri interi e frazionari e della misura, si concludeva con una sezione intitolata "Das angewandte Rechnen", incentrata sui calcoli pratici-commerciali (quali la regola del tre, calcoli di sconti, cambio, compagnie ecc). L'edizione amplia questo capitolo, il quale si presenta diviso in due parti, la prima dedicata ai calcoli pratici quotidiani ("Probleme aus dem täglichen Leben"), quali compra-vendita, tara e sconti, cambio di moneta e conversione di misure ecc, e la seconda – aggiunta in questa edizione – dedicata ai problemi della matematica ricreativa ("Probleme der Unterhaltungsmathematik").

1. Problemi lineari con un'incognita

- 1.1 Problemi del mucchio
  - 1.1.1 Problemi *Gott Grüß Euch* [Determina il numero]
  - 1.1.2 Il problema dell'età
  - 1.1.3 Il palo nell'acqua (o nel terreno)
- 1.2 Problemi di cisterna (problemi di prestazione)
  - 1.2.1 Problemi effettivi di cisterne [cisterne, pozzi, vasche, laghetti, botti]
  - 1.2.2 La costruzione della casa
  - 1.2.3 La nave con più vele
  - 1.2.4 Leone, lupo e cane
  - 1.2.5 Macina con macinature diverse
  - 1.2.6 Bevitori con diverse prestazioni
- 1.3 Problemi di "annidamento" (Schachtelaufgaben)
  - 1.3.1 Viaggi d'affari
  - 1.3.2 Il guardiano nel meleto
  - 1.3.3 *Siquis intrat monasterium* (Il povero e la vittima)
  - 1.3.4 Varie
  - 1.3.5 L'eredità sconosciuta
- 1.4 Problemi di movimento [viaggi, schiavi fuggiti, messaggeri inviati...]
  - 1.4.1 Cina
  - 1.4.2 India
  - 1.4.3 Arabi
  - 1.4.4 Armenia e Bisanzio
  - 1.4.5 L'Occidente
- 1.5 Problemi vari
  - 1.5.1 *Regula equalitatis* (acquisto di quantità uguali)
  - 1.5.2 Troppo – troppo poco
  - 1.5.3 Il rapporto di lavoro interrotto
  - 1.5.4 Il lavoratore pigro (Il lavoratore nella vigna)
  - 1.5.5 Che ore sono?

2. Problemi lineari con più incognite

- 2.1 La scomposizione di un numero in due o più addendi
- 2.2 Lo scambio trovato
- 2.3 Uno da solo non può comprare (l'acquisto di un cavallo)
- 2.4 Dare e avere
- 2.5 Due tazze e un coperchio
- 2.6 Il problema dei 100 uccelli e le "attività minerarie" (Zechenaufgaben)

3. Problemi di calcolo geometrico

- 3.1 Il teorema di Pitagora nei problemi geometrici
  - 3.1.1 La scala socchiusa
  - 3.1.2 La canna di bambù rotta
  - 3.1.3 Il tubo inclinato
  - 3.1.4 L'asta e la corda tesa
  - 3.1.5 Le due torri
- 3.2 Problemi in cui si usa la similitudine dei triangoli
  - 3.2.1 Problemi di avvistamento
  - 3.2.2 Misurazione dell'ombra

4. Problemi con successioni e progressioni

- 4.1 Progressione aritmetica
- 4.2 Progressione geometrica
  - 4.2.1 La filastrocca
  - 4.2.2 Il problema della scacchiera (due progressioni)
  - 4.2.3 Il problema dei pesi

5. Problemi con resto

- 5.1 Le regole Ta-Yen
- 5.2 La donna uovo
- 5.3 Le tre sorelle

6. Indovinare i numeri

- 6.1 Calcolare a ritroso
- 6.2 Indovina con 9
- 6.3 Pari o dispari
- 6.4 Indovinare in cerchio
- 6.5 Dov'è l'anello?
- 6.6 I tre giocatori
- 6.7 Distribuzione di 3 elementi

7. Problemi di organizzazione e altri "scherzetti"

- 7.1 Stessi ricavi ma vendite di quantità diverse
- 7.2 Profitto quando si vende per il prezzo di acquisto
- 7.3 Il gioco di Giuseppe
- 7.4 L'eredità gemella
- 7.5 Lupo, capra e cavolo
- 7.6 Problemi di trasferimento
- 7.7 Varie

Tavola 1.3 - Ricostruzione, in traduzione italiana, dell'indice dettagliato della sezione "Problemi della matematica ricreativa" nell'edizione del 1979, completamente rivista e ampliata da Vögel, Reich e Gericke, del primo volume della *Storia delle matematiche elementari* di J. Tropfke [traduzione italiana mia]

Figura 1.2 - Kurt Vögel. Fonte: Mahoney, Schneider 1986

Attraverso la figura di Vögel – che aveva iniziato la sua carriera come insegnante in Germania pochi anni prima di Vera Sanford (erano quasi coetanei) – questo saggio rappresenta idealmente la continuità con la stagione degli studi dei primi del secolo e a distanza di 50 anni degli studi degli autori statunitensi. Come notava allora lo storico della scienza statunitense Michael S. Mahoney (1939-2008):

> The reader familiar with Vögel's distinguished career [...] will appreciate the opportunity given him by this new edition to bring together some of the wealth of detail he has acquired concerning the mercantile and recreational problem-literature from Egyptian, Babylonian, Chinese, Greek, Arabic, Byzantine, and medieval Latin, German, and Italian sources. More than mathematics stands revealed in the problems; evident also are traces of the daily life of past cultures and of the links between them at the basic level of arithmetical lore. [Mahoney 1981, p. 115]

Dal settore di ricerca sulla scienza islamica o antico-mesopotamica sono arrivate, nello stesso periodo, prospettive destinate ad approfondire anche ulteriormente il tipo di ricerche storico culturale che Smith aveva intrapreso con l'allieva Sanford, volte a inserire la matematica ricreativa a pieno titolo nella matematica da un punto di vista storico-culturale. Lo studioso tedesco di scienza islamica Heinrich Hermelink (1920-1978) propone nel 1976, in un convegno sulla storia della scienza araba, un'analisi della matematica ricreativa come specchio di antichi rapporti culturali fra le civiltà orientale e occidentale. Si tratta di un lavoro che è considerato pionieristico nell'aprire una nuova stagione storiografica verso la matematica ricreativa. Infatti, Hermelink si pone di fronte alla matematica ricreativa non con un esclusivo interesse matematico o per la soluzione di singoli quesiti, bensì considerandola dal punto di vista culturale, ricevendo idealmente il testimone da Sanford. Egli descrive acutamente ciò che rende questi problemi divertenti o ricreativi:

> [..]a funny, striking or even absurd deviation from the circumstances of reality is *an essential feature* of any recreational problem. It is this deviation from the habitual which causes amazement, and which thus imparts upon the problem its recreational value. [Høyrup 1989, p. 66]

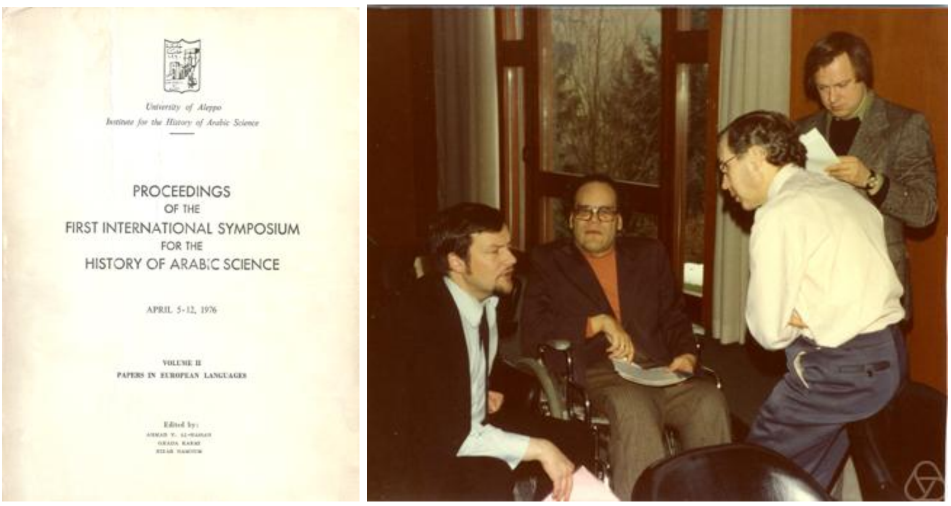


Figura 1.3 - A sinistra, la copertina del volume II degli *Atti* del Primo simposio internazionale per la storia della scienza araba, tenutosi ad Aleppo 5.12 aprile 1976, dove fu pubblicato Hermelink 1978. A destra, Heinrich Hermelink (secondo da sinistra) con Jacques Sesiano, Christoph J. Scriba ed Erwin Neuenschwander in un convegno di storia della matematica ad Oberwolfach nel 1978 (foto di Enid Grattan-Guinness). Fonte: https://owpdb.mfo.de/detail?photo_id=15978&would_like_to_publish=1

La presenza di una tradizione di matematica ricreativa fin da tempi antichissimi e tuttora piena di vitalità appare un enigma storico di grande interesse, anzi un enigma culturale profondo, in grado di offrirci prospettive di valore su ciò che la matematica è, e sul significato umano della matematica. La consapevolezza di questa componente dell'universo matematico è sancita in due opere collettive curate da Grattan Guinness a cavallo del 2000: due capitoli sui giochi matematici e sulla matematica ricreativa intesa in modo ristretto come i problemi o quesiti ricreativi sono stati inseriti nella prima citata *Companion Encyclopedia of the History and philosophy of the mathematical sciences* (1994), e l'opera *Mathematical recreations and problems of past and present times* (1892) di Ball è stata scelta per rappresentare questa componente della matematica europea moderna e contemporanea, *Landmark writings in Western mathematics 1640-1940* (2005)[29].

La matematica ricreativa è vista, negli studi recenti, come un corpus o patrimonio materiale e soprattutto "immateriale", che, come nel caso di altri aspetti del folklore (canzoni, danze, fiabe), è costituito da singoli quesiti. Come altre forme delle tradizioni popolare, questo patrimonio si è trasmesso per secoli oralmente, e questa forma di trasmissione è sopravvissuta anche dopo l'avvento delle compilazioni scritte, come nei trattati d'abaco medievali europei, e persino delle raccolte a stampa, fino ai nostri giorni. Uno dei contesti di trasmissione orale in Europa è quello scolastico, come mostrano diverse testimonianze raccolte proprio da Heeffer riguardanti la prima età moderna.

[29] I giochi matematici sono trattati da Rüdiger Thiele (Thiele 1994); la matematica ricreativa e l'opera di Ball sono state affidate a David Singmaster, sul cui contributo si tornerà più avanti (rispettivamente Singmaster 1994 e 2005).

Per secoli, vi è un intreccio fra matematica ricreativa e matematica pratica o subscientifica, come la chiama Jens Høyrup[30]. Nell'Europa moderna soprattutto in età contemporanea, come si vedrà nel §2.1, l'alleanza con l'insegnamento della matematica diventa cruciale, e si evolve progressivamente il legame fra matematica ricreativa e matematica dotta (l'algebra, dapprima, e poi calcolo delle probabilità o alla teoria dei grafi) che rende i confini molto meno marcati. Inoltre, l'algebra fece scemare il fascino di interi filoni ricreativi ("spoiled recreational problems") che scomparirono dai manuali di aritmetica e algebra, per poi ricomparire nel XVIII secolo, ripresi fra l'altro da Eulero (Heeffer 2014).

L'analisi del contenuto matematico dei quesiti, delle possibili soluzioni, dell'identificazione delle sorgenti remote o degli autori, non esaurisce il campo dell'analisi storica. L'accostamento alle fonti ha quindi condotto alla consapevolezza della complessità della tradizione culturale della matematica ricreativa da più punti di vista: la varietà dei temi matematici e delle famiglie di quesiti, l'antichità, la pluralità di contesti culturali e dei canali di trasmissione nel tempo e nella geografia, la comparsa e scomparsa di quesiti oppure l'evolversi dei ruoli attribuiti alla matematica ricreativa e di ciò che è considerato parte della matematica ricreativa. È questo un accorgimento metodologico e culturale cruciale, sottolineato da Karine Chemla:

> [...] in their approach the authors of the various articles refrain from adopting an observer's perception of what is recreational. Instead, they rely on actors' categories to define their corpus. Moreover, the purpose of the present issue is not to deal with the history of mathematical recreations as a separate chapter incidentally attached to the history of mathematics, On the contrary, this issue aims at exploring broadly what is at stake, for the history of mathematics *stricto sensu*, in dealing with elements of the history of mathematical recreations. [Chemla 2014, p. 368]

In particolare, nel contesto europeo a partire dal Seicento la matematica si trasforma profondamente come campo del sapere in ragione del suo nuovo ruolo nella indagine meccanica e in generale scientifica, e del fatto che la scienza acquisisce un ruolo sempre più rilevante nella cultura europea. La matematica ricreativa appare una parte di tale sviluppo, collegata volta per volta alla magia e all'illusionismo, alla divulgazione scientifica:

> these practices all illustrate forms of mathematical life, most often outside the academic world, and yet they are endeavors that the historian cannot consider in isolation from the more academic pursuits without losing something [Chemla 2014, p. 375]

È questa la prospettiva che può ispirare un approccio ricreativo alla didattica, poiché offre spunti e idee sul modo in cui l'aspetto ricreativo, dilettevole, giocoso, fa parte della matematica come manifestazione della cultura umana.

[30] Si veda un riepilogo recente sulla matematica ricreativa antica, medievale e della prima età moderna, nella voce "Mathematics Practical and Recreational" redatta da Høyrup l'*Encyclopaedia of the History of Science, Technology and Medicine in Non-Western Cultures* (Høyrup 2016).

1.1.2 Giochi, scherzi e trucchetti: i filoni della matematica ricreativa, dalla storia all'attualità

Dalle ultime decadi dell'Ottocento a oggi, come già accennato nella parte iniziale del §1.1, si assiste a un rinnovato interesse e fioritura del patrimonio della matematica ricreativa, con la partecipazione del pubblico e di un brillante gruppo di studiosi in vari paesi. Alcuni di essi propongono anche nuovi quesiti o soluzioni, ma tutti cercano di offrire ai lettori, curiosi o appassionati, raccolte di questioni ben selezionate, ampie e ordinate. Il loro sforzo catalogatore (quesiti, opere, autori), seppure per lo più con attenzione agli aspetti storici e alle fonti, non punta alla comprensione storico-culturale del patrimonio, ma piuttosto a organizzare il materiale anche per renderlo gestibile in un libro e a fornire una visione d'insieme, nella quale ognuno si possa orientare per trovare i problemi più affascinanti o divertenti. Gli indici di queste compilazioni ci permettono di raccontare concretamente la ricchezza e varietà di tale patrimonio, e come esso si presta a essere "navigato" in modi diversi, anche in collegamento a obiettivi divulgativi, didattici, di ricerca, di intrattenimento.

Si parte dalle suddivisioni presenti in alcune delle raccolte risalenti al periodo a cavallo del 1900: Lucas, Ball, Ahrens, König; si prosegue con i contenuti di tre opere della seconda metà del Novecento di natura diversa: la raccolta di Kordemsky, la voce nella *Britannica* e la raccolta bibliografica di William Schaaf e il catalogo-bibliografia di Singmaster[31].

Viene dedicata particolare attenzione alla raccolta di Ball, per proporre alcuni esempi specifici di quesiti ricreativi, della loro presentazione e delle varie sfumature di sfida e curiosità che ogni singolo quesito offre. In conclusione si propone un elenco sintetico dei *filoni mai tramontati*[32].

Lucas: «Récreations mathématiques»

Édouard Lucas, docente di matematica presso i licei e membro stimato della vivace comunità matematica francese e degli ambienti della *Association Française pour l'Avancement des Sciences*, è il grande ispiratore di questo movimento a livello internazionale, a partire dalla pubblicazione del primo dei quattro volumi *Récréations mathématiques* (1882-94), che si richiama alla tradizione precedente fin dal titolo, ma offre in effetti uno sguardo innovatore e potenzialmente fecondo[33]. Egli chiama ognuno dei capitoli del libro

[31] Cfr la Cronologia al termine dell'introduzione alla Parte I.

[32] Cfr la classificazione a scopo didattico di Oldfield descritta nel §2.1.5.

[33] Su Lucas e il suo ruolo cruciale nella storia delle ricreazioni matematiche è disponibile un dettagliato studio di Anne-Marie Décaillot (1999; 2003, 2014). Riprendiamo i dettagli che seguono dall'ultimo di questi tre lavori. Solo i primi due volumi vengono pubblicati quando è in vita l'autore (tra il 1882 e il 1883) con successo confermato dalla loro rapida ristampa. In seguito alla morte improvvisa di Lucas nel 1891, a partire da una serie di suoi appunti manoscritti, la *Société mathématique de France* affida il compito di completare l'opera a Delannoy, Laisant e Lemoine, suoi collaboratori ed ex-studenti all'École Polytecnique. Sembra che il terzo volume apparisse già completo nelle note di Lucas e infatti fu rapidamente pubblicato, come confermato dalla lettera che il 13 gennaio 1893 Laisant scrive a Delannoy: «le 3è volume des *Récréations mathématiques* va paraître incessanment». Il quarto volume ha richiesto un lavoro più complesso in termini di scrittura e formattazione per la pubblicazione, come conferma

"ricreazione": 8 ricreazioni nel primo volume, 7 nel secondo e nel terzo, 8 nel quarto (Tavola 1.4). I capitoli sono suddivisi in paragrafi, che affrontano le diverse forme in cui è apparsa nella storia la ricreazione che dà il titolo al capitolo, i vari tentativi di risoluzione e i casi particolari.

Si trovano tutti i giochi matematici e i problemi ricreativi che oggi consideriamo classici, anche proprio in ragione della loro consacrazione da parte di Lucas: da quest'opera verranno tratti e riproposti in seguito in numerose opere in altre lingue. Oltre a novità da lui ideate, fra cui il celebre rompicapo *la torre di Hanoï*, egli aggiunge tematiche nuove e di attualità, quali le macchine per calcolare e gli strumenti per il calcolo veloce. I volumi si organizzano come una successione di ricreazioni, senza alcuna distinzione nemmeno fra giochi matematici e problemi ricreativi, oppure fra aspetti materiali o immateriali (Tavola 1.4): dai problemi degli attraversamenti ai ponti e ai labirinti, dal gioco delle otto regine negli scacchi al solitario, dal *Baguenaudier* (noto anche come *anelli cinesi o di Cardano*, *ago del diavolo*) ai giochi del domino e della dama, dai giochi di tassellazione (*parquet*) ai rompicapo (*casse-tête*) basati sulla trasformazione delle figure geometriche grazie allo spostamento delle loro varie parti, dai giochi della campana ai trucchi di calcolo con le dita, fino alle somme di numeri figurati (triangolari, quadrati, cubi...).

Vol. 1	**Vol. 3**
1. Le jeu des traversées en bateau	1. Le calcul sur les doigts
2. Le jeu des ponts et des îles	2. Le calcul et les machines à calculer
3. Le jeu des labyrinthes	3. Le jeu du Caméléon et le jeu des jonctions de points
4. Le probléme des huit reines au jeu des échecs	4. Le Jeu militaire et la Prise de la Bastille
5. Le jeu du solitaire	5. La Patte d'oie et le Fer à cheval
6. La Numération binaire	6. Le Jeu américain et amusements par les jetons
7. Le jeu du baguenaudier	7. L'Étoile nationale et les jeux de Rouge et Noire
8. Le jeu du taquin	
Vol. 2	**Vol. 4**
1. Au jeu de dames, qui perd gagne	1. Le Calendrier perpétuel et le Calcul automatique des résidues
2. Le jeu de dominos	2. L'Aritmétique en boule
3. Les jeux de marelle	3. L'Aritmétique en bâtons
4. Le jeu de parquet	4. Le Jeu des Mérelles au XIII siècle
5. Les jeux de casse-téte	5. Les Carrés magiques de Fermat
6. Les jeux de demoiselles	6. La Géometrie des réseaux et le problème des dominos
7. Le jeu d'Hamilton	7. La Géometrie des régions, le problème géographique des quatre couleurs et les réseaux à point triples
	8. La machine à marcher

Tavola 1.4 - I capitoli dei quattro volumi dell'opera *Récréations mathématiques* di Édouard Lucas

L'approccio di Lucas nella trattazione degli argomenti è quello, moderno e originale, di un matematico puro: dedicando un intero capitolo ad ogni ricreazione si mette nelle condizioni di descrivere nel dettaglio il singolo gioco o problema discutendone i possibili sviluppi matematici con proprietà, dimostrazioni e teoremi collegati. Allo stesso tempo egli non ha la pretesa di una raccolta completa della matematica ricreativa, bensì l'autore compie delle scelte, fra il materiale a lui noto, in base ai suoi gusti e dando la preferenza alla branca della matematica di cui era cultore, la teoria dei numeri (Decaillot 2014).

sempre Laisant nella stessa lettera a Delannoy: «Vous devez avoir en mains tous les éléments pour le 4è [volume]. Il faudra bientôt vous en occuper».

Ball: «Mathematical recreations and problems of past and present times»

Nella sua opera *Mathematical recreations and problems of past and present times* (1892) – a dieci anni dall'uscita del volume di Lucas – lo studioso britannico Walter William Rouse Ball (1850-1925), docente presso l'Università di Cambridge e anima del Trinity College, seppure in un numero di pagine più contenuto e con minore profondità di analisi matematica, cerca di offrire una panoramica complessiva delle ricreazioni matematiche[34]. Di conseguenza, a differenza di Lucas, l'indice del libro raggruppa le questioni in capitoli separati dedicati a: aritmetica, quadrati magici, geometria, meccanica (eredi della classica riunione di temi ricreativi matematici e fisici), "tracciati continui" (grafi) e una miscellanea che presenta principalmente giochi, ma anche problemi con le carte (Tavola 1.5). Osserviamo che nelle numerose edizioni susseguenti i riferimenti sulle origini storiche di ogni quesito ricreativo proposto, si arricchiscono, e recepiscono notizie reperite in opere pubblicate nel frattempo in altri paesi.

[34] Questo libro è quello scelto da Ivor Grattan Guinness per rappresentare le ricreazioni matematiche nel volume collettivo da lui curato *Landmark writings in Western mathematics 1640-1940* (2005): si tratta del capitolo Singmaster 2005. Si osservi che il volume di Rouse Ball è molto più breve e in qualche modo non monografico, poiché è suddiviso in due parti: la prima è intitolata "Ricreazioni matematiche", mentre la seconda parte è una "Miscellanea di saggi e problemi" su varie questioni matematiche.

CAPITOLO I

Alcune questioni aritmetiche

Problemi elementari numerici (miscellanea)
Paradossi aritmetici
Il problema dei pesi di Bachet
Problemi di aritmetica superiore
Il teorema di Fermat sulle potenze binarie
L'ultimo teorema di Fermat

CAPITOLO II

Alcune questioni geometriche

Fallacie geometriche
Paradossi geometrici
Coloramento delle carte
Geografia fisica
Giuochi statici di posizione
Il problema del tre in linea
Generalizzazione a *p* in linea
Giuoco del mosaico – Giuoco della croce in quattro
Problema del cubo colorato
Giuochi dinamici di posizione
Problema dello istallamento dei treni
Problemi del battello
Problemi geodetici
Problemi coi gettoni posti in fila
Problemi sopra una scacchiera con gettoni o pedine
Problema di Guarini
Giuochi geometrici diversi
Anelli paradromici

CAPITOLO III

Alcune questioni meccaniche

Paradossi sul moto
Forza, inerzia, forza centrifuga
Lavoro, stabilità di equilibrio ecc.
Moto perpetuo
Modelli
Navigare più veloce del vento
Battello messo in moto per mezzo di una corda
Legge di Hauksbee
La palla del tennis
La palla del cricket
La teoria del volo degli uccelli

CAPITOLO IV

Questioni diverse

Il giuoco del quindici
La torre di Hanoï
Gli anelli cinesi
Il problema delle otto regine
Altri problemi con le regine e giuoco degli scacchi
Il problema delle quindici scolare
Problema con un mazzo di carte
Metodo di Monge per dare le carte
Disposizione delle carte in linee e colonne
Determinazione di due carte fra $\frac{1}{2}n(n+1)$ coppie date
Problema dei mazzi di carte di Gergonne
La trappola per i sorci
Il giuoco del tredici

CAPITOLO V

I quadrati magici

Nota storica sui quadrati magici
Costruzione dei quadrati magici dispari
- Metodo di De La Loubère
- Metodo di Bachet
- Metodo di De La Hire

Costruzione dei quadrati magici pari
- Primo metodo
- Metodo di De la Hire e Labosne

Quadrati magici composti
Quadrati magici con margini
Quadrato iper-magico
- I quadrati di Nasik
- I quadrati doppiamente magici

Pennelli magici
Giuochi magici
- Quadrato magico di carte
- Il problema degli ufficiali di Eulero
- Quadrati magici del domino
- Quadrati magici di monete

CAPITOLO VI

Problemi dei tracciati continui

Problema di Eulero
- Definizioni
- Teoremi di Eulero
- Esempi

Labirinti
- Regole per percorrere completamente un labirinto
- Nota storica sui labirinti

Degli alberi geometrici
Il giuoco di Hamilton
Il cammino del cavaliere su una scacchiera
- Metodo di De-Montmort e di De-Moivre
- Metodo di Eulero
- Metodo di Vandermonde
- Metodo di Warnsdorff
- Metodo di Roget
- Metodo di Moon
- Metodo di Jaenisch
- Numero delle vie possibili
- Vie di altri pezzi della scacchiera

Tavola 1.5 – L'indice della *Parte I – Ricreazioni matematiche* della prima edizione della traduzione italiane del 1910 di *Mathematical recreations and problems of past and present times* (condotta sulla seconda edizione inglese) uscita per i tipi di Zanichelli. Il traduttore era Dionisio Gambioli (1858-1941), docente delle scuole secondarie (si veda Menghini 1999, dove si esaminano anche le addizioni da lui curate)

Rouse Ball esprime chiaramente la sua appartenenza a un flusso ininterrotto di contributi. Gran parte delle questioni elementari dei primi tre capitoli, ricorda al lettore, sono prese dall'opera di Bachet (l'edizione del 1624) e di Jacques Ozanam (nelle edizioni riviste da Montucla e tradotte da Hutton del 1803 e del 1814)[35]. L'autore ribadisce comunque che, a loro volta:

> Parecchi problemi di Bachet sono stati presi dagli scritti di Alcuino, Pacioli di Borgo San Sepolcro, Tartaglia o Cardano, e probabilmente alcuni di essi sono di origine orientale. [Ball 1905 tr. it. 1910, p. 1]

e che, inoltre,

> sarebbe ben difficile di non trovare in qualunque de libri in circolazione in Inghilterra sui giuochi matematici più di una dozzina di giuochi, che non siano contenuti in uno di questi quattro volumi[36] [ivi, p. 2]

Il primo capitolo parte da una miscellanea di questioni aritmetiche elementari, le quali «per quasi tre secoli hanno formato gran parte delle molte compilazioni dei giuochi o divertimenti matematici», eppure hanno ormai un'importanza più storica che aritmetica; quindi, «forse un matematico potrebbe anche ometterli e passar subito all'ultima parte di questo capitolo»:

> sono, propriamente parlando, come una specie di astuzie o giuochetti, e seguo l'uso comune, presentandoli in questa forma. Posso tuttavia osservare che gran parte di essi non sono di grande importanza, anche come astuzie, fuorché o il *modus operandi* è mascherato o il risultato ottenuto è differente da quello che si aspettava. Siccome io non sono uno scrittore di stregonerie, mi astengo dal ricordare i mezzi per mascherare le operazioni da farsi, e do semplicemente una nuda enumerazione dei passi essenziali per giungere al risultato col metodo adoperato. Termino col richiamare la regola fondamentale che nessun'astuzia, per quanto bella e buona, non permette una ripetizione immediata; ed allorché si dovrà ripeterla, sarà necessario di usare un metodo diverso per ottenere il risultato. [ivi, pp. 2-3]

Dopo una serie di problemi del tipo *Indovina un numero*, vengono proposti alcuni problemi dipendenti dal sistema di numerazione (un classico sono i problemi che giocano con le cifre dell'anno di nascita) e, in particolare, egli presenta qui il gioco per cui se prendi un numero di tre cifre, ne rovesci l'ordine delle cifre e sottrai il numero ottenuto dal numero originario, allora, se è data l'ultima cifra della differenza, tutte le altre cifre sono note (si può ottenere solo 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 o 891). Prima di passare ad alcuni rompicapi collegati alle carte da gioco, all'interno di un minuscolo paragrafo intitolato «Questioni varie», riporta un esempio di quelle questioni sui numeri che, a sua detta, «possono essere risolte empiricamente, ma non hanno nessuno speciale interesse matematico»[37]:

---

[35] Si veda la Cronologia al termine dell'introduzione alla Parte I.

[36] Si riferisce all'edizione di Ozanam pubblicata nel 1723 in tre volumi con un quarto volume supplementare contenente (fra le altre cose) un'appendice sui giochi. Qualche cenno su quest'opera si troverà nel §2.1.1.

[37] Si tornerà su questo aspetto nel §2.2, a proposito del *Four Fours problem*.

> Con le sette cifre 9, 8, 7, 6, 5, 4, 0 scrivere tre numeri, la cui somma sia uguale ad 82; ciascuna cifra dev'essere adoprata una volta sola, e può essere impiegato l'uso delle ordinarie notazioni delle frazioni. Una soluzione è $80{,}6\overline{9} + 0{,}7\overline{4} + 0{,}\overline{5}$. Questioni analoghe si possono proporre con le cifre 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, per esprimere numeri, la cui somma sia uguale ad uno; una soluzione è $\frac{35}{70}$ e $\frac{148}{296}$. Se la somma fosse uguale a 100 si avrebbe una soluzione in $50; 49; \frac{1}{2}; \frac{38}{76}$. [ivi, p. 12][38]

Questa sezione di apertura del primo capitolo prosegue con un esempio di problema di travasi, alcuni giochi di combinatoria e, sotto la categoria dei problemi di *decimazione*, si trovano il *problema di Giuseppe* e la categoria generale di problemi *Turchi e Cristiani*.

La seconda sezione è una rassegna di paradossi aritmetici: sono così evidenti, afferma l'autore, che nel preparare la prima e la seconda edizione dell'opera pensò che «non fossero meritevoli di essere pubblicate», eppure alla fine sono rimasti perché «alcuni corrispondenti hanno espresso un'opinione contraria». È questo un esempio divertente del fatto che vi è un pubblico in parte silente che è la controparte degli autori, e che pure, almeno a partire dall'Ottocento con lo sviluppo delle riviste divulgative e dell'editoria di massa, trova il modo di manifestarsi. Ci sono poi alcuni problemi aritmetici che «possono servire ad illustrare il fatto, che la risposta a una questione aritmetica è frequentemente diversa da quella che un lettore superficiale può supporre». Si trovano tra questi il *problema del salario*, alcuni problemi di probabilità e combinatoria, il *problema dello scrutinio*, il *problema degli esploratori*. Quest'ultimo è:

> un'altra questione comune [che] si connette con la massima distanza in un deserto, che potrebbe essere esplorata da una colonia di frontiera con l'aiuto di una parte di *n* esploratori, ciascuno essendo capace di portare delle provvigioni, che basterebbero per un uomo per *a* giorni. La risposta è che l'uomo, che percorre la maggior distanza occuperà $\frac{na}{n+1}$ giorni prima di ritornare al suo punto di partenza. Se durante il loro viaggio essi possono far depositi, il viaggio più lungo possibile occuperà $\frac{1}{2}a\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$ giorni. [ivi, p. 28]

Con questo Ball termina la storia dei problemi aritmetici meritevoli di essere citati, la maggior parte dei quali «o sono dovuti a Bachet o furono raccolti da lui nei suoi *Problèmes* classici», ma ci sono anche «altri problemi di maggiore interesse», di cui «un esempio sarà sufficiente», ovvero il noto *problema dei pesi di Bachet*:

> Uno dei più difficili problemi proposti da Bachet è quello per determinare il numero di pesi da impiegare per pesare qualunque numero intero di libbre da 1 a 40 libbre incluse. Bachet diede due soluzioni, cioè: 1ª la serie dei pesi di 1, 2, 4, 8, 16 e 32 libbre; 2ª la serie di pesi di 1, 3, 9 e 27 libbre. [ivi, p. 28]

---

[38] Questo problema ricreativo è stato proposto anche all'interno dei quesiti della proposta Con-corso Matematica per tutti che verrà discussa nella Seconda Parte della tesi, sotto altra forma:
Su una pagina sbiadita di un vecchio libro si legge: per ottenere il numero 100, usando tutte le cifre da 1 a 9, senza ripeterne mai alcuna, puoi scrivere: 100 = 95 + 4 + ... + ...
Al posto dei puntini, ci sono delle frazioni ma non si riesce a leggerle. Quali sono le due frazioni?
La coppia (95; 4) fa il paio con (50; 49) di Ball, ma i due i termini frazionari possono essere, oltre a quelli proposti dal britannico, anche $\frac{1}{8}; \frac{63}{72}$ oppure $\frac{3}{7}; \frac{16}{28}$.

Il ragionamento illustrato da Bachet «non prova che il suo risultato sia unico o che esso dia il minor numero possibile di pesi richiesti». Ball riporta lo studio del maggiore Percy Alexander MacMahon (1854-1929)[39] che affronta il caso generale del problema di Bachet, determinando «tutte le possibili serie dei pesi (non necessariamente disegnati), che ci mettono in grado di pesare qualunque numero intero di libbre da 1 a *n* incluso».

L'ultima parte del capitolo è dedicata ai problemi di aritmetica superiore e spazia dalle proprietà di numeri primi, perfetti, di Mersenne alle congetture di Goldbach, di Lagrange e all'ultimo teorema di Fermat[40].

Il secondo capitolo dedicato ad alcune questioni geometriche costituisce una novità: nessuno fino ad allora aveva raccolto in una categoria a sé una collezione così ricca di questioni.

> La prima parte del capitolo è dedicata alle questioni che sono della specie delle proposizioni formali; l'ultima parte contiene una descrizione di diverse comuni astuzie e giuochi, che i più antichi scrittori avrebbero chiamato geometrici, ma che il lettore d'oggi può omettere senza scapito. [...] Inoltre (con qualche eccezione) escludo ogni menzione dei numerosi paradossi geometrici, che dipendono semplicemente dalla inabilità dell'occhio di paragonare giustamente le dimensioni delle figure, quando la loro relativa posizione sia cambiata. Questa apparente illusione non implica la facoltà ragionante della coscienza, ma si fonda sull'inesatta interpretazione con la mente delle sensazioni, derivate dagli occhi, ed io non considero tali paradossi come facenti parte del dominio della matematica. [ivi, p. 39]

Esclude i «paradossi geometrici che dipendono semplicemente dalla inabilità dell'occhio» e inizia la trattazione a partire da alcune *fallacie geometriche* ossia dimostrazioni che «conducono ad ovvi impossibili risultati, che forse riusciranno divertenti per coloro a cui sono nuovi»: egli lascia la scoperta degli errori all'ingegno dei suoi lettori! Alle fallacie seguono tre paradossi geometrici - le «eccezioni» di cui parlava nell'introduzione – e il terzo è il noto esempio di «come facilmente l'occhio può essere ingannato»:

> io ricorderò la ben nota dimostrazione «che un quadrato di carta suddiviso come una scacchiera in 64 piccoli quadrati può essere tagliato in quattro pezzi, che messi insieme formano una figura contenente 65 di tali quadratini»[41] [ivi, p. 47]

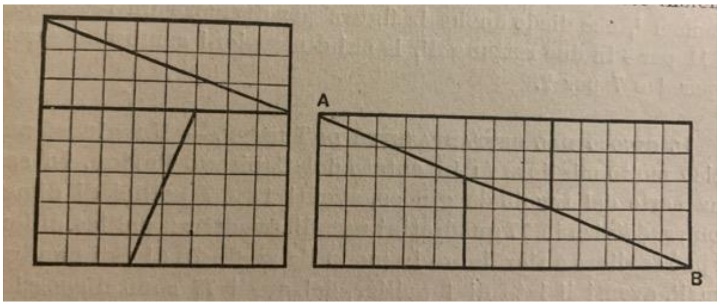


Figura 1.4 - L'immagine del *terzo paradosso*, nella quarta edizione di *Mathematical recreations and problems of past and present times* di Rouse Ball (1905, tr. it. 1910, p. 47)

---

[39] Si veda per maggiori dettagli MacMahon 1886.
[40] Il teorema è stato dimostrato solo in tempi recenti dal britannico Andrew Wiles nel 1994.
[41] Lo stesso Ball riporta in nota a pag. 47: «Io non conosco chi ha scoperto questo paradosso. Esso è dato in diversi libri moderni, ma io non posso trovare una relazione più antecedente ad essa che una del prof. G.H. Darwin, *Messengers of Mathematics*, 1877, vol. VI, p. 87». Sir George Howard Darwin (1845-1912) fu un astronomo britannico, quinto figlio di Charles Darwin.

Il paradosso illustrato nella Figura 1.4 è piuttosto celebre ed è arrivato fino ai giorni nostri in questa versione e in altre analoghe, dove si modificano solamente le superfici delle due figure che differiscono sempre di un'unità quadrata per l'impercettibile differenza di inclinazione dei due lati "obliqui". Viene presentato anche un gioco analogo (inventato da un certo capitano Turton), denominato *gioco del settantasette*, dove è possibile tagliare una parte del tavolo di gioco rettangolare, di dimensioni 11 e 7 pollici per 77 quadratini uguali con un pollice di lato, e riordinarla in modo tale da «avere 78 di tali quadrati eguali, dei quali 77 sono disposti in un rettangolo delle stesse dimensioni, come il rettangolo primitivo, da un lato del quale si disegna un altro quadratino».

Prosegue con il noto *problema delle cartine geografiche e dei quattro colori*: entra nel dettaglio di alcuni studi e tentativi di soluzione al riguardo, ad opera di Augustus De Morgan, Arthur Cailey, Peter Tait, James Clerk Maxwell e Alfred Bray Kempe[42].

Le questioni geometriche sono completate da «alcuni giuochi od astuzie, che dipendono principalmente dalla relativa posizione delle cose». Tuttavia, Ball dichiara che ritornerà su questi divertimenti più nel dettaglio nel capitolo 4, «poiché richiedono un considerevole uso dell'aritmetica e dell'algebra». Così nel capitolo 2 anticipa quesiti riguardanti i *quadrati magici* e il *problema* (impossibile!) *dei 36 ufficiali di Eulero* (si collocano nel paragrafo *giuochi statici di posizione*), il gioco del *tris o tre in linea* e i *lavori di mosaico*. Sul gioco del *tris* e sui lavori di mosaico, egli ricorda che il matematico James J. Sylvester (1814-1897) propose diverse varianti più complesse, come ad esempio il problema dei quadrati *anallagmatici*, che consisteva nel formare dei quadrati tali che in ogni linea ed ogni colonna il numero dei cambiamenti di colore e il numero delle permanenze fosse costante, utilizzando solamente mattonelle quadrate bianche e nere.

Ball chiama *giochi dinamici di posizione* quei giochi in cui «i movimenti possibili sono limitatissimi» e che si distinguono dai giochi di scacchiera (solitario, dama, scacchi...), nei quali il numero di movimenti dei pezzi è talmente grande che «ogni analisi matematica di essi diviene troppo intricata da potersi trattare compiutamente». Tra questi si annoverano: i problemi dell'*incrociamento dei treni*, problemi di combinatoria come il numero di strade possibili in una scacchiera, il *problema del battello* (*lupo, capra e cavolo* oppure *tre spose per tre sposi*), problemi di *geodetiche* (si chiede di trovare la via più breve da un punto a un altro su una superficie curva, ad esempio *la vespa e la mosca*), problemi con *gettoni da ordinare in una fila*, problemi *in una*

[42] Quest'ultimo inviò all'«American Journal of Mathematics» la prima dimostrazione "errata" (Kempe 1879), che costituì la base della dimostrazione ottenuta nel 1977, grazie a un complesso algoritmo informatico, da parte di Kenneth Appel e Wolfgang Haken, due matematici dell'Università dell'Illinois.

scacchiera con gettoni o pedine (si pensi al *problema del cavaliere* o al *problema di Guarini*[43]). Per ultimi si accenna ai giochi con fili o cordicelle, con stecchini o fiammiferi e infine si presentano gli *anelli paradromici*.

Il terzo capitolo è dedicato alle questioni meccaniche: problemi di cinematica e idrodinamica collegati a un contesto più fisico che matematico.

Nel quarto capitolo Ball discute la teoria matematica di «certi divertimenti matematici e giuochi più comuni» che «si potevano trattare nei due primi capitoli; ma giacché la maggior parte di essi riguardano o separatamente o insieme la geometria e l'algebra, è piuttosto più conveniente trattarli a parte dai problemi ed astuzie, che già sono state descritte». Vengono discussi *il giuoco del 15, la torre di Hanoï,* gli *anelli cinesi,* il *problema delle otto regine*, il *problema delle 15 scolarette* (o *di Kirman)*[44] e una raccolta di problemi diversi riguardanti i mazzi di carte. Per quanto riguarda i divertimenti fatti con un mazzo di carte da gioco si tratta di ricreazioni nelle quali si chiede di ordinare il mazzo in modo da collocare una carta in una posizione ben stabilita, ovvero problemi che dipendono dal modo speciale in cui vengono disposte le carte. Presenta inoltre, di seguito: *le disposizioni in linee e in colonne, la determinazione di una coppia di carte scelte* fra $\frac{1}{2}n(n+1)$ *coppie note, il problema di Gergonne* e *il gioco della trappola.* Si trova tra questi il noto gioco di Bachet *Mutus dedit nomen cocis*[45], dove si chiede di individuare una coppia di carte all'interno di 20 disposte su quattro righe di cinque carte ciascuna[46].

Il quinto capitolo è dedicato ai quadrati magici – si ricordi che questo filone autonomo sarà ripreso da Smith – studiati in tutte le loro forme, proponendo diversi metodi per costruirli e risolverli e anche alcuni problemi collegati ad essi come il già citato *problema degli ufficiali di Eulero* o i quadrati magici costruiti con pezzi del domino, monete o francobolli.

L'ultimo capitolo, dedicato ai temi che sono all'origini dei grafi, comincia con il celebre *problema dei ponti di Eulero*: da qui vengono dedotte le teorie sui *Labirinti* e sui *Tracciati geometrici* (i *Grafi* o *Alberi geometrici*). Vengono trattate, infine, alcune questioni connesse con la teoria dei grafi, dove si propone di

---

43 Paolo Guarini da Forlì (1464-1520), in un manoscritto del 1512, riporta questo problema che consiste nello scambiare di posto due cavalli bianchi e due cavalli neri a partire da una certa posizione iniziale in una scacchiera 3 x 3. Il problema verrà ripreso in Dudeney 1917.

44 Il problema consiste nel disporre 15 oggetti in differenti serie di terne, che soddisfano certe condizioni date. È stato per la prima volta enunciato nel 1850 dal Reverendo Thomas Kirkman (1806-1895), matematico inglese nonché rettore di una parrocchia nel Lancashire, sul periodico «Lady's and Gentleman's Diary». Scrive Ball: «Lo si presenta generalmente sotto questa forma: Una direttrice di un collegio aveva l'abitudine di condurre tutti i giorni a passeggio le sue quindici allieve, disponendole su cinque righe di tre ragazze ciascuna. Si domanda come essa deve disporle, affinché ciascuna delle allieve si trovi successivamente una sola volta in compagnia di ciascuna delle sue compagne» [Ball 1905 tr. it. 1910, p. 120]. Ball presenta tre diversi metodi analitici per risolvere il problema che può essere comunque trattato anche con metodi geometrici.

45 Si veda a tal proposito, il post nel sito *Base cinque. Appunti di Matematica ricreativa* (di Gianfranco Bo) http://utenti.quipo.it/base5/latomagi/mutus.htm

46 Ball presenta anche il problema analogo con una terna di carte all'interno di 24 disposte su quattro righe di sei carte ciascuna, con la frase associata *Lanata levete livini novoto*.

determinare un percorso che passi solo una volta per tutti i nodi di una data figura: in particolare, due casi speciali consistenti nel *gioco di Hamilton* (o *Icosian Game*) e nel già menzionato *salto del cavaliere* negli scacchi.

Ahrens: «Mathematische Unterhaltungen und Spiele»

Il matematico tedesco Wilhelm Ahrens organizza i materiali presentati nella sua opera *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* (1901) in 23 capitoli (si vedano Tavola 1.6 e Tavola 1.7) senza però considerare grandi aree della matematica. Pochi capitoli si riferiscono a un contenuto matematico (come sistemi di numerazione e analysis situs), mentre la maggior parte dei titoli sono riconducibili a ricreazioni al modo di Lucas, problemi ricreativi o giochi matematici "famosi" che hanno – come si è visto – una letteratura propria e anche degli studi specifici a essi collegati. L'opera imponente di Ahrens include tutto ciò che è stato già discusso in Lucas e in Ball e lo completa sistematicamente e con ricchezza di riferimenti storico-bibliografici. Più capitoli sono dedicati ai giochi matematici.

Nel capitolo I, dedicato agli "attraversamenti difficili", si ritrovano i grandi classici come *il lupo, la capra e il cavolo*, *le tre coppie di sposi* o la versione dei *tre padroni e dei tre schiavi*. Il capitolo II è invece dedicato al lavoro del matematico e fisico scozzese Peter Tait (1831-1901) su grafi e nodi. Nel capitolo III si trovano tutti i rompicapo riconducibili alle rappresentazioni dei numeri nelle diverse basi e, in particolare: la *torre di Lucas* (più comunemente nota come *torre di Hanoi*), il *Baguenaudier* (noto anche come *anelli cinesi* o *di Cardano*, *ago del diavolo*), il *problema dei pesi di Bachet* e il *problema di Gergonne dei mazzi di carte*. Nel capitolo IV sono presenti tutti i problemi di trasferimento/spostamento, mentre nel V ci sono i problemi di tassellazione. Il capitolo VI è intitolato "Alcune conversazioni minori" e contiene alcuni giochi matematici con le carte, tra cui il già menzionato *Mutus dedit nomen cocis*. Nel capitolo VII si parla di giochi da tavolo, in particolare del gioco del mulino o filetto e del gioco delle pecore e del lupo. Il capitolo VIII è dedicato alle diverse versioni del cosiddetto "solitario classico", noto in Italia come *il solitario della Bastiglia*, o *Peg Solitaire* nella versione inglese (da non confondere con il solitario di carte italiano). Nei capitoli IX, X e XI l'attenzione si sposta alla scacchiera e sui problemi a essa collegati, come il noto *problema delle otto regine* (qui proposto anche nella versione con *cinque regine*) e il *salto del cavaliere*, per il quale vengono proposti anche diversi metodi risolutivi a opera di italiani, come Volpicelli, Collini e Ciccolini, anche questi presenti nell'opera di Ball. Il capitolo XII è come di consueto sui quadrati magici, mentre il XIII sposta l'attenzione su problemi analoghi, collegati ai quadrati greco-latini di Eulero, con il più volte citato *problema dei 36 ufficiali*. Il quattordicesimo capitolo riguarda i problemi di organizzazione, spesso relativi al calcolo combinatorio come le passeggiate di n^2 persone a gruppi di n o il problema citato *delle 15 scolarette di Kirkman*. Il *problema di Giuseppe* è il protagonista del capitolo XV, mentre nel XVI sono presenti alcuni rompicapo dall'Analysis situs, dai sistemi lineari ai grafi chiusi passando per poliedri e diagrammi ad albero. Sui grafi si torna ancora nel capitolo XVII dedicato al famoso problema dei *ponti di*

Eulero e ai percorsi per attraversare labirinti. Nel diciottesimo capitolo si descrive il gioco del *dodecaedro di Hamilton*, mentre nel capitolo IX è la volta del *problema dei colori nelle cartine geografiche*. Il capitolo XX è dedicato al famoso *gioco del 15*, noto anche come *Boss Puzzle* e il capitolo XXI riguarda il gioco del domino. Gli ultimi due capitoli, infine, si occupano dei problemi relativi al calendario e al tempo e delle costruzioni geometriche realizzate attraverso le piegature della carta.

Capitolo I. Attraversamenti difficili.	**Capitolo VIII. Solitär o Nonnenspiel [Peg Solitaire o Solitario della Bastiglia]**
1. Lupo, capra e cavolo.	1. Regole del gioco. Notazione
2. Le tre coppie di sposi	2. Soluzioni di Busschop e Reifs
3. Attraversamenti con una barca più grande	3. Simmetria e reciprocità delle soluzioni
4. Un'isola nel fiume	4. Regole estese del gioco di Reifs. Criteri di irresolubilità
5. Tre padroni e tre schiavi	5. Il solitario a 33 buche
	6. Mosse triple
Capitolo II. Un problema di Tait [nodi, grafi]	7. Il solitario a 37 buche
	8. Il solitario a 41 buche
Capitolo III. Sistemi di numerazione	
1. Diversi sistemi di numerazione	**Capitolo IX. Il problema delle otto regine**
2. Il sistema binario	1. Introduzione storica.
3. Giochi e compiti vari	2. Il compito sulla scacchiera di area 16
I. Indovinare un numero immaginario	3. La scacchiera di area 25. Soluzioni correlate. Area 36
II. Un'immagine che qualcuno pensava di poter indovinare	4. I casi finora esaminati. L'aspetto dei vari campi e colori nelle soluzioni
III. La torre di Lucas ("Torre di Hanoï")	5. Metodi per trovare le soluzioni
IV. Il Baguenaudier	6. Le soluzioni doppiamente simmetriche
4. Il problema dei pesi di Bachet	7. Numero di soluzioni per i corrispondenti problemi di torre e alfiere
5. Il problema del mucchio di Gergonne	Allegato. Numero di mosse dei vari pezzi
Capitolo IV. Problemi di trasferimento	**Capitolo X. Le 5 regine sulla scacchiera**
1. La forma più antica del problema e le soluzioni di Bachet	
2 Metodi generali per la divisione in due parti	**Capitolo XI. Il salto del cavaliere**
3. Condizioni di risolvibilità	1. Introduzione. Definizioni e premesse
4. Divisione secondo qualsiasi rapporto	2. Un compito di Guarini
5. Tre parti	3. Il salto del cavaliere di Eulero
	4. Il metodo di Warnsdorf
Capitolo V. Tassellazioni	5. Salti del cavaliere su scacchiere di area diversa
	6. Metodi di Volpicelli e Minding
Capitolo VI. Alcune conversazioni minori	7. Metodo di Collini
1. Un gioco bachetiano	8. Metodo di Vandermonde.
2. Mutus dedit nomen cocis	9. Metodo di Ciccolini
3 Un trucco con le carte di Monge	10. Metodo di Frost
4. Zio e nipote	11. Salti magici del cavaliere
	12. Salti cubici del cavaliere
Capitolo VII Giochi da tavolo	13. Regolamento dei numeri
1. Teoria matematica dei giochi da tavolo	14. Il problema del movimento sulla scacchiera degli altri pezzi
2. La forma più semplice del gioco del mulino	
3. Pecora e lupo	

Tavola 1.6 – L'indice dettagliato dei capitoli I-XI di *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* di Ahrens [traduzione italiana mia]

Capitolo XII. Quadrati magici	**Capitolo XVII. Ponti e labirinti**
1. Introduzione storica	1. Problema del ponte di Eulero
2. Quadrati magici di 9 e 16 caselle	2. Labirinti
3. Quadrati con numero dispari di caselle	3. Percorrere tutte le strade possibili di un labirinto
4. Altri metodi per numero dispari di caselle	
I. Un metodo usato dagli indiani	**Capitolo XVIII. Il gioco del dodecaedro hamiltoniano**
II. Il "metodo del terrazzo" di Bachet	1. Storia e natura del gioco
III. Il metodo del cavaliere di Moschopulos	2. Cammini senza regole sull'ordine dei nodi
IV. Metodo di J. Horner e H. Scheffler	3. Cammini con nodi di partenza stabiliti
5. Quadrati con numero pari di caselle	4. Ulteriori compiti di Hamilton
6. Quadrati di Stifel	5. Il gioco dell'icosaedro. I restanti poliedri regolari
7. Integrazioni	
	Capitolo XIX. Il problema dei colori nelle cartine geografiche
Capitolo XIII. Quadrati di Eulero	1. Natura e storia del problema
1. Il problema dei 36 ufficiali	2. Regioni vicine su superfici semplicemente collegate
2. Quadrati di Gauss	3. Regioni vicine sulla superficie ad anello
	4. Una generalizzazione del problema della cartina
Capitolo XIV. Problemi di organizzazione	5. Una proposizione di Tait
Sezione I. Disposizioni varie	
1. Disposizioni circolari	**Capitolo XX. Il Boss-Puzzle o il gioco del quindici**
2. Passeggiate a coppie e abbinamento dei partecipanti ai tornei di scacchi	1. Storia, letteratura e descrizione del gioco
3. Passeggiate di n^2 a gruppi di n	2. Il puzzle elementare. Risolubilità e irresolubilità
Sezione II. Problema delle scolarette di Kirkman	3. Teoria matematica del gioco
1. Introduzione. Problemi correlati	4. Il puzzle con barriere
2. Soluzioni al problema di Kirkman	5. Il puzzle articolato
3. La domanda di Sylvester	
4. Estensioni e generalizzazioni	**Capitolo XXI. Il gioco del domino**
	1. Introduzione. Il gioco con 28 tessere
Capitolo XV. Il gioco di Giuseppe	2. Catene di domino contigue
1. Storia e natura del gioco	3. Catene di 6 e 15 tessere
2. Il compito inverso	4. Metodo di Tarry
3. Righe superiori	5. Catene di 28 tessere
4. La soluzione di Busche	
5. Il metodo di Schubert	**Capitolo XXII. Ore e calendario**
	1. Anni comuni e bisestili
Capitolo XVI. Alcuni dall'Analysis situs	2. Calendario perpetuo
1. Sistemi lineari	3. Calcolo della data di Pasqua
2. Alberi	4. L'inizio del secolo
3. Un po' di morfologia dei poliedri	
4. I sistemi lineari ad albero in chimica	**Capitolo XXIII. Costruzioni geometriche piegando la carta**
5. Cerchi chiusi	

Tavola 1.7 – Indice dettagliato dei capitoli XII-XXIII di *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* di Ahrens [traduzione italiana mia]

König: Mathematikai mulatságok

Un anno dopo l'uscita dell'opera di Ahrens uscì a Budapest il primo volume dei due che compongono l'opera *Mathematikai mulatságok* (Ricreazioni matematiche, 1902-1905) del giovane matematico ungherese Dénes König (1884-1944). Quest'opera è stata approfonditamente analizzata da Mitsuko Wate-Mizuno (2010, 2014) che ha mostrato lo stretto legame che quest'opera ha con gli interessi pedagogici tipici della comunità matematica ungherese dell'epoca, l'influsso dei lavori di Lucas e di Ahrens e soprattutto il legame con il suo contributo decisivo all'affermazione della teoria dei grafi come vera e propria branca delle matematiche, grazie al suo libro *Theorie der endliche und unendliche Graphen* (1936). Nella Tavola 1.8 si possono vedere i 15 capitoli-ricreazioni che compongono l'opera, che si struttura in modo analogo ai volumi di Lucas, nella traduzione di Wate-Mizuno.

Volume 1	**Volume 2**
I Large numbers.	I About mathematical probability.
[Ways of distinguishing and understanding large numbers.]	II About the binary numeral system.
II Interesting numbers and results.	III The four colour map. [The four colour problem.]
[Cyclic numbers, numbers with repeated digits,	IV The bridges of Königsberg
perfect numbers, amicable numbers pair,	V Daily walk of schoolgirls. [Kirkman's schoolgirl problem.]
Mersenne numbers and so on.]	VI Tait's problem and similar problems.
III Guessing numbers.	[re-arranging positions of two kinds of coins.]
[Guessing the initial numbers	VII Positions on a ring.
from the results of operations.]	VIII Problems of traversing, pouring and railway
IV Magic squares	IX Trivial matters. (Perpetual calendar,
V Mathematical errors. [Incorrect proofs in arithmetic	race-calculation, surprising results.)
and geometric problems.]	
VI Decomposition and recomposition of plane figures.	
[Geometric puzzles.]	

Tavola 1.8 – Titoli dei capitoli di *Ricreazioni matematiche* (1902-1905, in ungherese) di D. König, nella traduzione inglese di Wate-Mizuno con indicazioni sui contenuti

Kordemsky: «Matematicheskaya smekalka»

L'opera di Boris Kordemsky, *Matematicheskaya smekalka* (1956), destinata ad avere una ampia diffusione dentro e fuori l'Unione Sovietica e ancora oggi ristampata, è ancora più decisamente volta all'insegnamento delle opere pubblicate da Lucas e König: il materiale che è incluso non cerca l'esaustività, come nel caso di Ahrens, ma compie delle scelte dettate dall'interesse matematico dei quesiti, da interessi pedagogici – su cui torneremo nel §2.1.2 – e dallo sforzo per catturare l'interesse del pubblico in generale e coinvolgerlo nei passatempi matematici. L'opera presenta 359 problemi ricreativi e giochi o quesiti legati a giochi (domino e dadi) organizzati in 15 capitoli che rispondono a uno sforzo comunicativo, incentrato sul colpire l'immaginazione, sulla varietà per i cultori e sul vincere la paura e i pregiudizi per i timorosi, sulla storia e il mistero e sulla vita quotidiana.

1.	Problemi divertenti	9.	Matematica (quasi) senza calcoli
2.	Problemi complessi	10.	Giochi e trucchi matematici
3.	Geometria con i fiammiferi	11.	La divisibilità
4.	«Misurare sette volte prima di tagliare»	12.	Somme incrociate e quadrati magici
5.	L'ingegno trova sempre il modo di esprimersi	13.	Curiosità e sfide intriganti
6.	Il domino e i dadi	14.	Numeri antichi, ma sempre giovani
7.	Le proprietà del nove	15.	Capacità nel lavoro
8.	Con e senza algebra		

Tavola 1.9 - Indice di *Matematicheskaya smekalka* (1954), nella versione italiana tradotta a partire dall'inglese. Il capitolo 15 non fu incluso nelle edizioni americane: in esso Kordemsky si soffermava su pochi esempi tratti da compiti lavorativi, svolti dai "lavoratori dei campi e delle fabbriche"

Schaaf: «Bibliography of Recreational Mathematics»

Un approccio incentrato sulla "catalogazione" e raccolta bibliografica di quesiti, opere, e autori – seppure con attenzione agli aspetti storici e alle fonti – è stato proseguito nel dopoguerra da William L. Schaaf (1898-1992), docente del Brooklyn College. Nel 1955 quasi in contemporanea con l'uscita della celebre opera di Kordemsky in Unione Sovietica, egli pubblicava la prima versione di una voce «number game» redatta per l'*Encyclopedia Britannica* e il primo volume di una *Bibliography of Recreational Mathematics* pubblicata dall'associazione di docenti statunitensi National Council of Teachers of Mathematics:

> The late G. H. Hardy once observed that there are few more "popular" subjects than mathematics. His contention is amply borne out by the universal interest manifested in mathematical recreations for over 2000 years, ranging from the loculus of Archimedes and the talisman magic squares of the early Chinese to the cryptanalysis and topological recreations of modern times. One need only recall how testament problems, ferrying problems, coin problems, problems of pursuit and problems of arrangements have come down through the ages, ever dressed anew, yet always the same old friends. Labyrinths, dissections, acrostics, tangrams, palindromes, and so on, are likewise virtually ageless. Hence it should occasion little surprise that an enormous body of literature has arisen in the last 300 years. [...]
>
> This guide will serve as a place to begin to look for source materials. It will help the student pursuing his mathematical studies in high school or college; the mathematics club looking for program and project material; the teacher gathering human interest or motivation material; the more advanced student engaged in research; the amateur mathematician or the proverbial layman happily engaged in that most delectable of all activities a hobby or a recreation. May following these trails afford the reader as much pleasure as it has been for me to map them out for him. [Schaaf 1970, prefazione]

Nella voce sull'*Encyclopedia Britannica* mette insieme la dimensione evolutiva e storica di questo patrimonio culturale con la comprensione della sua configurazione attuale. Egli cerca di far comprendere al lettore come si sono sviluppati i filoni di matematica ricreativa arrivati fino ai giorni nostri; quali sono i giochi e le ricreazioni matematiche più antiche e come si sono sovrapposti nuovi filoni nella tradizione europea; perché temi che erano parte delle ricreazioni matematiche in età moderna non sono più considerati matematica ricreativa. Si sottolinea come facciano parte della storia antica fondamentalmente «due tipi di problemi, quelli che implicavano la manipolazione degli oggetti e quelli che richiedevano il calcolo». Il primo richiedeva poca o nessuna abilità matematica, semplicemente ragionamento e ingegno, come ad esempio i travasi, i problemi di attraversamenti difficili, i trucchi con le carte o i problemi di pesate.

> A typical example of the former is how to measure out one quart of a liquid if only an eight-, a five-, and a three-quart measure are available. Difficult crossings problems are exemplified by the dilemma of three couples trying to cross a stream in a boat that will hold only two persons, with each husband too jealous to leave his wife in the company of either of the other men. Many variants of both types of problems have appeared over the years. [voce *number game*, Encyclopedia Britannica]

Esempi di problemi che coinvolgevano il calcolo erano *Indovina un numero* o *i problemi della scacchiera*.

Nel fiorire di contributi tra la seconda metà del XIX secolo e la prima del XX secolo sono particolarmente significativi i *mechanical puzzles* (rompicapo meccanici tridimensionali) dei Loyd (entrambi di nome Sam, padre e figlio) che ne realizzarono almeno 10.000. I *mechanical puzzles* sono molto diversi tra loro: alcuni necessitano solamente di una certa dose di destrezza, altri di intuizione e pensiero logico, altri di applicazione sistematica di idee o strumenti matematici, come il celebre cubo di Rubik.

Già in questa voce egli presenta un elenco di grandi filoni:

> cryptograms; recreations involving modular arithmetic, numeration bases, and number theory; graphs and networks; lattices, group theory; topological curiosities; packing and covering; flexagons; manipulation of geometric shapes and forms; combinatorial problems; probability theory; inferential problems; logical paradoxes; fallacies of logic; and paradoxes of the infinite. [voce *number game*, Encyclopedia Britannica]

che riprenderà nella sua bibliografia, arrivata a 4 volumi nell'ultima edizione 1970-78 (Schaaf 1970, 1973):

> Schaaf does impose a classification by means of the chapter headings: arithmetical recreations, number theory as recreation, geometric recreations, topological recreations, magic squares and related configurations, Pythagorean recreations, recreations in antiquity, combinatorial recreations, manipulative recreations, miscellaneous recreations, mathematics in related fields, and recreations in the classroom [Trigg 1978, p. 4]

Singmaster: Sources in recreational mathematics – An annotated bibliography

David Singmaster (n. 1939), studioso di origine statunitense, professore di matematica della London South Bank University, è noto internazionalmente per la pubblicazione (nel 1986) e il costante aggiornamento (fino al 19 marzo 2004) di un'opera-catalogo *Sources in recreational mathematics – An annotated bibliography*, oggi disponibile online (Singmaster 2004). Nel capitolo da lui redatto sulla Matematica ricreativa per la *Companion Encyclopedia of the Mathematical Sciences* curata da Ivor Grattan-Guinness ha descritto il suo lavoro come storiografico più ancora che come bibliografico: «This more historical than Schaaf's work, and attempts to trace the history of each topic by selecting and briefly describing the important material» (Singmaster 1994, p. 1574). Tuttavia, proprio i contenuti di quel capitolo mostrano i limiti del suo approccio e la discontinuità rispetto agli studi prettamente storici a lui precedenti.

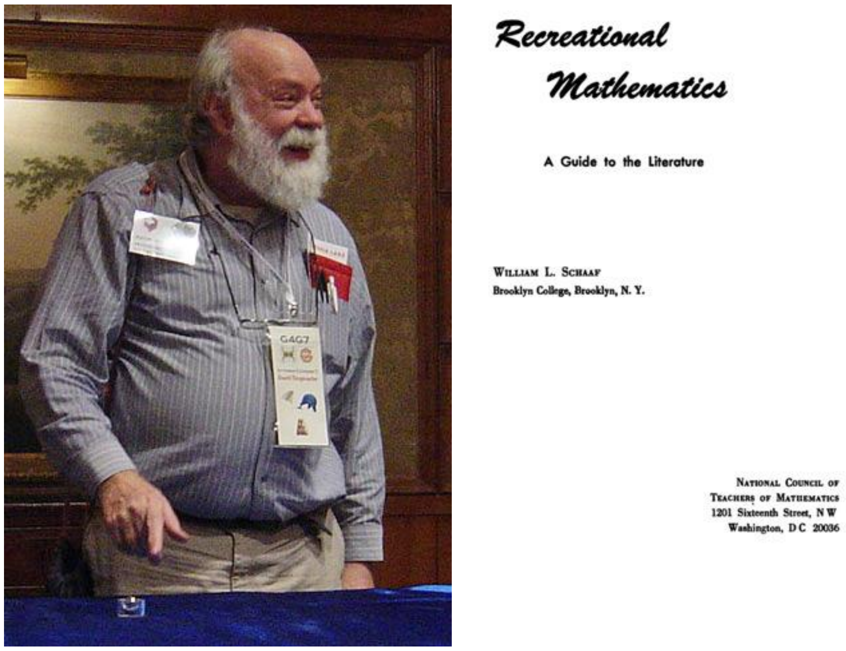


Figura 1.5 - A sinistra, David Singmaster ad Atlanta nel 2006. A destra, la copertina della prima edizione del volume 1 della bibliografia di matematica ricreativa di Schaaf (1955; la quarta edizione fu pubblicata nel 1970).

Singmaster rappresenta in qualche modo la continuazione del lavoro intrapreso da Ahrens cent'anni prima, puntando però all'esaustività e al continuo aggiornamento (entrambe caratteristiche rese possibili almeno in linea di principio dal formato digitale). Egli, quindi, offre una compilazione bibliografica di fonti primarie, le quali costituiscono un materiale grezzo per le analisi storiche da più punti di vista. La sua opera si caratterizza per il rigore filologico nell'individuare l'origine (quando possibile) e la storia di ogni singolo gioco o problema. D'altra parte, la forma catalografica lo costringe in qualche modo a individuare i criteri del ricreativo, accentuando la separazione della matematica ricreativa dal corpo complessivo della matematica: si tornerà su questo punto nel §1.1.3. Le informazioni storiche relative a singoli enigmi o giochi possono aggiungere fascino a quello già insito in essi, ma cristallizzano nel lettore comune la menzionata visione catalogatrice, aggiungendo semplicemente accurate note storiche alle "schede".

Egli struttura il catalogo, oggi consultabile online, in 11 capitoli. I primi tre capitoli sono dedicati alle note biografiche dei protagonisti della matematica ricreativa e alle indicazioni bibliografiche di raccolte di matematica ricreativa. Dal quarto all'undicesimo capitolo sono invece presentati 8 ambiti della matematica ricreativa, di cui il primo è quello dei giochi matematici *Mathematical Games*, ma gli altri sette suddividono i problemi ricreativi secondo le branche della matematica: Combinatoria, Geometria, Aritmetica e Teoria dei Numeri, Probabilità, Logica, Fisica e Topologia. Ciascun ambito è suddiviso a sua volta in numerose sezioni e sottosezioni: nella Tavola 1.10 si riporta un esempio relativo al capitolo *7. Arithmetic & Number-Theoretic Recreations*, per rendere l'idea, da una parte, della ricchezza e del dettaglio di questo lavoro, e dall'altra, evidenziare la difficile fruibilità per un utilizzo di questo materiale nella didattica.

A. Fibonacci Numbers

B. Josephus or Survivor problem

C. Egyptian Fractions

D. The First Digit Problem

E. Monkey and Coconuts Problems

- E.1. Versions with all getting the same

F. Illegal operations giving correct result

G. Inheritance problems

- G.1. Half + Third + Ninth, Etc.
- G.2. Posthumous Twins, Etc.

H. Division and sharing Problems - Cistern problems

- H.1. With Growth - Newton's Cattle Problem
- H.2. Division of casks
- H.3. Sharing unequal resources - Problem of the pandects
- H.4. Each Doubles Others' Money To Make All Equal, Etc.
- H.5. Sharing Cost Of Stairs, Etc.
- H.6. Sharing A Grindstone
- H.7. Digging Part Of A Well.

I. Four Fours, Etc.

- I.1. Largest Number Using Four Ones, Etc.

J. Salary Puzzle

K. Congruences

- K.1. Casting Out Nines

L. Geometric Progressions

- L.1. 1 + 7 + 49 + ... & St. Ives
- L.2. 1 + 2 + 4 + ...
  - L.2.A. Chessboard Problem
  - L.2.B. Horseshoe Nails Problem
  - L.2.C. Use Of 1, 2, 4, ... As Weights...
- L.3. 1 + 3 + 9 + ... And Other Systems Of Weights

M. Binary System And Binary Recreations

- M.1. Chinese Rings
- M.2. Tower Of Hanoï
  - M.2.A. Tower Of Hanoï With More Pegs
- M.3. Gray Code
- M.4. Binary Divination
  - M.4.A. Ternary Divination
  - M.4.B. Other Divinations Using Binary Or Ternary
- M.5. Loony Loop = Gordian Knot
- M.6. Binary Button Games

N. Magic Squares

R. "If I Had One From You, I'd Have Twice You"

- R.1. Men Find A Purse And 'Bloom Of Thymaridas'
- R.2. "If I Had 1/3 Of Your Money, I Could Buy The Horse"
- R.3. Sisters And Brothers
- R.4. "If I Sold Your Eggs At My Price, I'd Get ...."

S. Dilution And Mixing Problems

- S.1. Dishonest Butler Drinking Some And Replacing With Water
- S.2. Water In Wine Versus Wine In Water

T. Four Number Game

U. Postage Stamp Problem

V. Xy = Yx And Iterated Exponentials

W. Card Piling Over A Cliff

X. How Old Is Ann? And Other Age Problems

Y. Combining Amounts And Prices Incoherently

- Y.1. Reversal Of Averages Paradox
- Y.2. Unfair Division

Z. Missing Dollar And Other Erroneous Accounting

Aa. Negative Digits

- Aa.1. Negative Bases, Etc.

Ab. Perfect Numbers, Etc.

Ac. Cryptarithms, Alphametics And Skeleton Arithmetic

- Ac.1. Cryptarithms: Send + More = Money, Etc.
- Ac.2. Skeleton Arithmetic: Solitary Seven, Etc.
- Ac.3. Pan-Digital Sums
  - Ac.3.A. Insertion Of Signs To Make 100, Etc.
- Ac.4. Pan-Digital Products
- Ac.5. Pan-Digital Fractions
- Ac.6. Other Pan-Digital And Similar Problems
- Ac.7. Self-Descriptive Numbers, Pangrams, Etc.

Ad. Selling, Buying And Selling Same Item

- Ad.1. Pawning Money

Ae. Use Of Counterfeit Bill Or Forged Cheque

Af. Arithmetic Progressions

- Af.1. Collecting Stones
- Af.2. Clock Striking

Ag. 2592

Ah. Multiplying By Reversing

- Ah.1. Other Reversal Problems

Ai. Impossible Exchange Rates

Aj. Multiplying By Shifting

- Aj.1. Multiplying By Appending Digits

Surveys, Possible Early References	**Ak. Lazy Worker**
N.1 Magic Cubes	**Al. If A Is B, What Is C?**
N.2. Magic Triangles	**Am. Crossnumber Puzzles**
N.3. Anti-Magic Squares And Triangles	**An. Three Odds Make An Even, Etc.**
N.4. Magic Knight's Tour	**Ao. Divination Of A Permutation**
N.5. Other Magic Shapes	**Ap. Knowing Sum Vs Knowing Product**
O. Magic Hexagon	**Aq. Numbers In Alphabetic Order**
O.1. Other Magic Hexagons	**Ar. 1089**
P. Diophantine Recreations	**As. Cigarette Butts**
P.1. Hundred Fowls And Other Linear Problems	**At. Bookworm's Distance**
P.2. Chinese Remainder Theorem	**Au. Number Of Cuts To Make N Pieces**
P.3. Archimedes' Cattle Problem	**Av. How Long To Strike Twelve?**
P.4. Present Of Gems	**Aw. 28/7 = 13**
P.5. Selling Different Amounts 'At Same Prices' Yielding The Same	**Ax. Sum = Product, Etc.**
P.6. Conjunction Of Planets, Etc.	**Ay. Sum Of Powers Of Digits**
P.7. Robbing And Restoring	**Az. Divination Of A Pair Of Cards From Its Rows**
Q. Blind Abbess And Her Nuns - Rearrangement Along Sides of a 3X3 square to conserve side totals of a 3X3 square to conserve side totals	**Ba. Cycle Of Numbers With Each Closer To Ten Than The Previous** **Bb. Iterated Functions Of Integers**
Q.1. Rearrangement On A Cross	**Bc. Unusual Difficulty In Giving Change**
Q.2. Rearrange A Cross Of Six To Make Two Lines Of Four, Etc.	

Tavola 1.10 - Il dettaglio dal catalogo di Singmaster 2004 di tutte le sezioni e sottosezioni in cui è suddiviso l'ambito concettuale *7. ARITHMETIC & NUMBER-THEORETIC RECREATIONS*. Si va dalla A alla Bc!

Il catalogo si rivela utile come raccolta di fonti, e in particolare quando si è interessati – anche per motivazioni didattiche – a un singolo problema o a un'area di problemi: si veda a tal proposito il §2.2, dedicato al *Four Fours problem*, e la relativa appendice A.1, che presenta il contenuto sezione *Four Fours, etc.* dell'ambito concettuale aritmetico (riprodotto nella Tavola 1.10).

I filoni attuali della matematica ricreativa

In conclusione di questo paragrafo si propone un elenco sintetico e per quanto possibile rappresentativo – seppur senza ambizioni di esaustività – di quelli che sono oggi considerati *i filoni mai tramontati*, dove non si è mai smesso di giocare, fare ricerca e studi, utilizzando il nome attribuito al gioco e/o al problema (si veda Tavola 1.11). L'elenco è compilato alla luce sia della sintesi di Vögel et al (si veda §1.1.1), sia del lavoro recente di Singmaster e delle raccolte di matematica ricreativa della seconda metà del Novecento.

Evitando la collocazione per ambiti concettuali (aritmetica, geometria, ecc...), si distinguono:

1. giochi matematici che obbediscono a delle regole necessarie per il loro utilizzo (giochi di strategia, giochi di azzardo (*games of chance*), i giochi da tavolo (*board games*)), con o senza materiali "concreti"[47]
2. problemi ricreativi (con un'oscillazione di temi ampia che va dalle curiosità sui numeri e sul calcolo ai quadrati magici, alle piegature della carta). Alcuni problemi sono collegati a giochi, ma hanno vita propria rispetto al gioco che li ha generati, quali ad esempio le otto regine o il salto del cavallo negli scacchi.

Un elenco come quello della Tavola 1.11 alla pagina seguente non riesce a catturare una realtà in continua evoluzione. Si troveranno sempre in esso problemi o giochi che potrebbero diventare – a loro volta – fonte di ispirazione per nuovi problemi e nuovi giochi. Viceversa, alcuni problemi o giochi non sono sopravvissuti al tempo per vari motivi: alcuni problemi, perché non sono più interessanti in quanto risultano quasi banali con gli strumenti matematici odierni; e alcuni giochi, perché sono troppo complessi specialistici in quale senso (è il caso di due giochi medievali caduti in disuso, *Rithmomachia* e *Metromachia*, si veda Thiele 1994 e §2.1.1).

[47] I cubi Soma e i polimini, ad esempio, sono collocati tra i problemi ricreativi, in quanto riguardano materiali concreti, ma non sono sempre necessarie delle regole per utilizzarli, a differenza del cubo di Rubik o dei rompicapo meccanici che possono essere ricondotti a giochi nella modalità "solitario" a un giocatore e sono dunque collocati tra i giochi matematici.

Giochi matematici arrivati fino a noi
Mulino (Filetto o *Nine Men's Morris*)
Halatafl (Volpe e oche, Lupo e pecore, ecc...)
Domino
NIM
GO
Scacchi
Tris (o Tic-Tac-Toe)
Il gioco del 31
Il gioco del quindici
Kayles (Dudeney)
HEX
Tetris
Sudoku
Sprouts (Conway e Paterson)
Dots and Boxes ("Punti e linee" di Lucas)
I Mancala
Mastermind
La torre di Hanoï (Lucas)
Tait's Counter Puzzle
Il gioco della vita (Conway)
Il solitario della Bastiglia (Peg Solitaire)
Train Shunting Puzzles ("Problemi di smistamento ferroviario")
Toads and Frogs (Guy)
Fore and Aft Puzzle o *Sixteen Men Puzzle*
Octagram Puzzle
Il Tangram e lo Stomachion
Anelli cinesi (o di Cardano) o *Baguenaudier*
Il cubo di Rubik
Rompicapo meccanici tridimensionali (in legno, in plastica, in ferro)

Problemi di matematica ricreativa arrivati fino a noi
Curiosità numeriche (qui l'elenco sarebbe quasi infinito!)
Calcoli divertenti
Ore e calendario
Dissezioni
Piegature della carta e origami
Quadrati magici (il *problema dei 36 ufficiali* è riconducibile a un quadrato magico 6 x 6), triangoli magici, cubi magici e altre figure magiche
Problemi di aritmo-geometria pitagorica
Polimini e *Polyiamonds* ("polimini triangolari")
Cubi Soma
Flexagoni (Gardner)
Criptaritmi
Pyramid Puzzles
La quadratura del quadrato
Mrs Perkins's Quilt (dissezione di un quadrato in quadrati)
Ponti e labirinti
Contare il numero di un certo tipo di figure presenti (triangoli, quadrati, rettangoli...)
Attraversamenti difficili (lupo, capra e cavolo; le tre coppie di sposi, padroni e schiavi....)
Travasi e di cisterne da riempire
Paradossi probabilistici (le due buste, il compleanno...)
Paradossi aritmetici (il dollaro o l'euro mancante...)
Paradossi geometrici (l'area scomparsa...)
Figure impossibili (Penrose)
Il teorema di Pick e il reticolo
I problemi storici: quadratura del cerchio, trisezione dell'angolo, duplicazione del cubo
Il problema delle otto regine (scacchi)
Il viaggio del cavallo (scacchi)
Il problema di Giuseppe
Il problema delle 15 scolarette (di Kirkman)
Il problema dei 4 colori nelle cartine geografiche
Il problema dei 100 uccelli
Il problema del ragno e della mosca
Il problema delle noci di cocco
Il problema dello stipendio
Il problema del colore dell'orso
Il problema del dodecaedro hamiltoniano
Il problema della Jeep o dell'esploratore
Il problema dei quattro 4, degli *n* numeri...
Il problema delle scale incrociate (*Crossed Ladders Problem*)
Problemi di combinatoria
Problemi della scacchiera
Problemi delle pesate (Bachet, monete vere o false?)
Problemi del mucchio
Problemi con mazzi di carte (Gergonne et al)
Problemi capziosi ("con qualche tranello che inganna", Cipolla 1962)
Problemi di logica (verità e bugie, il dilemma del prigioniero, il padre di quell'uomo è il figlio di mio padre...)
Problemi di trasferimento
Problemi di incontri e sorpassi (fisica)
Problemi con sistemi di numerazione diversi da base 10
Problemi di eredità
Problemi di età
Problemi con i fiammiferi (o con gli stuzzicadenti)
Problemi di pavimentazione e tassellazione nello spazio

Tavola 1.11 – Un tentativo di sintesi dei contenuti della matematica ricreativa oggi

Nel §2.2 si presenta un approfondimento su un singolo quesito ricreativo aritmetico, in un'ottica decisamente più mirata al tema centrale di questa prima parte della tesi, ossia arrivare a un approccio pedagogico attraverso il gioco alla matematica scolastica: partendo dalla storia (si tratta di un quesito di origini relativamente recenti) ed esplorando diramazioni e suggestioni attuali, anche grazie alla potenza di calcolo digitale, che sta contribuendo a cambiare le condizioni e gli orientamenti della matematica ricreativa.

1.1.3 "Di lieve apparenza": indagare il patrimonio immateriale e materiale della matematica ricreativa

È certamente interessante individuare quali sono stati – e quali sono tuttora – gli argomenti matematici ricorrenti in giochi e indovinelli, o anche individuare strategie risolutive che accomunano certi problemi ricreativi[48]. Si tratta di un'analisi che ha ricadute importanti in ambito didattico, e nel primo paragrafo del Capitolo 2 discuteremo una classificazione ispirata da interessi didattici (§2.1.5).

Nel contempo, occorre non evacuare la complessità di un campo che può spaziare da divertimenti ingenui a problemi sofisticati, alcuni dei quali non sono ancora mai stati risolti. Che la matematica ricreativa compaia, lo abbiamo visto, invece di restringersi nel tempo tende a emergere in quasi in ogni ambito della matematica e, laddove non compare oggi, non si può escludere a priori che potrà comparire domani.

Inoltre, dagli esempi che abbiamo indicato risulta evidente che classificare le ricreazioni matematiche solamente da punti di vista concettuali interni alla matematica oppure di euristica, nasconderebbe qualcosa di molto più profondo: ogni ricreazione ha una propria storia e una propria dimensione originale, anche se non di rado può essere messa in relazione con i giochi e i problemi dello stesso ambito. Questa dimensione ha radici culturali nelle intenzioni umane di eserciti di ideatori e risolutori. Essa si colloca all'interno della dimensione più ampia dei problemi nella matematica. Come ha scritto Rafael Rodríguez Vidal (1916-1993)[49]:

> Hay en la Matemática problemas que por su belleza, su oportunidad o su ingenio son clásicos desde el momento de aparecer, aunque esta aparición haya sido, a veces, en un tiempo bien determinado y

[48] È quanto propone Ennio Peres nella voce "Giochi matematici" dell'*Enciclopedia della Matematica Treccani* (Peres 2013), dove la parola gioco, come nella voce di Schaaf per la *Britannica*, è intesa in riferimento anche a problemi e rompicapo. Egli distingue due categorie principali (giochi matematici e giochi logici): dei giochi matematici farebbero parte gli enigmi e i paradossi, mentre i rompicapi, i percorsi e gli incasellamenti logici costituirebbero i giochi logici. Tuttavia, qualsiasi tentativo di classificare questo assortimento variegato rimane nella migliore delle ipotesi arbitrario, piuttosto si tratta di una fra i possibili modi di interpretare il patrimonio complessivo, che ha potenzialità interessanti in campo didattico. Anche Frederik Schuh (1875-1966) discute le strategie di risoluzione nella sua raccolta di matematica ricreativa (in olandese) pubblicata in piena Seconda guerra mondiale, nel 1943; ma lo fa in chiave didattica, senza intento classificatorio.

[49] Docente delle scuole superiori e per trentacinque anni dell'Università di Saragozza, si è occupato delle aritmetiche spagnole a stampa in età moderna e ha pubblicato tre libri di matematica ricreativa, di cui il primo basato su una precedente raccolta del padre, Rafael Rodríguez Annoni (1886-1958), un militare epurato dal franchismo nel 1939 e interessato alla didattica della matematica, che egli curò postuma con il titolo *In margine alla classe* (Rodríguez Annoni 1959)

quizá próximo. Pero otros problemas, de leve apariencia, insignificantes, perduran desde hace milenios, con esa perenne juventud que también han conseguido encontrar algunas fábulas afortunadas. Y así, una fabulilla nacida hace miles de años no sabemos dónde nos advierte contra la imprevisión; otra, contra la ingratitud, otra, contra la vanidad; ... Ideados en el seno de civilizaciones de las que ya no quedan ni las piedras, estos leves relatos sobrevivirán según todas las apariencias a nuestra propria civilización. Del mismo modo, en ciertas curiosidades numéricas; en ciertos problemas ingeniosos ... algo debe de haber que halaga o gratifica a la razón humana, más invaiante en el tiempo de lo que suele creerse, algo que, más poderoso que su valor científico, explique su prolongada supervivencia. [Rodríguez Vidal 1983, pp. VII-VIII]

Emerge la dimensione "popolare" della matematica ricreativa, il fatto che essa si presenta in vesti accessibili ai più, in contrasto con il carattere esoterico della matematica dotta a partire dalle origini greche (si pensi al pitagorismo) e che al giorno d'oggi è il frutto dello specialismo spinto, dall'accumulo del paesaggio della matematica superiore, dei lunghi anni di formazione che richiede l'appartenenza alla comunità dei matematici. Questa dimensione è stata sottolineata da Singmaster come cruciale, insieme alla dimensione del divertimento (*fun*). L'aspetto comunicativo è stato anche incoraggiato dalla divulgazione scientifica otto-novecentesca. Una comunicazione prima a distanza: ognuno dei libri che abbiamo percorso in questo paragrafo – lo abbiamo visto in particolare con Ball – è una "conversazione dell'autore con i suoi lettori" (Rodríguez Vidal 1983, p. VII), e numerose soluzioni a indovinelli e rompicapo sono comparse anche nelle sezioni di lettere dei lettori ai magazine. Nella seconda metà del Novecento la comunicazione a distanza si è amplificata attraverso riviste specialistiche e poi il web, ma ancor prima sono proliferati incontri in diretta in convention ed eventi, anche monografici, ad esempio su alcuni giochi.

Nel contempo, emerge un ruolo di queste ricreazioni nella ideologia delle élites, dagli scribi del mondo antico fino alle élite degli stati moderni in Europa. Ne propone un esempio Chabaud, analizzando *il problema di Giuseppe* presente nell'opera di Bachet, nel contesto sociale e politico della Francia del Seicento:

[...] la culture mathématique est promue comme un élément constitutif du bagage culturel des élites, et particulièrement de l'élite nobiliaire versée dans les armes, au service de l'État royal et de la paix civile obtenue avec Henri IV et la fin des guerres dites de religion qui ont ensanglanté le royaume de France.

À cet égard, le fondement idéologique des « récréations » est tout particulièrement mis en avant dans un problème emblématique [...] Il s'agit du fameux « problème » de Flavius Josèphe décidant de l'ordre du suicide collectif de sa garnison de soldats, pris de désespoir lors du siège de la forteresse de Jotapata. Grâce à un moyen arithmétique, il réussit à échapper à la mort en s'attribuant la toute dernière place, finissant par se rallier aux Romains vainqueurs de la Guerre des Juifs. Le néo-stoïcisme de cet *exemplum* – pour lequel les mathématiques sont un moyen autant qu'une fin – sert alors à « enseigner » les nobles qui seraient tentés de ne pas se rallier à la raison supérieure de l'État royal et à la paix des braves voulue par Richelieu après Henri IV. [Chabaud 2014, p. 219]

La dimensione del piacere, in quel periodo, deriva da tre aspetti, secondo Clarisse Budnik: meraviglia, comprensione e competizione; alle ricreazioni si può accedere da soli, ma anche in società in un contesto mondano; inoltre, esse contribuiscono alla diffusione della scienza illuminata. Ecco l'esempio che propone, riguardo al *problema dei turchi e dei cristiani:*

Quinze «Chrétiens» et quinze «Turcs» sont sur un navire. La moitié doit être jetée à la mer. Les hommes sont disposés sur deux rangées de quinze. On compte de neuf en neuf, à chaque fois le 9e est jeté à la mer jusqu'à ce qu'il ne reste que quinze hommes. Comment les disposer pour que la «bonne moitié» [questa l'espressione di Bachet] – les chrétiens– survive? Le premier mouvement est de placer en premier les chrétiens, souvent selon un ordre régulier. Il n'en est rien comme le rappelle Bachet : il faut partir du nombre total d'hommes représentés par des ronds, rayer les ronds en éliminant le 9e à chaque fois et en déduire l'emplacement des chrétiens. Actualisant dans le jeu le conflit avec les Ottomans et l'esprit de croisade, ce problème exacerbe l'esprit de compétition pour avoir le plaisir d'être le premier à délivrer la solution et sauver ainsi, symboliquement, les chrétiens de leurs ennemis. [Budnik 2018, p. 66]

Emerge soprattutto, dalla varietà e articolazione interna di questo patrimonio, il fatto che determinare a priori cosa si intenda per ricreativo danneggia la possibilità di interrogarlo da un punto di vista storico-culturale ed è quindi sterile. Al contrario, la natura ricreativa di ogni quesito o filone si pone volta per volta come domanda sempre aperta, che può avere risposte diverse in epoche e contesti culturali diversi, o anche in diversi filoni di problemi o in diversi giochi. *La dimensione del ricreativo, del giocoso o scherzoso* appare in ognuno dei giochi e dei problemi in simbiosi con un *tema matematico*, e incastrato in una *narrazione o scenario* ben caratterizzato (data dalla storiella che avvolge un problema, dal tabellone di un gioco da tavolo, nel passato anche da un impianto spettacolare del genere della magia e così via). Si è vista la caratterizzazione di Hermelink per il periodo pre-moderno, ossia il radicamento in una realtà quotidiana (che porta quindi immedesimazione), la quale viene stravolta (creando distanziamento, sorpresa come in un dramma o commedia). Tuttavia, essa non esaurisce la questione, tanto più se si considera l'evoluzione fino ai giorni nostri. Come sottolinea anche Kordemsky (1958), i diversi termini che sono stati utilizzati per la matematica ricreativa (*ricreazioni, puzzle, passatempo, divertimenti, loisirs, Mussestunden, Unterhaltungen*...) non riflettono l'essenza di un patrimonio ricco e articolato:

il divertimento non è un'essenza, ma una forma, un metodo pedagogico per porre problemi. I problemi in questa categoria sono davvero piuttosto attraenti. Trovare da soli una soluzione a un problema o anche leggere una presentazione di una soluzione intelligente già fatta da qualcuno è solitamente un grande piacere. [Kordemsky 1958]

Uno sguardo complessivo storico-culturale alla matematica ricreativa è interessante di per sé stesso: da accostare per certi versi ad altre forme di folklore, quali le tradizioni orali di racconti e detti e le tradizioni popolari di musica e danza, da inserire nel contesto culturale e sociale in evoluzione. In questa indagine, gli elementi forniti rivestono valore in modo diretto per contestualizzare la copiosa pubblicistica attuale – disponibile in ogni lingua anche in forma digitale e in rete – nella quale gli insegnanti spesso si muovono senza punti di riferimento, con esplorazioni e sperimentazioni dei singoli. In modo più profondo, la matematica ricreativa permette di indagare il gioco nelle matematiche (elementari e superiori), una questione che non di rado è considerata in modo superficiale, che invece costituisce lo sfondo necessario di un approccio attraverso il gioco nella didattica della matematica.

L'esistenza stessa dell'immenso patrimonio della matematica ricreativa e la sua vitalità passata e presente pone la questione del serio *versus* il ricreativo/giocoso nello sviluppo del pensiero matematico.

Si tratta di una dicotomia che si aggiunge – ma spesso viene oscurata da essa – a quella più comunemente considerata dimensione "applicativa"/utile *versus* dimensione "pura"/disinteressata della matematica, ossia fra la matematica nelle sue radici nella techné amministrativa, misurativa e così via e nelle sue moderne, sterminate applicazioni da una parte e la matematica come episteme praticata per curiosità intellettuale e in modo liberale dall'altra. Tale dicotomia utile o applicativo/liberale è stata già sottolineata nel mondo greco – fin dal celebre frammento di Eudemo (IV secolo) – ed è molto presente nella visione attuale comune dell'universo matematico. Si tratta di un argomento che è anche al centro di una corrente di ricerche storiografiche di grande interesse, con risvolti epistemologici (l'applicabilità della matematica, la modellistica matematica), socio-culturali (il ruolo e il condizionamento sociale della matematica) e così via.

Cosa ne è invece della dicotomia serio-per gioco nella matematica? Essa, forse più della prima, riguarda chiunque abbia a che vedere con la matematica: allievi giovani e meno giovani, gente comune e studiosi. A scuola, negli ultimi anni, si pone molto l'accento sull'applicazione della matematica e la sua utilità nel lavoro (dei singoli) e nell'economia (nella dimensione collettiva), allo scopo dichiarato di controbilanciare il suo carattere di disciplina che si muove in una sfera simbolica separata dal mondo reale. La dicotomia serio/ricreativo viene invece non di rado tralasciata, o piuttosto essa viene risolta considerando le matematiche *tout court* (elementari o superiori che siano) una questione seria, e il ricreativo una "licenza" temporanea, un modo occasionale di alleviare la fatica ma un mondo da arginare per la paura di banalizzare la matematica. Dalla metà degli anni Ottanta del Novecento, il matematico spagnolo Miguel de Guzmán – presidente dell'ICMI per otto anni negli anni Novanta – è tornato più volte sulla centralità del gioco per un rinnovamento della didattica della matematica, insieme ad altri studiosi, di cui si parlerà nel Capitolo 2. Guzmán, come si vedrà, si distingue per il fatto che egli si è rivolto alle riflessioni di un esponente delle ricerche di antropologia filosofica novecentesche, Johan Huizinga. Sulla sua scia, lo sguardo può essere ampliato a molti aspetti di tali ricerche, che offrono un quadro concettuale per indagare *il ricreativo nella matematica ricreativa* e più in generale, *il gioco nella matematica e nel suo insegnamento*.

1.2 Il gioco nella condizione umana e nella cultura: prospettive antropologiche

> Notre nature est dans le mouvement; le repos entier est la mort.
> Pascal, primo frammento sul divertimento, *Pensées*

Nelle *Pensées* di Blaise Pascal (1623-1662) – frammenti del suo progetto incompiuto di un'apologia della verità della religione cristiana e, ancor prima, in un discorso sulla condizione umana – egli parla del divertimento nelle sfumature del chiaroscuro, quasi condannandolo. Non è tanto moralismo, ossia quel sospetto del gioco – e in particolare il gioco d'azzardo – come forma di vizio, che tuttavia non ha impedito ai matematici europei in età moderna e contemporanea, fra cui lo stesso Pascal, di occuparsene. Egli descrive con vivacità cosa è l'esperienza umana del gioco; e riflette sulla ricerca del divertimento come via nefasta poiché asservita allo scopo di accantonare la meditazione sulla condizione umana, cosa che egli pone come cruciale pilastro della felicità di ognuno; non solo denigra il gioco, ma anche ogni altra vanità, inclusa la risoluzione di un problema d'algebra finora non ritrovata da nessun altro[50]:

> Mais, direz-vous, quel objet a-t-il en tout cela? Celui de se vanter demain entre ses amis de ce qu'il a mieux joué qu'un autre. Ainsi les autres suent dans leur cabinet pour montrer aux savants qu'ils ont résolu une question d'algèbre qu'on n'aurait pu trouver jusqu'ici. Et tant d'autres s'exposent aux derniers périls pour se vanter ensuite d'une place qu'ils auront prise, aussi sottement à mon gré. Et enfin les autres se tuent pour remarquer toutes ces choses, non pas pour en devenir plus sages, mais seulement pour montrer qu'ils les savent, et ceux-là sont les plus sots de la bande, puisqu'ils le sont avec connaissance, au lieu qu'on peut penser des autres qu'ils ne le seraient plus s'ils avaient cette connaissance.
>
> -------
>
> Tel homme passe sa vie sans ennui en jouant tous les jours peu de chose. Donnez-lui tous les matins l'argent qu'il peut gagner chaque jour, à la charge qu'il ne joue point, vous le rendez malheureux. On dira peut-être que c'est qu'il recherche l'amusement du jeu et non pas le gain. Faites-le donc jouer pour rien, il ne s'y échauffera pas et s'y ennuiera. Ce n'est donc pas l'amusement seul qu'il recherche, un amusement languissant et sans passion l'ennuiera, il faut qu'il s'y échauffe et qu'il se pipe lui-même en s'imaginant qu'il serait heureux de gagner ce qu'il ne voudrait pas qu'on lui donnât à condition de ne point jouer, afin qu'il se forme un sujet de passion et qu'il excite sur cela son désir, sa colère, sa crainte pour l'objet qu'il s'est formé, comme les enfants qui s'effraient du visage qu'ils ont barbouillé.
>
> -------
>
> D'où vient que cet homme, qui a perdu depuis peu de mois son fils unique et qui accablé de procès et de querelles était ce matin si troublé, n'y pense plus maintenant? Ne vous en étonnez pas, il est tout occupé à voir par où passera ce sanglier que les chiens poursuivent avec tant d'ardeur depuis six heures. Il n'en faut pas davantage. L'homme, quelque plein de tristesse qu'il soit, si on peut gagner sur lui de le faire entrer en quelque divertissement, le voilà heureux pendant ce temps-là. Et l'homme, quelque heureux qu'il soit, s'il n'est diverti et occupé par quelque passion ou quelque amusement qui empêche l'ennui de se répandre, sera bientôt chagrin et malheureux. Sans divertissement il n'y a point de joie. Avec le divertissement il n'y a point de tristesse. Et c'est aussi ce qui forme le bonheur des personnes de grande condition qu'ils ont un nombre de personnes qui les divertissent, et qu'ils ont le pouvoir de se maintenir en cet état.
>
> Prenez-y garde, qu'est-ce autre chose d'être surintendant, chancelier, premier président, sinon d'être en une condition où l'on a le matin un grand nombre de gens qui viennent de tous côtés pour ne leur laisser pas une heure en la journée où ils puissent penser à eux-mêmes? Et quand ils sont dans la disgrâce et qu'on les renvoie à leurs maisons des champs, où ils ne manquent ni de biens, ni de domestiques pour les assister dans leur besoin, ils ne laissent pas d'être misérables et abandonnés, parce que personne ne les empêche de songer à eux.

Nel settimo frammento citato in epigrafe a questa tesi, il divertimento avrebbe difatti lo stesso effetto dell'istruzione stessa: «dès l'enfance, [..]on les accable d'affaires, de l'apprentissage des langues et d'exercices [...] une étrange manière de les rendre heureux. Que pourrait-on faire de mieux pour les rendre malheureux? Comment, ce qu'on pourrait faire? Il ne faudrait que leur ôter tous ces soins, car alors ils se verraient, ils penseraient à ce qu'ils sont, d'où ils viennent, où ils vont».

[50] Frammento 4 sul divertimento, citato dall'edizione elettronica *Les Pensées de Blaise Pascal*, a cura di Dominique Descotes e Gilles Proust, http://www.penseesdepascal.fr/Divertissement/Divertissement4-moderne.php Devo queste considerazioni sui frammenti di Pascal sul divertimento e il gioco al mio relatore, prof. Luca Biasco.

Questo pensiero ci apre la prospettiva di cercare nella scuola un'apertura all'esperienza umana e al significato delle cose che possa davvero rendere felici gli allievi: invece di «soffocarli» di cose e di esercizi, cercare nella leggerezza del gioco, un risveglio di energie umane, rianimando e ravvivando le materie e gli argomenti che appaiono rinsecchiti, avvizziti.

A cavallo fra l'antropologia filosofica e la sociologia, il pensiero novecentesco ha esplorato questo campo aperto da Pascal, superando quell'ombra di sospetto sul gioco ed esaminando il ruolo del gioco nella condizione umana e nella cultura, quindi quale fattore di "umanizzazione". Considerando le due fasi di questi studi, prima e dopo la Seconda guerra mondiale, la discussione di questo paragrafo è incentrata su due rappresentanti rispettivamente dell'una e dell'altra fase: lo storico olandese Johan Huizinga – lo studioso a partire dal quale Guzmán ha aperto la prospettiva antropologica del gioco alla didattica della matematica – e il sociologo francese Roger Caillois, che ha esteso e approfondito l'analisi visionaria di Huizinga. Partiamo però da una breve descrizione del contesto intellettuale e culturale di queste ricerche.

1.2.1 L'antropologia filosofica europea: le sue origini e le sue ricadute nel pensiero educativo

Nel periodo fra le due guerre mondiali videro la luce una serie di lavori che cercano di "spiegare l'uomo" o – detto altrimenti – indagano "la posizione dell'uomo nel cosmo" – il titolo di un celebre saggio di Max Scheler (1874-1928), *Die Stellung des Menschen im Kosmos* (1928) – nel contesto della crisi della coscienza europea del tempo. Vi è, da una parte, l'impatto della catastrofica esperienza della Grande guerra. Tuttavia, sullo sfondo si colloca l'impatto della teoria dell'evoluzione nella visione dell'uomo, la crisi dell'antropologia cristiana contrassegnata dalle acquisizioni delle scienze naturali, dalla psicologia sperimentale e dalla psicanalisi; contrassegnata anche da quella che Max Scheler chiama *Ausgleich* (oggi diremmo globalizzazione o integrazione), in una celebre conferenza presso la Deutsche Hochschule für Politik di Berlino del novembre 1927, conseguenza della conoscenza degli Europei della profondità culturale di altre aree del mondo (come conseguenza delle politiche coloniali) e di ciò che emerge dagli studi etnografici a cavallo del 1900; contrassegnata anche dall'avanzare della tecnica e dallo sviluppo del modo di vita nell'economia capitalista di mercato.

Molti studiosi che si collocano in questa corrente hanno svolto studi che oggi chiamiamo "biomedici" (zoologia, medicina): essi, da una parte, confrontano l'essere umano con l'insieme del regno animale e del mondo della vita; dall'altra, volgono l'attenzione al ruolo della corporeità nel vissuto dell'uomo e anche nella sua conoscenza. Inoltre, questi studiosi indagano l'umano anche nelle arti, arti visive, poesia e musica o arti sceniche, che sono il recinto in cui vive l'immedesimazione e la rappresentazione, in una Europa sempre più contrassegnata dalla presenza della tecnica e dalla riduzione del pensiero ai metodi e le concezioni delle scienze naturali più o meno matematizzate.

Un autore centrale in questo contesto è Henri Bergson (1859-1941) – che ebbe un forte impatto sulla sociologia e sull'etnografia, e non solo – di cui ricordiamo le riflessioni sul tempo e la durata, sulla memoria e il suo sostrato materiale, sul riso. Esponenti di questa corrente di studi sono: in Francia, sulla scia di Bergson, ma anche con aspetti in collegamento con sue ricerche etnografiche e antropolinguistiche, Marcel Jousse (1886-1961); in Germania, Helmuth Plessner (1892-1985) e Arnold Gehlen (1904-1976), allievi entrambi dello studioso di scienze naturali e filosofo del vitalismo Hans Driesch (1867-1941) (Borsari 2020), che si occupano principalmente della mimesi/imitazione. Brillanti contributi, in particolare sul gioco, sono pubblicati nei Paesi Bassi (non di rado tradotti immediatamente in tedesco): spiccano i contributi di Frank (Frederick J. J.) Buytendijk (1887-1974) e di Johan Huizinga (1872-1945), che si occupano non tanto e non solo dei giochi, quanto del gioco come impulso primordiale o tendenza umana (quindi non *game* bensì *play*). Buytendijk, medico e fisiologo, studioso della fisiologia del sistema nervoso e di psicologia comparata degli animali, è autore di *Psychologie der dieren* (1920) e con Plessner pubbicò *Die Deutung des mimischen Ausdrucks* (1925); su questi studi si fonda il suo *Wesen und Sinn des Spiels. Das Spiel des Menschen un der Tiere als Erscheingungsform der Lebenstriebe* (1933; originale olandese del 1932). Huizinga, di formazione letteraria, filologo e storico, è autore del celebre *Homo ludens* (1938, in olandese, elaborato a partire di una conferenza del 1933), nel quale avanza una nota tesi che interseca il serio e il gioco nelle sorgenti della cultura umana.

Nella antropologia filosofica, fra le due guerre, emergono così temi quali intuizione, empatia, mimesi e gioco, che esplorano l'essere umano oltre la categoria della ragione, cercando di vedere in un'ottica non riduzionista la corporeità nella comprensione (oltre la parola) e nella esperienza umana. Si tratta di categorie poco esplorate fino ad allora, ma in realtà presenti già nella filosofia e fin dal mondo greco (Aristotele e Platone, ad esempio, si occupano di gioco e di mimesi, parole derivante dal greco; e questo tema è presente nell'estetica ottocentesca).

Alla riduzione dell'uomo al sostrato materiale corporeo e alla sua immersione indistinta nella Natura, si contrappone un'indagine dello "spirito" (*Geist*, nella terminologia di Scheler) che però non lo riduca alla sola ragione; riduzione dell'espressione dell'essere umano alla condotta dell'animale, cui si contrappone una disamina di ciò che accomuna e distingue uomo e animali, che dia però spazio alle pulsioni inconsce (*Drang*, l'impulso primordiale nella terminologia di Scheler) rilevate dalle ricerche di Freud. «Il potere creativo, da cui traggono origine tutte le immagini [*Bilder*] e le cose di questo mondo» scrive Scheler «[...] non può risiedere nel *Geist* stesso. Noi lo chiamiamo l'impulso primordiale [*Drang*]» (citato in Cusinato 2019, p. 10). Così commenta Cusinato:

> Una volta trasferita la facoltà immaginativo-proiettiva dalla sfera spirituale a quella pulsionale, l'impotenza del *Geist* si riflette inevitabilmente sullo statuto delle idee: la relazione fra Geist e idee perde ogni carattere d'autosufficienza e d'esclusività, tanto che su di essa non può più fondarsi neppure l'atto della conoscenza essenziale (*Wesenerkenntnis*). In tal modo si passa dalla tesi di un *Geist* che pone da solo e in assoluta autonomia un regno d'idee esterne e immutabili (la quiete della

metafisica) a quella di un *Geist* che, attraverso l'idea, determina l'immagine (*Bild*) compenetrandosi in modo tumultuoso al *Drang* (la tempesta del mondo). In questa nuova prospettiva l'idea, da prodotto autoreferenziale del *Geist*, diventa lo strumento dell'azione modellante-inibitrice del *Geist* sul *Drang*, diventa il progetto, lo schizzo che accompagna necessariamente l'azione del *Lenken* e del *Leiten* sul *Drang*. Il *Geist* attraverso idee esprime la sua funzione contenente nei confronti della fantasia del *Drang* che pone le immagini sia in riferimento all'esperienza della persona (*Wesenerkenntniss*) sia in riferimento all'esperienza dell'organismo (sensibilità). [Cusinato 2010, p. 6]

Queste ricerche hanno potenziali ricadute sia sul piano politico-sociale, sia sulla visione dell'educazione. Così come nell'Europa moderna e fino all'Ottocento l'antropologia cristiana era lo sfondo delle concezioni pedagogiche dominanti, allo stesso modo una nuova antropologia implica un cambiamento in queste concezioni, tanto più che, nella società europea dei primi del Novecento, l'istruzione per tutti appare una componente irrinunciabile di una società democratica, o quanto meno di una società moderna. Le ricadute sull'educazione riguardano innanzitutto le implicazioni epistemologiche di queste ricerche. Ad esempio, Scheler si riferisce allo sviluppo del neonato:

Secondo le indagini di W. Stern sulla psicologia dell'infanzia, si può osservare già nel secondo mese di vita che il bambino non rimane indifferente alla voce e al volto della madre, bensì è indotto "a un lieve sorriso". A metà del primo anno di vita si può constatare un differente comportamento rispetto a differenti unità di espressione dei volti dei genitori. Molto correttamente, Koffka nota a questo proposito: «allora rimarrebbe l'impressione che fenomeni come l'"amicizia" e l'"inimicizia" siano estremamente primitivi, più primitivi di quelli di una macchia blu». Da questi e da simili dati di fatto, traiamo la conseguenza che l'"espressione" è addirittura la primissima cosa che l'uomo coglie in ciò che esiste nel mondo esterno, e che egli coglie una qualche manifestazione sensibile soltanto e nella misura in cui in essa possano "presentarsi" unità espressive psichiche. Qui non si tratta assolutamente di "ragionamento per analogia"; tantomeno il discorso può riferirsi ai complicati "processi di assimilazione" che B. Erdmann ipotizza nei suoi lavori per spiegare questo primo "comprendere". I brandelli di sensazioni, da cui la psicologia associativa farebbe nascere la nostra immagine del mondo, sono appunto pure finzioni» [Scheler 1973, p. 233]

Anche Jousse rileverà esplicitamente in alcune sue conferenze a Parigi le implicazioni delle sue vedute riguardo al bambino "analfabeta", in riferimento alla sua visione sulla mimesi.

Inoltre, più in generale, Scheler fu portato, all'epoca della Repubblica di Weimar, alla centralità della *Bildung*[51] della persona umana in quanto "essere costitutivamente incompiuto e necessitato a una seconda nascita", alla ricerca di una "armonizzazione" che non riduca l'uomo alla sola ragione calcolatrice; come scrive Cusinato:

di fronte alla catastrofe bellica e alla tragedia del primo dopoguerra tedesco, Scheler si rende improvvisamente conto che così come nell'antropologia filosofica non è più possibile sintetizzare in un'unica idea di uomo le molteplici manifestazioni dell'essere umano, altrettanto non è più possibile riunificare l'Europa rifacendosi a un unico blocco omogeneo di tradizioni, nazioni e ideali politici. L'autocritica è evidente dal momento che fino al 1914 Scheler aveva sperato in una riunificazione dell'Europa in nome dell'unità cristiana medioevale e all'insegna di una lotta contro la modernità e le conseguenze della Rivoluzione francese, tanto da vedere nell'imminente guerra un'occasione offerta ai popoli europei per liberarsi, con l'aiuto della Germania, dalle maglie di quel cancro inguaribile che è il capitalismo. [...]

[51] In *Die Formen des Wissens und die Bildung* (1925); si veda la raccolta di saggi curata da Giuliana Mancuso, Schleler 2009; si rinvia all'elenco sintetico di lavori sul concetto di Bildung, che alle sue origini ha l'idea greca di *paideia*.

> L'*Ausgleich* con cui si trova a che fare l'uomo europeo degli anni Venti è soprattutto quello di un'armonizzazione dell'unilaterale repressione degli istinti causata dalla moderna rivoluzione industriale. La celebrazione del canone razionalista in base al quale l'Europa compì le sue rivoluzioni industriali, l'unilaterale esaltazione di ciò che c'è di calcolabile e quantificabile, dell'apollineo sul dionisiaco, dell'"intelletto sulla vita, si era rovesciata nella modernità in un irrazionalismo che «nei fatti ha formato un tipo d'uomo altamente unilaterale ponendo in estremo pericolo l'equilibrio delle energie umane". [...]
>
> La forma politica all'altezza della nuova era dell'Ausgleich è per Scheler la democrazia parlamentare. Tuttavia per Scheler l'avvento delle masse al potere, verificatosi a partire dalla prima guerra mondiale, non significa che le masse siano in grado di autogovernarsi. Una democrazia unilateralmente focalizzata sul tema dell'uguaglianza ricade, secondo Scheler, nella demagogia e nel populismo e va dunque corretta con una particolare attenzione al tema della formazione delle classi dirigenti. [...] Questa "accettazione con riserve" della democrazia è del resto pienamente congruente al quadro di insieme della prospettiva scheleriana, che sposta, anche nel caso della filosofia politica, il proprio baricentro sul tema della Bildung dell'uomo-massa. [Cusinato 2010, pp. 18-19]

Si tratta quindi di un'inquietudine educativa ben diversa da quella che appare nei vari movimenti di scuole nuove o di progressive education, cui partecipano medici come Alfred Binet (1857-1911), Maria Montessori (1870-1952) e Ovide Decroly (1871-1932) e biologi come Jean Piaget (1896-1980): in questo caso si vogliono estrarre dalle scienze naturali, e in particolare dall'antropologia fisica o dalla psicologia sperimentale (gli studi sull'apprendimento e le ricerche sui bambini con ritardo cognitivo), gli orientamenti per una educazione che sia "fisiologica" e naturale per il bambino e il ragazzo. Fra gli studiosi della psicologia infantile e della cosiddetta pedologia[52], il gioco è presente: negli studi di Édouard Claparède (1873-1940), nel suo saggio *Psychologie de l'enfant et pedagogie experimentale* (1912), citato da Buytendijk; in quelli di Piaget, sulla regola morale nel bambino (1928); in Lev Vygotskij (1896-1934)[53], che se ne occupa in una conferenza sul gioco nello sviluppo mentale del bambino del 1933 presso l'Istituto di Pedagogia Herzen di Leningrado. Queste ricerche sono alla base di approcci al gioco nella pedagogia di stampo psicologico che fanno leva sul concetto di "spontaneità": solo dagli anni Sessanta e Settanta, scriveva Maria Corda Costa, si è cercato di «attribuire al concetto ambiguo (ma largamente usato nella pedagogia del XX secolo) di "spontaneità" connotazioni scientificamente più salde, legate anche agli studi sulla "creatività"» (Costa 1980).

Le ricerche di antropologia filosofica proseguirono nel dopoguerra, segnate ora dal trauma della Seconda guerra mondiale, in particolare per gli studiosi tedeschi. All'indomani della fine del secondo conflitto mondiale, il gesuita Josef Pieper (1904-1997), sulla scia di preoccupazioni analoghe a quelle che avevano animato Scheler – da una prospettiva cristiana – e Huizinga, tenne due conferenze a Bonn nel 1947 pubblicate in volume in inglese nel 1952 con il titolo *Leisure. The basis of culture*.

[52] Termine che risale a una tesi di laurea presso l'Università di Jena dallo statunitense Oscar Chrisman (1855-1920): *Paidologie. Entwurf zu einer Wissenchaft des Kindes* (1896), sotto la guida di Wilhelm Rein (1847-1929), influita dalle vedute di Herbart; si diffuse nei paesi francofoni, in Russia, nel mondo anglosassone, in America (Costa 1980).

[53] Questa conferenza, di cui si conserva il resoconto stenografico, è rimasta inedita fino alla pubblicazione nel 1966 in russo; una versione in italiana si trova nel volume Vygotskij 2010. Una versione in inglese basata sulla trascrizione stenografica è Vygotskij 2016. Vygotskij cita studi prettamente di psicologia sperimentale: oltre a Piaget e inoltre Kurt Lewin (1890-1947), Kurt Koffka (1886-1941) e Herman Nohl (1878-1960).

La grande domanda sulla comprensione e la condizione umana si ritrova nella riflessione di autrici come Maria Zambrano (1904-1991) in *Persona y democracia* (1958)[54] e Hannah Arendt (1906-1975) nei suoi saggi *The human condition* e *The life of the mind*. La mimesi è al centro delle ricerche di Helmuth Plessner (1892-1985) e Arnold Gehlen (1904-1976). Per quanto riguarda il gioco, Eugen Fink (1905-1975), esponente della fenomenologia, pubblica numerosi saggi di antropologia filosofica in cui esamina il gioco nello strutturarsi dell'esistenza umana, fra cui *Oase des Glücks. Gendanken zur einer Ontologie des Spiels* (1957) e la conferenza *Die Weltbedeutung des Spiels* (1972); Hans-Georg Gadamer (1900-2002) riprende gli studi di Buytendijk e di Huizinga, nel suo saggio *Verità e metodo* (1960), dove l'idea di gioco è esaminata come filo conduttore dell'esplicazione ontologica dell'opera d'arte. In Francia, Roger Caillois (1913-1978), a partire da studi approfonditi e molto analitici sulla varietà dei giochi e degli sport, in particolare come attività sociali, sulla scia di Huizinga elabora e approfondisce la descrizione di ciò che rientra nella sfera di gioco e del giocare.

1.2.2 Homo ludens: l'elemento di gioco della cultura secondo Johan Huizinga

> Nel 1933 dedicai a quel soggetto [il gioco] la mia orazione di rettore dell'Università di Leida, col titolo "Sui limiti del gioco e del serio nella cultura". Quando in seguito adattai e rinnovai quel discorso due volte, prima per conferenze a Zurigo e a Vienna (1934), poi per un'altra a Londra (1937), vi posi per titolo: Das Spielelement der Kultur, The Play Element of Culture. Tutte e due le volte i miei ospiti corressero: - in der Kultur, in Culture – e ogni volta io cancellai di nuovo la preposizione e ristabilii il genitivo. Infatti, per me non si trattava di domandare qual posto occupi il gioco fra i rimanenti fenomeni culturali, ma in qual misura la cultura stessa abbia carattere di gioco. Per me si trattava [...] di integrare per così dire il concetto di gioco in quello di cultura
>
> [Huizinga 2002 ed. or. 1939, pp. XXXI-XXXII]

Attraverso questa testimonianza contenuta nella prefazione del suo saggio *Homo ludens*, Johan Huizinga (1872-1945)[55] esprime la difficoltà di fare accettare la radicalità della sua tesi di fondo, fin dalla conferenza citata del 1933, nell'accostare gioco e cultura: «La cultura comincia non come gioco e non da gioco – egli afferma –, ma in gioco» (ivi, p. 88) Infatti, allo stesso modo si cerca di esplorare non soltanto il gioco *nella* matematica (che è poi in gran parte al centro delle ricerche riportate nel primo paragrafo di questo Capitolo 1), ma di accostare gioco e matematica ed esplorare l'avvicinamento alla matematica attraverso il gioco.

---

[54] Si veda Cusinato 2010.

[55] Per alcuni anni insegnante di storia in una scuola media ad Haarlem, fu professore ordinario di storia a Groninga, la sua città natale (1905), e a Leida (dal 1915 al 1942). Durante la Seconda guerra mondiale, per la sua opposizione al nazismo, fu imprigionato e poi confinato nei pressi di Arnhem, dove morì. Su Huizinga si può vedere in italiano Capitani 1967. Le fonti della discussione che si presenta sono Huizinga 1933 (il testo della conferenza *Sui limiti del gioco e del serio nella cultura*, ora disponibile in traduzione italiana pubblicata dalla rivista «Aut Aut» dalla quale citiamo Huizinga 2008) e Huizinga 1938, che si cita dall'edizione italiana Huizinga 2002.

La formazione di Huizinga è prettamente letteraria, storica, aperta però a quella globalizzazione vista in Schegel fin dalla sua tesi di laurea sulla Vidushāka nel teatro indiano; e con la stessa preoccupazione di fondo sul declino della civiltà europea nel suo saggio *In de schaduwen van morgen; een diagnose van het geestelijk lijden van onzen tijd* (1935, tradotto in italiano con il titolo *La crisi della civiltà*), una civiltà che aveva mostrato di conoscere in modo acuto e profondo nel suo saggio *Herfsttij der Middeleeuwen* («Autunno del Medioevo», 1919):

> Mostrando varietà e molteplicità d'interessi nelle più diverse discipline, dopo una prima attività nel campo della filologia comparata si interessò alla storia, che sentì sempre emergere specialmente dalle fonti letterarie e artistiche, rivolgendo l'attenzione a cogliere soprattutto la condizione umana, quale poteva esprimersi nella realtà culturale e spirituale di un'epoca. [Enciclopedia Treccani online, *ad vocem*]

La riflessione sul gioco e la cultura dello storico olandese mostrano da una parte come evitare l'errore comune di cercare di definire univocamente il concetto di gioco, avvicinandosi invece a esso problematicamente, cercando di rintracciare la sua origine, di districarne la natura e il significato; dall'altra parte, esso propone di collocare il gioco al giusto posto come "fattore della cultura".

Egli parla del gioco prevalentemente nel senso della parola inglese *play*[56] e la sua attenzione è concentrata sul comportamento del giocatore, sul gioco giocato, sulla performance, sul piacere. Nell'introduzione all'edizione italiana del 1973, Umberto Eco osservava che l'autore «non fa una grammatica del gioco, esamina delle frasi, e più ancora le modalità di pronuncia delle medesime e il fatto che alla gente *piace parlare*. Non fa una teoria del gioco ma una teoria del comportamento ludico» (Eco in Huizinga 2002, p. XVII). Si vedrà che le parole sono molto delicate e cambiano da lingua a lingua per

56 La lingua inglese ha due parole diverse che corrispondono alla nostra "gioco": *Play* e *Game*. In generale, può esistere il Play senza Game, ma non il Game senza Play. Il Game è il gioco regolato con precisi schemi, che naturalmente include il Play, in quanto in ogni partita giocata di un Game si fa esperienza del Play. Quando, nel §1.1, si è parlato di "giochi matematici", ci si riferisce al concetto di *game* (infatti, in inglese si parla di "mathematical games"); mentre l'aggettivo "ricreativo" come il sostantivo "ricreazione", usati in relazione a "matematica" (rispettivamente come sostantivo o come aggettivo) riguarda il concetto di *play*, per il quale vi è anche in inglese la parola *sport*; altre parole collegate sono *leisure*, *loisir* in francese, in italiano *ozio*, tempo libero. Invece in questo paragrafo e nel prossimo la parola italiana *gioco* rinvia a *play* (a meno che non si espliciti). Tuttavia, gioco in italiano non ha la connotazione di play o Spiel (spielen) in tedesco o jouer dovuto all'uso per suonare uno strumento o recitare/rappresentare/interpretare una parte in uno spettacolo. La parola gioco deriva dal latino *giocus*; mentre l'aggettivo ludico deriva dal latino *ludus*: l'evoluzione nell'uso di queste due parole latine che porta all'uso italiano attuale è esaminata in Nuti 1998: *ludus* indicava in epoca arcaica il divertimento pubblico o privato, un'attività di svago seguendo specifiche regole oppure libera e spontanea, come nel gioco dei bambini; ma includeva anche l'inganno e la beffa ossia il "farsi gioco di qualcuno", così come anche la messa in scena e la finzione); e infine si riferiva anche alla scuola e l'esercizio per apprendere qualcosa. Da parte sua, *iocus* era riservato agli scherzi verbali; progressivamente, per motivi legati alla storia dell'Impero Romano, *ludus* riguarda solo i *ludi* pubblici e quindi è caduto in disuso con la fine di essi (assieme alle istituzioni socio-politiche romane di cui era espressione); e ciò che esso connotava in relazione ai fenomeni vari del gioco umano e della vitalità e dinamicità, è stato ereditato da iocus. Molto interessante l'analisi di Nuti del legame fra Ludus e mimesi in relazione all'uso di ludus per indicare la scuola come luogo (ludi litterarum, ludi magister per il maestro; ludus come scuola gladiatoria) e come attività di apprendimento, quindi proprio quello per cui poi si userà la parola schola, derivata dal greco, che però guarda più dalla parte dell'insegnante che da quella del maestro. "In conclusione, i tratti che caratterizzano il ludus sono soprattutto l'improduttività, la gratificazione, la spontaneità, la mimesi (ibidem, p. 101).

quanto riguarda il gioco: qui Eco usa "ludico" che deriva dal latino *ludus* come nel titolo in latino del libro di Huizinga, eppure vedremo in Caillois che il *ludus* non esaurisce ciò che il gioco implica.

Fin dalle prime pagine Huizinga chiarisce che

> il gioco è qualcosa di più che un fenomeno puramente fisiologico ed una reazione psichica fisiologicamente determinata. Il gioco come tale oltrepassa i limiti dell'attività puramente biologica: è una funzione che contiene un senso. Al gioco partecipa qualcosa che oltrepassa l'immediato istinto a mantenere la vita, e che mette un senso nell'azione del giocare. Ogni gioco significa qualche cosa. Se chiamiamo spirito questo principio attivo che dà al gioco la sua essenza diciamo troppo; se lo chiamiamo istinto non diciamo nulla. Comunque lo si consideri, certamente si manifesta, con tale "intenzione" del gioco, un elemento immateriale nella sua essenza stessa. [Huizinga 2002 ed. or. 1939, pp. 3-4]

Nessuna analisi fisiologica o biologica permette di spiegare questa componente immateriale di intensità, di gioia, di tensione, di "scherzo", del "gusto" del giocare che costituisce l'essenza stessa del gioco. «La Natura» – afferma lo storico olandese – «avrebbe potuto dare alla sua prole tutte quelle funzioni utili di scarico di energia, di rilassamento, di preparazione, e di compenso, anche nella forma di esercizi e reazioni puramente meccanici» (Huizinga 2002 ed. or. 1939, p. 5) e invece ci ha dato il Gioco.

Di seguito si ripropongono le caratteristiche principali del gioco che Huizinga presenta e discute (numerate da 1 a 11), e le considerazioni e sfumature che ognuna di esse poi porta con sé.

1. Il gioco è "anzitutto e soprattutto un atto libero"
2. Il gioco non è «vita vera», ma allontanarsi da quella per entrare in una sfera temporanea di attività con finalità tutta propria («fare solo per finta», «solo per scherzo»), è coscienza di essere diversi dalla vita ordinaria.

> A livello temporale e spaziale il gioco crea un mondo a parte, eccezionale, chiuso in sé, in cui i giocatori si muovono seguendo una legge specifica e vincolante finché quella legge stessa li libera. Il gioco ammalia, proferisce una parola magica che irretisce. Il gioco affascina e racchiude un mondo nel suo linguaggio figurato. [Huizinga 2008 ed. or. 1933, p. 98]

3. Il gioco è limitato nel tempo (permane nel ricordo e può essere ripetuto in qualunque momento) e nello spazio (c'è uno spazio per il gioco)

Dalle prime tre caratteristiche emergono quattro elementi fondamentali:

- la libertà d'azione
- il limite spazio-temporale
- la regolamentazione
- la situazione alternativa alla vita reale, che può essere anche legata alla maschera e al travestimento o a una simulazione.

Si creano dunque le apparenti contraddizioni: libertà/regola e simulazione della vita vera/separazione dalla vita vera.

Per fare chiarezza Huizinga distingue:

- le proprietà *attive* come la libertà d'azione e la simulazione, che fanno riferimento all'intenzionalità del giocatore, al suo agire, all'atto di gioco e alla relativa creazione della stessa situazione ludica;
- le proprietà *passive* come la separazione e la regolamentazione, che sono condizioni di esistenza contestuali della situazione ludica stessa.

4. Il gioco rappresenta qualcosa. «Rappresentare vuol dire anche realizzare, attuare all'interno del mondo valido per un tempo definito che è stato creato dal gioco stesso. Il gioco raffigura, dà forma a quanto appare informe». (Huizinga 2002 ed. or. 1939, p. 5)
5. Il gioco è una *contesa*.

> Al gioco come contesa è collegato un elemento particolare, il premio [ndr: la stessa radice della parola premio, *athlon*, e la stessa della parola atleta], la posta. Si duella, si gioca per qualcosa: [...] ci si affronta per una sposa, per un regno, per la propria vita o per denaro. Non si gioca a bridge per delle caramelline. E perché non lo si fa? Per smania di vincere? No, perché altrimenti non si tratta più di un gioco, dal momento che il gioco – e qui affiora la contraddizione – per essere tale deve essere serio! Un duello, un gioco d'azzardo o d'astuzia, puntate puramente casuali, gli scacchi o le scommesse, come forma di contesa, sono molto analoghi, profondamente radicati nella natura umana. [Huizinga 2008 ed. or. 1933, p. 100]

Se non si gioca per smania di vincere è pur vero che «strettamente intrinseco al gioco è il concetto del vincere», ma non è la vittoria sull'avversario quel che conta nel gioco, come nella lotta per la vita, ma la sfida con sé stessi, per vincersi. Anche per civilizzarsi, per rendersi migliori, per andare oltre i propri limiti.

L'esperienza del gioco non è solo «di un 'partecipare', ma di un 'far parte di', è il rapporto di un'essenziale identità» (Huizinga 2002 ed. or. 1939, p. 194), che il giocatore riconosce come caratteristica dell'azione che sta compiendo. Il premio è del campione e del gruppo che lo sostiene. Il successo non finisce con la vittoria, viene ricordato e celebrato nel tempo perché è una gloria comune.

6. Nella serietà della contesa emerge la contraddizione della serietà necessaria che si conviene al gioco che invece viene spesso considerato all'opposto del serio.

> La dicotomia serio/gioco non è equivalente a reale/irreale, né a vero/falso e non corrisponde neppure a utile/inutile, infatti nel gioco è sempre presente una finalità per quanto possibile immediata, il gioco è la negazione del serio, ma possiede anche qualcos'altro di caratteristico, racchiude in sé una componente seria. E non è neppure subordinato all'essere serio, come espressione limitata e secondaria di ciò che è serio. A prescindere da come consideriamo questi concetti, il gioco resta una categoria eccezionale, autonoma e primaria dell'agire umano e anche animale [Huizinga 2008 ed. or. 1933, p. 104]

Il gioco resta «una categoria eccezionale» e «autonoma», dunque è impossibile collocarlo solamente nel serio o nel divertente, ma è certamente più corrispondente l'affermazione "il gioco è una cosa seria" rispetto alla sua negazione che risulta decisamente superficiale se si osserva il fenomeno nel suo complesso. D'altra parte, esiste anche il detto del samurai per il quale «ciò che è cosa seria per gli uomini comuni deve essere un gioco per l'uomo di valore».

7. Il gioco è creatore di stile. Qui si riferisce alle rappresentazioni (danza, musica...), nelle quali «ritmo, ripetizione, cadenza, ritornello, forma chiusa, accordo e armonia sono tutti attributi del gioco così come elementi costitutivi dello stile». È «l'arte intera legata al gioco».
8. Il gioco è tensione, sospensione, incertezza, possibilità di una buona o di una cattiva riuscita[57].
9. Ci sono dei luoghi sociali deputati, separati, «recinti consacrati» al gioco, che ha la funzione di creare una stabilità sociale (pensiamo agli stadi: senza di essi, cosa accadrebbe oggi?). L'autore, citando Paul Valéry (1871-1945), afferma che l'esistenza del gioco distrugge la possibilità dello scetticismo assoluto poiché se non si è costretti ad accettare le regole non si può però certo dubitare della loro esistenza. Seppure arbitrarie esse sono sotto gli occhi di tutti e sono imprescindibili. Infatti, se non vi sono le regole non vi è il gioco e non appena si trasgrediscono le regole il gioco crolla.
10. L'autore distingue tra i giocatori il baro dal guastafeste. Il *baro* finge di accettare le regole ma, almeno in apparenza, continua a riconoscere la dimensione magica dell'*in-lusio* (l'essere nel gioco). Il *guastafeste* invece, spezza l'*in-lusio* e minaccia l'esistenza della comunità giocante.
11. Attenzione a cercare di tracciare dei limiti o dei confini che non sono tracciabili. Conclude così Huizinga il suo discorso al Rettorato di Leida nel 1933:

> [...] Ogni volta che abbiamo tentato di determinare il gioco, nel sacro o nel profano, nel bello e nel nobile o nel quotidiano e futile, ci siamo ritrovati ben presto al confine della nostra stessa capacità espressiva. [...] Non intendo denigrare il serio, ma lodare e sublimare il gioco. Se vi spaventa l'assenza di una netta demarcazione tra i due, vi indico dei punti di delimitazione entro i quali potete muovervi sicuri. Dall'altra parte rispetto a tutto ciò che definiamo gioco si trovano le cose più profonde che l'uomo possieda: la pietà e l'equità, la sofferenza e la speranza. Basta una loro goccia per consacrare la vostra azione e il vostro pensiero e rendere ininfluente la questione del limite che ci siamo posti. [Huizinga 2008 ed. or. 1933, p. 121]

Pietà ed equità, sofferenza e speranza, si collocano «dall'altra parte rispetto a tutto ciò che definiamo gioco», eppure «basta una loro goccia» per renderci conto che questo confine non è tracciabile: ciascuno di noi può riportare almeno un'occasione di gioco (in prima persona o giocato da altri) in cui ha potuto fare esperienza di quelle che Huizinga chiama «le cose più profonde che l'uomo possieda».

La sua tesi non è quella di dimostrare che la civiltà umana sia nata dal gioco. Vuole invece

> segnalare un certo parallelismo, un reciproco sostegno, una estesa inscindibilità tra le due categorie di gioco e di serio nella cultura. Si impone, al massimo, la conclusione che, spesso, un elemento culturale acquista le proprie sembianze nelle forme di un gioco [ivi, p. 105]

In *Homo Ludens* egli ripercorre la storia cercando di rintracciare la relazione tra gioco e cultura. Fino al Romanticismo, un certo contenuto ludico non è mai eliminato a livello di civiltà ed è sempre portatore di cultura. Nell'Ottocento invece – afferma lo storico – l'utile, il fattore economico, il calcolo prevalgono su ogni altra forma di pensiero; il gioco acquisisce molte delle connotazioni negative che oggi gli attribuiamo (cosa poco seria, passatempo per bambini, inutile perdita di tempo...). In un'epoca che ha

57 Si ritroveranno queste caratteristiche sviluppate nell'analisi di Caillois.

trasformato il gioco in un elemento esterno e senza un'utilità pratica, si impone la necessità di rivalutarlo completamente:

> Si tratta di sapere se la cultura in cui viviamo si sviluppa sempre nelle forme del gioco. In quale senso lo spirito ludico ispira l'uomo che crea e subisce quella cultura? [Huizinga 2002 ed. or. 1939, p. 229]

La ricerca tocca qui il problema che ne è alla base, ovvero rispondere all'origine della crisi moderna. La tesi dello storico è che una crisi simile è figlia di una società in cui l'uomo non trova più momenti veri di espressione del gioco autentico. Infatti, dove si gioca veramente ritroviamo, quali primi effetti, la consapevolezza del limite, il rispetto delle regole, l'accettazione della relazione universale che sussiste fra gli uomini, ritroviamo insomma il fondamento della responsabilità. Viceversa, in una cultura in cui non trova più spazio il fattore ludico originario, il «puerilismo» prende il posto del gioco. Con il termine puerilismo egli vuole indicare un preciso atteggiamento nei riguardi del mondo, atteggiamento che si instaura in assenza di momenti autentici di gioco. Se il gioco è un impulso originario e formativo, allora l'uomo che non gioca tenderà ad esprimersi con altri canali. Attraverso il gioco – e il piacere – era garantita una volontaria sottomissione al limite. Il puerilismo invece connota il comportamento di tutti coloro che non accettano i limiti e hanno un'azione distruttrice. Il puerile rifiuta i limiti. Il puerile è assoluto, è autonomo, è indipendente, è autarchico, si prende gioco degli altri e non gioca con gli altri, il puerile rifiuta le regole e le relazioni oggettive che a lui non sono gradite, il puerile fa le regole e non le rispetta. Così l'impulso al gioco è snaturato, l'armonia si perde e la «gioia di esser causa» si trasforma in puerile «euforia di esser causa assoluta» (inevitabile che il pensiero vada all'ideologia nazista e all'affermarsi delle dittature nelle società moderne):

> Allora sorge la domanda su cui si impernia il nostro esame: bisogna considerare come funzione ludica sì o no il puerilismo prosperante rigogliosamente nella vita moderna? [..] Un bambino che gioca non è mai puerile. Diventa puerile solo quando il gioco gli viene a noia o quando non sa a cosa giocare. Se l'odierno puerilismo generale fosse un autentico gioco si dovrebbe con ciò vedere la società avviata al ritorno verso le forme arcaiche di cultura, nelle quali il gioco era un vivissimo fattore creativo. Molti tenderanno forse a salutare davvero in quel "reclutamento" progressivo della collettività la prima tappa di un tale ritorno. A torto mi sembra. In tutti i fenomeni di un atteggiamento spirituale che abbandona volontariamente la propria maschia responsabilità, non posso vedere altro che i segni di una imminente dissoluzione. Vi mancano le caratteristiche essenziali del gioco autentico, sebbene i comportamenti puerili assumano quasi sempre esteriormente le forme del gioco. Per riacquistare consacrazione, dignità e stile converrà che la cultura faccia un altro cammino. [ivi, p. 242]

Huizinga sottolinea l'esigenza di percorrere un altro cammino, e questo è il cammino che si vorrebbe intraprendere anche nell'ambito di questa ricerca: dare valore autentico al gioco evitando il puerilismo che sembra un gioco ma in realtà "il gioco è falso". Si vuole recuperare la responsabilità insita nel prendere parte a un gioco rispettandone le regole ed è quanto si auspicherebbe anche nel modo attuale di concepire la politica. Un'autentica opposizione politica che rispetta le regole ha sempre un contenuto ludico reale, mentre una politica puerile appare "giocosa" ma in verità non ha rispetto per l'avversario e tende al predominio, alla distruzione e alla denigrazione del nemico (si pensi alla guerra come distruzione di massa).

La cultura – conclude la sua riflessione Huizinga – necessita di essere anzitutto *giocata* secondo date regole, e nel gioco vi è la possibilità concreta di superare la crisi (quella in cui era coinvolta la società europea del suo tempo, e quella in cui in altre forme siamo coinvolti anche noi oggi):

> Nel criterio del valore etico si decide l'eterno dubbio di gioco o serietà. Chi nega il valore oggettivo di diritto e norme morali, non troverà mai il limite fra gioco e serietà. La politica è fissata con tutte le sue radici nel terreno primitivo di cultura, giocata in competizione. [..] E così siamo giunti ad una conclusione: cultura vera non può esistere senza una certa qualità ludica, perché cultura suppone autolimitazione e autodominio, una certa facoltà a non vedere nelle proprie tendenze la mira ultima e più alta, ma a vedersi racchiusa entro limiti che essa stessa liberamente si è imposti. La cultura vuole tuttora, in un certo senso, essere giocata dopo comune accordo, secondo certe regole. La cultura vera esige sempre e per ogni rispetto fair play e fair play non è altra cosa che l'equivalente, espresso in termini di gioco, di buona fede. Il guasta-gioco guasta la cultura stessa. Se questa qualità ludica vorrà creare o promuovere la cultura, allora dovrà essere pura. Non dovrà consistere nel pervertimento o nell'abbandono delle norme prescritte da ragione, umanità e fede. Non dovrà essere una falsa apparenza dietro la quale si mascheri un disegno di realizzare date mire con forme ludiche appositamente coltivate. Il vero gioco esclude ogni propaganda. Ha in sé la sua finalità. [ivi, pag. 242]

1.2.3 L'analisi del gioco di Caillois: ludus e paidia

Il sociologo francese Roger Caillois (1913-1978)[58], proveniente da una famiglia della piccola borghesia di Reims, completa gli studi secondari al Lycée de Reims. Durante gli anni del liceo si lega a Roger Gilbert-Lecomte (1907-1943) e al movimento attorno al progetto della rivista «Grand Jeu»[59], animato da quest'ultimo insieme a René Daumal (1908-1944). Ammesso all'École normale supérieure nel 1933, si avvicina per un certo periodo ai surrealisti, prima di rompere con il movimento nel 1934.

Uditore presso la École Pratique des Hautes Études Parigi, dove frequenta le conferenze di Georges Dumézil, Alexandre Kojève e Marcel Mauss, egli «sviluppa un pensiero originale, nutrito di sociologia e antropologia, dedito in particolare all'esplorazione del sacro». Autore, prima della guerra, di due saggi intitolati *Le Mythe et l'Homme* e *L'Homme et le Sacré*, fonda nel 1938 con Georges Bataille il *Collège de sociologie*. Nel 1939 lascia la Francia per l'Argentina, dove rimane per tutta la durata della Seconda guerra mondiale. Sostiene attivamente la lotta contro il nazismo dall'altra parte dell'Atlantico, fondando nel 1941 la rivista «Lettres françaises», destinata a francesi e francofili che desideravano sfuggire all'ideologia del regime di Vichy, e la raccolta di libri *La Porte*, pubblicata dal 1944 e finanziata da personalità dell'ambiente francese o francofilo, e i cui profitti vengono destinati al Comitato francese per il soccorso alle vittime di guerra.

Tornato in Francia dopo la Liberazione, rinuncia progressivamente ai suoi impegni politici in favore della sua attività letteraria e professionale. Come funzionario dell'Unesco, dal 1948, compie numerosi

---

58 Si fa riferimento alla biografia pubblicata sul sito dell'*Académie française* https://www.academie-francaise.fr/les-immortels/roger-caillois. Si cita *Les jeux et les hommes* dalla traduzione italiana – uscita a distanza di quasi quarant'anni dalla pubblicazione originale – Caillois 1994.

59 Roger Gilbert-Lecomte René e René Daumal scrissero il loro giornale dal 1928 al 1931. Si veda la raccolta di scritti pubblicati nei tre unici numeri fra il 1928 e 1930 in Daumal Gilbert-Lecomte 1967 *Le Grand Jeu* (a cura di Claudio Rugafiori), Milano: Adelphi.

viaggi in giro per il mondo e contribuisce ad avvicinare il pubblico francese alla letteratura latinoamericana (si pensi ad esempio all'opera di Borges), lanciando un progetto editoriale che sembra essere la continuazione della rivista letteraria prima citata: la collana «La Croix du Sud», pubblicata da Gallimard tra il 1951 e il 1970. Nel 1952 fonda la rivista internazionale e multidisciplinare «Diogène», incentrata sulla ricerca di un sapere internazionale e pluridisciplinare, "diagonale", che lo contraddistingue: la rivista è finanziata dall'Unesco e Caillois ne rimane il direttore fino alla morte, con l'aiuto di Jean d'Ormesson.

Il suo lavoro deve molto all'esplorazione di mondi poetici di immaginazione e fantasia, ed è un contributo essenziale e perfettamente originale alla critica letteraria e alle scienze umane del ventesimo secolo[60]. Il 14 gennaio 1971 viene eletto all'Accademia di Francia e René Huyghe lo accoglie il 20 gennaio 1972 sotto la Cupola con queste parole: «Vous êtes, monsieur, un des plus curieux esprits de notre temps, des plus autonomes, des plus rétifs à ses entraînements».

Fin dalle prime pagine del suo saggio *Les Jeux et les Hommes* (1958), egli assegna a Huizinga il merito di aver fatto da apripista in un territorio mai battuto impostando un orizzonte condiviso:

> Innumerevoli sono i giochi e di vario tipo: giochi di società, di destrezza, d'azzardo, giochi all'aperto, giochi di pazienza, giochi di costruzione ecc. Nonostante la quasi infinita varietà e con costanza davvero notevole, la parola gioco richiama sempre i concetti di svago, di rischio o di destrezza. E soprattutto, implica immancabilmente un'atmosfera di distensione e di divertimento. Il gioco riposa e diverte. Evoca un'attività non soggetta a costrizioni, ma anche priva di conseguenze per la vita reale. Si contrappone alla serietà di questa e viene perciò qualificato frivolo. Si contrappone al lavoro come il tempo perso al tempo bene impiegato. Il gioco, infatti, non produce alcunché: né beni né opere. A ogni nuova partita, giocassero pure per tutta la vita, i giocatori si ritrovano a zero e nelle stesse condizioni che all'inizio. I giochi a base di denaro, scommesse o lotterie, non fanno eccezione: non creano ricchezze, le spostano soltanto. Questa fondamentale gratuità del gioco è appunto l'aspetto che maggiormente lo discredita. Ed è al tempo stessso ciò che consente di abbandonarvisi con assoluta spensieratezza e lo mantiene isolato dalle attività produttive. Ognuno, fin dall'inizio, si persuade così che il gioco è soltanto divertente capriccio e futile evasione, qualunque sia l'attenzione che vi si pone, le facoltà che stimola, il rigore che viene richiesto. Lo si avverte chiaramente nella frase di Chateaubriand: "La géométrie spéculative a ses jeux, ses inutilités, comme les autres sciences." Con queste premesse, tanto più significativo appare il fatto che storici eminenti [chiaro qui il riferimento ad Huizinga], dopo accurate ricerche, e scrupolosi psicologi, dopo indagini ripetute e sistematiche, abbiamo convenuto di fare dello spirito ludico una delle molle principali, per le società, dello sviluppo delle manifestazioni più alte della loro cultura e, per l'individuo, della sua educazione morale e della sua evoluzione intellettuale [Caillois 1994/1958, pp. 5-6]

Caillois ritorna alla descrizione del gioco attraverso una serie di aggettivi:

1. *libero*: il giocatore non può essere obbligato senza che il gioco perda subito la sua natura di divertimento attraente e gioioso;

[60] Fra le sue opere dai titoli suggestivi *Le Rocher de Sisyphe*, *Puissance du roman*, *Babel*, *Poétique de Saint-John-Perse, L'Incertitude qui vient des rêves*, *Puissances du rêve*, *Au cœur du fantastique*, *Anthologie du fantastique*, *La Pieuvre*, *Essais sur la logique de l'imaginaire*, *Approches de l'imaginaire*, *Le Fleuve Alphée*. Affascinato dall'universo minerale, dedica diverse opere anche alle pietre e alla gemmologia. La sua pagina nel sito dell'Académie française aggiunge questa curiosità: «Caillois confessava ai suoi parenti che, per rompere la monotonia dei dibattiti, talvolta offriva parole che non esistevano e attribuiva loro etimologie così convincenti che i suoi coetanei a volte mancavano di comprensione».

2. *separato*: circoscritto entro precisi limiti di tempo e di spazio fissati in anticipo;
3. *incerto*: il cui svolgimento non può essere determinato né il risultato acquisito preliminarmente, una certa libertà nella necessità d'inventare essendo obbligatoriamente lasciato all'iniziativa del giocatore;
4. *improduttivo*: che non crea, cioè, né beni, né ricchezza, né alcun altro elemento nuovo; e, salvo uno spostamento di proprietà all'interno della cerchia dei giocatori, tale da riportare a una situazione identica a quella dell'inizio della partita;
5. *regolato*: sottoposto a convenzioni che sospendono le leggi ordinarie e instaurano momentaneamente una legislazione nuova che è la sola a contare;
6. *fittizio*: accompagnato dalla consapevolezza specifica di una diversa realtà o di una totale irrealtà nei confronti della vita normale.

Egli rivolge la sua attenzione non al gioco al singolare, ma ai giochi e, dato «il grandissimo numero e l'infinita varietà dei giochi», ne cerca una classificazione. Il saggio in discussione si collega infatti alla sua opera di "raccolta" di giochi e sport che lo condusse a dirigere il volume *Jeux et sports* (1967) nella Enciclopedia *La Pléiade* (Gallimard). Tratto distintivo del suo approccio è il tentativo di governare con lo sguardo questo oceano – analogamente a quanto abbiamo visto per la matematica ricreativa nel §1.1.2 – attraverso «un numero limitato di categorie ben definite»:

> Dopo un esame delle diverse possibilità, proporrei a questo scopo una suddivisione in quattro categorie principali a seconda che, nei giochi considerati, predomini il ruolo della competizione, del caso, del simulacro o della vertigine. Le ho chiamate rispettivamente **agon, alea, mimicry** e **ilinx**. [grassetto mio] Tutte e quattro appartengono a pieno titolo al campo dei giochi: si gioca al calcio, a biglie o a scacchi (agon), si gioca alla roulette o alla lotteria (alea), si gioca ai pirati o si recita la parte di Nerone o Amleto (mimicry), ci si diverte, si gioca a provocare in noi, con un movimento accelerato di rotazione o caduta, uno stato organico di perdita di coscienza e di smarrimento (ilinx). Tuttavia, queste designazioni non esauriscono ancora l'intero universo del gioco. [..] Ma all'interno di questi settori, i vari giochi si scaglionano nello stesso ordine, secondo una progressione comparabile. E li si può contemporaneamente ordinare fra **due poli** [grassetto mio] antagonisti. A una estremità regna, quasi incondizionatamente un principio comune di divertimento di turbolenza, di libera improvvisazione e spensierata pienezza vitale, attraverso di cui si manifesta una fantasia di tipo incontrollato, che si può denominare col nome di **paidìa** [grassetto mio]. All'estremità opposta, questa esuberanza irrequieta e spontanea è quasi totalmente assorbita, e comunque disciplinata, da una tendenza complementare, opposta sotto certi aspetti, ma non tutti, alla sua natura anarchica e capricciosa: un'esigenza crescente di piegarla a delle convenzioni arbitrarie, imperative e di proposito ostacolanti, di contrastarla sempre di più drizzandole avanti ostacoli via via più ingombranti allo scopo di renderle più arduo il pervenire al risultato ambito. Quest'ultimo diventa perfettamente inutile, benché esiga una somma sempre più grande di sforzi, di tenacia, di abilità o sagacia. A questa seconda componente do il nome di **lùdus**. [grassetto mio, ivi, p. 27]

Trova dunque un principio di classificazione del gioco, che è costituito da quattro categorie che si muovono tra poli opposti. Le quattro categorie sono: *agon* (competizione), *alea* (sorte), *mimicry* (maschera), *ilinx* (vertigine); i due poli opposti sono *paidia* e *ludus*, che corrispondono all'incirca al caos (senza regole) e all'ordine (con regole), e alle opposizioni binarie fra: sfrenatezza e misura, istinto e decisione, dunque sensibilità e ragione. Essi sono come i due poli più astratti e originari a cui i giochi possono risalire, ma in ogni gioco sono comunque presenti in una certa misura sempre entrambi i poli, poiché il gioco è determinazione reciproca dei due istinti fondamentali, che si collocano a un livello più profondo delle quattro categorie in cui i giochi possono essere raggruppati.

LUDUS (con regole)
tendenza a superare gli ostacoli, capacità fisica o abilità mentale, questione di scaltrezza, calcolo, capacità combinatoria, pazienza. Il piacere sta nella prova che si è data di sé stessi, nel modo della vittoria. Il piacere che si prova nel superare una difficoltà creata di proposito, deliberatamente, e arbitrariamente definita, tale, insomma, che il fatto di venirne a capo non comporta altro vantaggio se non l'intimo compiacimento di averla risolta. [...] il complemento e l'educazione della paidia che esso disciplina e arricchisce. È inoltre occasione di allenamento e porta normalmente alla conquista di una determinata abilità, all'acquisizione di una particolare padronanza nel maneggiare determinati strumenti o nell'attitudine a trovare una risposta soddisfacente a problemi [...]
PAIDIA (senza regole)
turbolenza, fantasia incontrollata, improvvisazione. Il piacere si associa al divertimento (eccitazione, allegria e riso): scarto, sorpresa, novità, eccesso, ebbrezza. Si tratta di un'instabilità non semplificabile, non riconducibile ad un unico movimento.

Tavola 1.12 - I due poli del gioco di Caillois

Le prime due categorie (agon e alea) sono in certo senso opposte, quanto all'incidenza della volontà, ma sono accomunate in un principio fondamentale di cui entrambe sono espressione: sono due forme di creazione volontaria, fra i giocatori, di condizioni di assoluta parità o uguaglianza artificiale, che invece nella realtà consueta, di norma, sono negate agli uomini. Sono quindi tentativi di sostituire alle normali condizioni dell'esistenza ordinaria delle condizioni ottimali per un confronto equo. Per questo – conclude – in agon e alea si evade dal mondo, facendolo diverso. In questo senso, le altre due categorie (mimicry e ilinx) sono opposte alle prime perché qui non è il mondo a essere reso diverso dalla finzione, ma è il giocatore stesso che si fa diverso. Nella prima coppia l'oggetto si trasforma, mentre nella seconda si trasforma il soggetto, il giocatore. È possibile rilevare anche che la seconda coppia si situa come polo caotico (e si accosta alla paidia), mentre la prima coppia ha un carattere ordinato (e si accosta al ludus).

Agon
l'ambizione di trionfare grazie al solo merito di una competizione regolata con una parità delle probabilità iniziali di successo. Ogni giocatore conta solo su sé stesso. Es: *scacchi, carte, calcio, corse*
Alea
l'abdicazione della volontà a vantaggio di un'attesa noiosa e passiva della decisione della sorte. Il giocatore conta su tutto tranne che su sé stesso. Es: *lotterie, scommesse, roulette, la conta*
Mimicry
il piacere di assumere una personalità a noi estranea, la simulazione di un'altra realtà, è invenzione continua. La regola del gioco è unica: consiste, per l'attore, nell'affascinare lo spettatore, nel prestarsi all'illusione senza ricusare di primo acchito lo scenario, la maschera, l'artificio cui viene invitato a prestar fede, per un determinato periodo di tempo. Es: *teatro, arti dello spettacolo, illusionismo*
Ilinx
la ricerca della vertigine. Il giocatore appaga il suo desiderio di vedere provvisoriamente distrutti la stabilità e l'equilibrio del suo corpo, di travolgere la propria coscienza. Es: *acrobazie, volo, altalena*

Tavola 1.13 - Le quattro categorie nel gioco secondo Caillois

Tabella 1 - Suddivisione dei giochi

	AGON (*competizione*)	ALEA (*fortuna*)	MIMICRY (*simulacro*)	ILINX (*vertigine*)
PAIDIA chiasso agitazione *fou-rire* aquilone	corse combattimenti ecc. atletica } non soggetti a regolamento	filastrocche per fare la conta testa o croce	imitazioni infantili giochi illusionistici bambola costumi vari maschera travestimento	roteare infantile giostra altalena valzer
solitari cruciverba LUDUS	boxe biliardo scherma dama calcio scacchi competizioni sportive in genere	scommesse roulette lotterie semplici composte o a ripetizione	teatro arti dello spettacolo in generale	volador luna-park sci alpinismo acrobazia

N.B. - In ogni colonna verticale, i giochi sono classificati — molto approssimativamente — in un ordine tale per cui l'elemento *PAIDIA* diminuisce costantemente, mentre aumenta proporzionalmente l'elemento *LUDUS*.

Figura 1.6 - La tensione fra categorie e poli come principio classificatorio nell'opera *Les Jeux et les Hommes* [Caillois 1994, p. 55]

Per Caillois, i solitari sono impropriamente detti giochi, poiché le quattro categorie sono essenzialmente modi di interazione sociale, di gruppo. L'accento posto sulle implicazioni sociali del gioco contraddistingue fortemente Caillois. Ciascuna categoria può collegarsi a forme istituzionali di gioco, integrate alla vita sociale, eppure può anche degenerare e diventare una deformazione o aberrazione: con diversi esempi, egli mostra che i fenomeni socialmente dannosi possono essere interpretati come forme di degenerazione delle categorie presentate (si veda Figura 1.7): ad esempio, l'eccesso di droghe dall'ilinx, la guerra dall'agon, l'alienazione dal mimicry e la superstizione dall'alea.

Tabella 2

	Forme culturali che restano in margine al meccanismo sociale	*Forme istituzionali integrate alla vita sociale*	*Degenerazione*
AGON (*competizione*)	sport	concorrenza in campo commerciale esami e concorsi	violenza, volontà di potenza, astuzia, inganno
ALEA (*fortuna, caso*)	lotterie, casinò ippodromi totalizzatori	speculazione in Borsa	superstizione astrologia ecc.
MIMICRY (*simulacro*)	carnevale teatro cinema mito divistico	uniforme, etichetta cerimoniale professioni rappresentative	alienazione sdoppiamento della personalità
ILINX (*vertigine*)	alpinismo sci, alta acrobazia ebbrezza della velocità	tutte le professioni il cui esercizio implica il dominio della vertigine	alcolismo e droghe

Figura 1.7 - Il collegamento tra le categorie del gioco di Caillois, la cultura, le istituzioni e le possibili degenerazioni [Caillois 1994, p. 75]

Possiamo immaginare sei diverse coppie delle categorie sopra indicate:

- due (alea-mimicry e agon-ilinx) sono chiaramente incompatibili;
- la coppia agon-mimicry è semplice da immaginare poiché ogni competizione è in sé stessa uno spettacolo;
- in alea-ilinx si trovano l'ebbrezza e la magia che avvolgono il giocatore s/fortunato in un'autentica fusione!
- mimicry-ilinx era la coppia cardine delle società primitive con i riti tribali e gli sciamani, e si trova in contrapposizione con le società burocratiche, dove alea e agon sono diventati elementi fondamentali, dove la nascita e il merito personale regolano il gioco sociale. Troviamo manifestazioni di questa coppia oggi solo nei luna park, nel circo, negli sport acrobatici...
- agon-alea è la coppia che regola la società odierna, nella dialettica fra la nascita e il merito, fra la vittoria riportata dal migliore e il colpo fortunato che esalta il beniamino della sorte. Anche la mimicry in verità si collega a questa coppia con il culto – molto attuale! – della diva e del campione.

Egli sviluppa una riflessione a partire dalla storia – al modo di Huizinga – per cercare di comprendere i fenomeni sociali a partire dai giochi e dalle categorie predominanti. È molto interessante la sua analisi sull'avvento della coppia agon-alea e sulla perdita del potere da parte della Mimicry, della maschera. Il cardine della sua ricerca è attualissimo, in quanto riguarda la morale e la civiltà di ogni tempo: il passaggio dalle società senza regole alle società burocratiche e regolate è stato possibile grazie all'introduzione della satira nelle rappresentazioni del simulacro. In sostanza, all'apparire di maschere canzonatorie e satiresche, le maschere serie e paurose perdono il potere sulle coscienze e la civiltà trova nello scherzo e nell'ironia la chiave di passaggio a una nuova forma di civiltà. Ricordando che l'autore scrive nel dopoguerra, con un particolare riferimento ai nuovi regimi, ai blocchi di potere e alle nuove forme di politica sorte dalle ceneri della guerra, l'analisi dell'evoluzione sociale a partire dal gioco è funzionale a un'interpretazione della situazione presente.

Sulla scia di Huizinga, anche Caillois cerca di definire la cultura moderna – dalla sua nascita alle sue degenerazioni – attraverso la specifica prospettiva offerta dal gioco. In virtù di questa ipotesi la società si evolve in base al rapporto che gli uomini hanno con simulacro e vertigine. Così occorre comprendere il fattore storico particolare (la satira) che in tutto il mondo ha permesso – in epoche e con forme diverse – lo stesso passaggio da una forma di società all'altra. Anche oggi possiamo ritrovare il potere dell'immagine (maschera) che opera per creare una paura e una distinzione fra gruppo e capi.

> Se la mimicry e l'ilinx costituiscono realmente per l'uomo delle tentazioni permanenti, non dev'essere facile eliminarle dalla vita collettiva in modo che vi sussistano solo allo stato di divertimento infantile o di comportamenti aberranti. [..] Se il salto decisivo e arduo, se la porta stretta che dà adito alla civiltà

e alla storia (a un progresso, a un avvenire) coincide con la sostituzione, come fondamenti della vita collettiva, delle norme dell'alea e dell'agon alle malie della mimicry e dell'ilinx, è indubbiamente opportuno cercar di capire col favore di quale fausto, misterioso e altamente incerto evento alcune società siano riuscite a spezzare il cerchio infernale stretto intorno a loro dall'alleanza simulacro-vertigine. [..] A evoluzione conclusa, non è escluso, che ci si accorga improvvisamente che in certi casi, che furono verosimilmente dei casi privilegiati, la prima incrinatura destinata, dopo mille vicissitudini, a far vacillare la coalizione onnipotente del simulacro e della vertigine, altro non fu che quella curiosa innovazione, quasi impercettibile, apparentemente assurda, indubbiamente sacrilega: l'introduzione, nel gruppo delle maschere divine, di personaggi di rango uguale e di pari autorità ma destinati a parodiare le loro mimiche ammaliatrici, a temperare con il riso ciò che, privo di questo antidoto, finiva fatalmente nella trance e nell'ipnosi. [ivi, p. 165]

Descrive la situazione della società a lui contemporanea come un ritorno alla coppia mimicry-ilinx (ipnosi della maschera del potere, dell'uniforme, autodistruzione di massa, etc): nonostante la crescente burocrazia nata proprio per arginarla, sostituiscono la vita civile regolata con apparenze ingannevoli, provocando un sempre maggior sonno delle coscienze. Si tratta del ritorno degli stregoni e delle loro maschere seppure sotto altre sembianze. In conclusione, l'autore sostiene che per liberarsi dalla paura e dall'oppressione delle nuove ipnotiche maschere-vertigini è necessario – ora come in passato – ritornare alla satira del potere intesa come capacità di deridere e svelare l'inganno che si nasconde in tale forma di potere. E fare satira significa indossare una maschera, ossia, ancora una volta, giocare.

Come si vedrà nel prossimo paragrafo, concentrandosi sulla visione di Huizinga, Guzmán evidenzia gli aspetti di agon nella matematica e nella prassi del matematico. Come scrive Caillois, in tali contesti, l'interesse per il gioco sparisce con il venir meno dell'incertezza, come quando in matematica una situazione è facilmente abbordabile, e infatti viene tralasciata o accantonata:

Nessuno prova un gran divertimento ad approfittare dell'inesperienza di un giocatore mediocre. Si desidererebbe, invece, insegnargli se la ignora, la mossa invincibile. Perché il gioco è soprattutto dimostrazione di superiorità e il piacere sta nel misurare le proprie forze. Bisogna sentirsi in pericolo.

Le teorie matematiche che cercano di determinare con certezza, in tutte le possibili situazioni, la pedina che conviene spostare o la carta che è opportuno buttar giù, lungi dall'incoraggiare lo spirito di gioco, lo danneggiano, abolendo la sua stessa ragion d'essere. [...] o l'analisi porta a una certezza, e allora il gioco perde il suo interesse; o stabilisce un coefficiente di probabilità, e allora offre semplicemente una valutazione più razionale di un rischio che il giocatore sceglie o no di correre, a seconda della sua natura prudente o temeraria. [ivi, pp. 202-203]

Tuttavia, gli aspetti aggiunti da Caillois, la maschera e la vertigine come recita il sottotitolo del suo libro, appaiono molto pertinenti per quanto riguarda la pedagogia attraverso il gioco, e in particolare ciò che avviene in un'aula quando la matematica si apprende per gioco, attraverso i giochi e i problemi ricreativi, avvicinandosi alla matematica come "grande gioco".

1.2.4 Un riepilogo sulle implicazioni educative degli studi sul gioco

La ricostruzione dettagliata dell'evoluzione di questi studi di antropologia filosofica, delle interdipendenze e del contributo dei vari autori esula dagli obiettivi di questa dissertazione. Si accenna brevemente a due aspetti delle implicazioni e connessioni del gioco (*play*) che emergono da questa messe di studi. Da una parte, la componente di divertimento, di scherzo, di piacere, di leggerezza, in opposizione alla serietà/impegno/pesantezza, che Caillois esplora anche attraverso una serie di categorie che, oltre la competizione e l'imprevedibilità legata al caso, includono la mimesi (la maschera) e l'entusiasmo, il coinvolgimento estremo (la vertigine). Questa componente è alla base:

- dell'ostilità o del sospetto verso il gioco, considerato un vizio nelle forme estreme (per la dipendenza e l'annullamento della volontà) ma anche nelle sue manifestazioni più innocue di giocolieri o giochi di carte; tanto più l'ostilità si respira nella scuola, considerata il regno della serietà intesa come sforzo, impegno, quasi sofferenza che ha un effetto formativo costringendo l'allievo a guardare da un'altra parte rispetto alle tendenze al gioco.
- dell'amore e della predilezione per il gioco in tutte le sue manifestazioni, dall'antichità all'attualità: dagli sport ai giochi d'azzardo, dai giochi da tavolo ai videogiochi, dalla finzione della scena alle danze.
- dei tentativi di rinnovare e migliorare la scuola liberando le energie di competizione, entusiasmo, mimesi negli allievi e portando a scuola la gioia e l'appagamento.

Dall'altra parte vi è la componente di svago, di distrazione e di riposo (leisure), in opposizione al lavoro, la fatica e la noia: da una parte la sospensione del tempo e dello spazio in un luogo immaginario, dall'altra il quotidiano opprimente e legato alla sopravvivenza. Tale opposizione si collega a quella fra vita *contemplativa* e vita *activa*, esplorata da Arendt, e quindi il gioco si lega alla vita contemplativa nei suoi risvolti di connessione e apertura al sacro (come nel riposo sabbatico biblico; in tal senso va il contributo di Pieper, ma anche Huizinga se ne occupa) e di ozio-studio condotto al di fuori delle occupazioni (sulla scia delle concezioni greco-romane, i cui risvolti nell'educazione dell'antichità sono studiate da Werner Jaeger e da Henri Marrou)[61]. Anche questa componente, ponendo il gioco accanto all'ozio della *scholè* greco-romana, suggerisce la scelta pedagogica di un apprendimento attraverso il gioco come espressione della sospensione nella vita contemplativa, in opposizione a una scuola volta all'addestramento e ai mestieri, seppure intellettuali (la cultura degli scribi di cui parla Marrou), alla vita lavorativa.

Ci si sofferma nel seguito su Huizinga, l'autore cui si rivolge Guzmán – matematico di ampia formazione nella cultura classica e nella filosofia – nel tentativo di proporre non soltanto la matematica ricreativa a scuola, ma anche di proporre una matematica a scuola "che abbia il sapore del gioco"; ci si sofferma poi sul lavoro di Caillois sulla scia di Huizinga, che attraverso le sue categorie permette di descrivere in cosa consista proprio il "sapore di gioco". Né uno né l'altro si riferiscono esplicitamente alla matematica. Piuttosto, è stato Guzmán a rilevare che la descrizione del giocare di Huizinga getta luce sul rapporto fra il serio e il ricreativo nell'indagine matematica e sulla natura della matematica come

[61] Mary E. Boole, nel suo saggio *The preparation of the child for science* (1903) collega la disposizione di sospensione sabbatica all'apertura all'apprendimento nei ragazzi; si veda Magrone, Millán Gasca 2018.

manifestazione umana e campo del sapere: «para la mayoría de los matemáticos, la matemática nunca deja de ser totalmente un juego, aunque, además, pueda ser muchas otras cosas», affermava nel 1984 (Guzmán 2004/1984, p. 5). Restituire il gioco autentico alla cultura, l'operazione portata avanti dallo studioso olandese, diventa per Guzmán – insieme alla storia della matematica e ad altre componenti umanistiche – una via per poter restituire anche la matematica stessa alla cultura.

Le prospettive dell'antropologia filosofica sul gioco di Huizinga e Caillois hanno ricadute evidenti sulla pedagogia della matematica e sulla sua didattica, in quanto permettono di comprendere meglio l'incontro di bambini e ragazzi con la matematica a scuola e nel mondo attorno a loro: mettono a fuoco varie componenti caratteristiche che configurano il carattere giocoso di attività matematiche elementari; il valore conoscitivo dell'entrare in contatto con i giochi, dell'"essere giocato dai giochi" (Gadamer 1960); e le caratteristiche del coinvolgimento (entusiasmo, curiosità) che il movimento del giocare implica nel giocatore/allievo o studioso che sia.

1.3 L'investigazione matematica come attività ricreativa e la matematica come grande gioco

«Mathematics is the greatest game ever invented by man»

[Goodman 1965, p. 13]

Lo straordinario sviluppo novecentesco della matematica popolare e divertente – che avrebbe invece potuto essere accantonata o dimenticata, in quanto espressione di culture del passato – e anche lo "sdoganamento" del gioco, ha aperto la strada a considerare la matematica intera come un gioco.

Il matematico statunitense Adolph W. Goodman (1915-2004), autore di numerosi libri di testo, prima di concludere la prefazione del suo *Pleasures of math* (1965) con la frase citata in epigrafe, sottolineava una caratteristica della matematica che la accomuna al gioco: si fa matematica perché è divertente (*fun*), anzi è il gioco più divertente e più grande (con infinite possibilità?) che l'uomo abbia mai inventato. La motivazione secondo Goodman per cui vale la pena studiare matematica, giocare o svolgere qualunque attività nella vita (ad esempio suonare uno strumento, nuotare, giocare a scacchi) è sempre la stessa:

> Basically the answer is the same in all cases. You do these things because they are fun. Or if they aren't fun at first you hope that as you acquire proficiency they will become fun. [Goodman 1965, p. 13]

Nel fare matematica il divertimento è forse un po' più nascosto rispetto ai giochi che conosciamo, ma – come conclude la prefazione anche Goodman – si tratta di imparare a giocare un po' e poi «see if you don't enjoy it».

Harry Langman (1889-1963), nel suo *Play Mathematics* (1962), parla del gioco matematico come qualcosa che permette di lavorare più duramente di quanto si farebbe solo per un compenso:

> Mathematical work is highly satisfying. So is mathematical play. And, as most often is the case, one is apt to work much harder at any form of play, mental or physical, than one would for mere remuneration. Mathematical activity, more than any other, gives scope for the exercise of that faculty which has elevated man above other creatures. [Langman 1962, p. 5]

È naturale a questo punto domandarsi di quale matematica stiamo parlando e se quanto sopra riportato riguardi solamente la matematica ricreativa: difatti, nel Novecento si è mostrato molto difficile delimitare il confine tra la matematica pura e quella ricreativa. La distinzione fra matematica ricreativa (dilettevole, popolare) e seria (dotta, di alto livello), che ad esempio Singmaster ha tentato di fare (si veda anche il recente Singmaster 2021), si rivela una chimera, come anche i tentativi di definire cosa sia la matematica ricreativa ex-ante. La matematica "alta" viene praticata spesso per diletto e quasi come un gioco dagli stessi matematici; e gli stessi Montucla e Kline hanno mostrato interesse per la matematica ricreativa, così come numerosi matematici di primo piano, come Coxeter; la teoria dei grafi e la matematica discreta hanno trovato nelle loro fonti la presenza evidente di problemi di stampo ricreativo. Le distinzioni appaiono sterili, mentre le ricerche antropologiche sul gioco inducono a esplorare la fecondità di una via alternativa, che cerca la connessione fra cultura e gioco, fra cultura e ozio e diletto.

La celebre "calcolatrice umana" e scrittrice indiana Shakuntala Devi (1929-2013) proponeva ai suoi lettori, nella prefazione del suo libro *Puzzles to puzzle you* (1976), una matematica che per sua natura consiste nel risolvere rompicapo:

> What is a mathematics? It is only a systematic effort of solving puzzles posed by nature. Recreational mathematics, in a way, is pure mathematics and it is often difficult to distinguish pure mathematics from recreational mathematics. However, it may also be considered applied mathematics in the sense it satisfies the human need for intellectual play. And solving wits and puzzles, in a way, helps to develop wit and ingenuity. […] I have no doubt my readers will find adventure, excitement, and delight in cracking the clean, sharply defined, and mysterious order that underly the puzzles, and experience enormous intellectual entertainment. [Shakuntala 1976, p. 8]

Martin Gardner (1914-2010) in un articolo intitolato *L'eterno fascino dei giochi matematici* (1998), scritto dopo oltre cinquant'anni dedicati alla matematica ricreativa, tornava sulla labilità della distinzione fra matematica ricreativa e matematica seria, ossia le due categorie della conferenza di Huizinga a Leida del 1933:

> La linea che separa la matematica da intrattenimento dalla matematica seria è sottile e indistinta. Molti matematici professionisti considerano il loro lavoro una sorta di gioco, si sentono un po' come professionisti del golf o della pallacanestro. In generale, la matematica è considerata ricreativa se ha un aspetto giocoso che può essere capito e apprezzato anche dai non matematici [grassetto mio]: comprende problemi elementari con soluzioni eleganti e allo stesso tempo sorprendenti, nonché paradossi inquietanti, giochi ingegnosi, sconcertanti trucchi magici e curiosità topologiche come le strisce di Möbius e le bottiglie di Klein. [Gardner 1998, p. 92]

1.3.1 La lettura di Huizinga da parte di Miguel de Guzmán

Guzmán iniziò a occuparsi di gioco e matematica a partire anch'egli dalla matematica ricreativa e il suo uso per rinnovare e rendere vivo l'insegnamento, introducendo uno "spirito di gioco", facendo gustare un "sapore di gioco". Lo studioso spagnolo fece studi di lettere classiche e filosofia a Loyola e poi nella sofferente Monaco del dopoguerra (presso il Berchmarnskolleg) in quanto novizio gesuita, per poi laurearsi in matematica (la sua materia prediletta fin dalle scuole superiori) a Madrid[62]. Nei suoi anni di formazione in Spagna venne in contatto con aspetti molto critici dell'insegnamento della matematica in quegli anni: da una parte, ancora adolescente conobbe i libri di problemi di matematica francesi ottocenteschi che si usavano per preparare gli esami di accesso agli studi di ingegneria (usati dai due fratelli maggiori); dall'altra, a Madrid agli inizi degli anni Sessanta, l'influsso moderno del bourbakismo, con il quale egli non era tenero:

> El ambiente de aquella época estaba dominado por el bourbakismo con el consiguiente destierro de todo aquello que hoy me interesa come matemático [...] La forma bourbakista de exposición, el formalismo que sólo se permite en sus procedimientos partir de axiomas bien explícitamente establecidos, sin apelar en ningún momento a los contenidos intuitivos y prácticos que dan su motivación a las construcciones matemáticas, era considerado el único modo admisible para la exposición matemática y, lo que ha sido especialmenté dañino, para la enseñanza misma a todos los niveles, incluida la enseñanza secundaria, y aun en muchos casos la primaria. [Guzmán 1993]

Per sua fortuna nel 1965 visitò Madrid un matematico argentino, Alberto Calderón (1920-1998), che lavorava presso l'Università di Chicago su temi di analisi con il matematico polacco emigrato negli Stati Uniti Antoni Zygmund (1900-1992). Calderón apparteneva al nucleo di ricerca matematica creato presso l'Università di Buenos Aires dal matematico spagnolo Julio Rey Pastor (1888-1962)[63]. Quindi Guzmán andò negli Stati Uniti dove realizzò il dottorato di ricerca e insegnò per un anno (presso la Washington University a Saint Louis, nel Missouri): in quegli anni, e fino al 1971 quando lasciò la Compagnia di Gesù, si muoveva negli ambienti dei gesuiti: «Era una vida, como lo ha sido para los jesuitas, a lo largo de la historia, muy sesgada hacia la cultura y la investigación» [ivi]. Nel 1969 tornò a Madrid dove iniziò la carriera universitaria (dal 1982 come ordinario di analisi presso l'Università Complutense). Due anni dopo la fine della dittatura franchista pubblicò un libro, *Mirar y ver* (1977), con ciò che egli poi chiamerà "problemi e teoremi matematici con sapore di gioco" e includendo in bibliografia molti classici della divulgazione e della matematica ricreativa (fra cui Ball, Dudeney e Schuh)[64]:

[62] Le note biografiche sono basate sull'intervista Guzmán 1993 e sulla relazione Millán Gasca 2018. Si veda inoltre Carvalho e Silva s.d. ritratto biografico presso il sito *History of ICMI*

[63] Quindi in qualche modo la sua iniziazione alla ricerca deriva dalla attività, principalmente nel campo dell'analisi, ma anche nella didattica e nella storia della matematica, svolta da Rey Pastor proprio a cavallo fra i due paesi (Millán Gasca 1988).

[64] Nella recensione dell'edizione del 2004 di questo libro sulla rivista «Suma», con un prologo dell'autore dal quale sono tratte le parole che seguono, Elena Gil Clemente scrive: «Sorprende pensar que en el momento de la publicación de este libro, los niños que cursábamos nuestros últimos años de educación primaria, disfrutábamos de unos libros de texto de matemáticas repletos de conjuntos, aplicaciones biyectivas, relaciones de equivalencia, productos cartesianos y lógica proposicional, sin apenas referencia a ningún concepto geométrico que pudiéramos visualizar. A algunos alumnos que teníamos especial afición por las matemáticas, este tipo de enseñanza, hoy tan denostada, nos aportó un gran desarrollo de la capacidad de abstracción. Nos privó, sin embargo, de la apertura al pensamiento intuitivo, clave para la formación del razonamiento. Esos alumnos de los años 70, convertidos hoy en profesores de Secundaria, después de pasar por unas facultades de matemáticas que tampoco han contribuido a cubrir esa laguna en la formación, reproducimos en demasiadas ocasiones los errores anteriores» (Gil Clemente 2005, p. 111).

Durante mis años de enseñanza media [...] y probablemente debido al atraso de las matemáticas en nuestro país, el énfasis se colocaba en la geometría métrica, las miles de propiedades curiosas del triángulo y de las cónicas, y la geometría proyectiva. Posteriormente, en uno de esos movimientos pendulares que nons llevan al extremo opuesto, casi llegamos a desterrar de nuestro ambito la geometría métrica y la geometría proyectiva, privándonos asì de dos de los instrumentos más potentes para la formación de la intuición espacial. [Guzmán 2004/1984, pp. 6-7]

Nel 1983 egli diventò membro della Real Academia de Ciencias, e incrementò il suo impegno nella didattica (con la stesura di libri di testo) e nella divulgazione della matematica, con libri, conferenze e interventi in televisione; fra il 1991 e il 1998 fu presidente dell'International Commission on Mathematical Instruction. Nel 1984 a Santa Cruz de Tenerife, in Spagna, dedicò la sua conferenza, a un convegno nazionale di insegnanti sull'apprendimento e l'insegnamento della matematica, alla matematica ricreativa e al gioco come sguardo sulla matematica:

especialmente en la tarea de iniciar a los más jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradabale y, para algunos, apasionante [Guzmán 2004/1984, p. 10]

Nella conferenza si soffermava su tappe e opere della matematica ricreativa in Europa, basandosi sulla voce di Schaaf nella *Britannica* (§1.1.2), e ricordava anche sia gli studi sui principi matematici nei giochi, sia esempi di teoremi e problemi dotti con sapore di gioco. L'opera di riferimento principale per lui è, al riguardo, *Winning ways for your mathematical plays* (1982, 2 voll.) di Elwyn R. Berlekamp (1940-2019), John H. Conway (1937-2020) e Richard K. Guy (1916-2020). Egli meditava sul "prendere la matematica troppo sul serio" da parte degli insegnanti e dei matematici di professione, e sul moralismo di considerare "leggero e sventato qualsiasi tentativo di mescolare il piacere con il dovere". D'altra parte, ci teneva a rimarcare le differenze, per cui non è possibile ridurre la matematica a divertimento e ignorare il fatto che essa non procuri una soddisfazione istantanea:

La matemática es, en gran parte, juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumento matemáticos. Pero, por supuesto, existen diferencias substanciales entre la práctica del juego y la de la matemática. Generalmente las reglas del juego no requieren introducciones largas, complicadas, ni tediosas. En el juego se busca la diversión y la posibilidad de entrar en acción rápidamente. Muchos problemas matemáticos, incluso algunos muy profundos, permiten también una introducción sencilla y una posibilidad de acción con instrumentos bien ingenuos, pero la matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración de su realidad propia mental y externa y así ha de plantearse, no las preguntas que quiere, sino las que su realidad le plantea de modo natural. Por eso muchas de sus cuestiones espontáneas le estimulan a crear instrumentos sutiles cuya ádquisición no es tarea liviana. [ivi]

Tuttavia, in anni successivi egli si rivolse a Huizinga per affinare la sua visione del gioco – senza fermarsi alla categoria di "divertimento", chiarendo il rapporto fra piacere e "lavoro" o "opera" matematica – e, nel contempo, gettare le fondamenta alla sua affermazione "la matematica è in gran parte gioco". Ecco il riassunto dei tratti che considerava pertinenti al suo discorso:

- Es una actividad libre, en el sentido de la *paideia* griega, es decir, una actividad que se ejercita por sí misma, no por el provecho que de ella se pueda derivar.

- Tiene una cierta función en el desarrollo del hombre; el cachorro humano, como el animal, juega y se prepara con ello para la vida. También el hombre adulto juega y al hacerlo experimenta un sentido de liberación, de evasión, de relajación.
- No está relacionado con la broma: el peor «revientajuegos» es el que no se toma en serio su juego.
- Produce placer a través de su contemplación y de su ejecución, como la obra de arte.
- Se ejercita separado de la vida ordinaria en el tiempo y en el espacio.
- Posee ciertos elementos de tensión cuya liberación y catarsis causan gran placer.
- Origina lazos especiales entre quienes lo practican.
- Crea un nuevo orden, una nueva vida llena de ritmo y armonía a través de sus reglas. [Guzmán 2007, p. 43]

Egli individuava nell'attività matematica molti dei tratti evidenziati da Huizinga in *Homo Ludens*: quindi la matematica è un gioco ma non è solo un gioco. Inoltre, questa presenza del gioco e del serio concorre a mostrarla insieme a tutti gli ambiti della cultura esaminati dallo studioso olandese: la poesia, il diritto, l'arte, la filosofia e il sapere:

> La matemática, por su naturaleza misma, es también juego, si bien este juego implica otros aspectos – científico, instrumental, filosófico–, que juntos hacen de la actividad matemática uno de los verdaderos ejes de nuestra cultura [Guzmán 2007, p. 43]

Guzmán usa la parola *juego-game* (sembra avere in mente persino il gioco da tavolo), e comunque si si riferisce al ludus, ossia al giocare con regole. Così come all'inizio di un gioco ci sono una serie di regole che definiscono la funzione di un certo numero di oggetti o pezzi, afferma, allo stesso modo all'inizio di una teoria matematica si parte da alcuni oggetti primitivi, dagli assiomi e poi si stabiliscono le "regole" attraverso i teoremi che ne conseguono. E naturalmente, così come il giocatore alle prime armi deve prendere familiarità con le regole del gioco per comprendere bene la funzione di ciascun pezzo e le relazioni che intercorrono tra essi, allo stesso modo il matematico principiante confronta e mette in relazioni gli elementi di base della teoria per proporre congetture e dimostrare teoremi.

Si possono dimostrare teoremi a partire dalla conoscenza degli elementi primitivi, degli assiomi e delle prime definizioni di elementi in matematica, così come si possono ipotizzare strategie di gioco a partire dalla conoscenza dei pezzi, della relazione tra essi e dello scopo del gioco.

Quando le situazioni si ripetono – nel gioco come nella matematica – è sufficiente acquisire alcune semplici tecniche per avere maggiore probabilità di successo (vittoria della partita o dimostrazione del teorema). Quando il gioco ha una lunga storia da esplorare, si possono approfondire le strategie vincenti e i diversi approcci possibili al gioco attraverso la testimonianza di coloro che ne sono stati i grandi maestri; allo stesso modo succede in matematica – qui egli evoca una componente di mimesi – quando

> el estudiante trata de asimilar y hacer profundamente suyos los grandes teoremas y métodos que han sido creados a través de la historia. Son los procesos de las mentes más creativas que están ahora a su disposición para que él haga uso de ellas en las situaciones más confusas y delicadas. [Guzmán 2007, p. 44]

Così, ciò che egli presenta come un'analogia si può vedere – usando la terminologia di Huizinga – anche come un ritrovare "l'elemento di gioco della" matematica, in cui:

- i giocatori esperti corrispondono ai matematici ricercatori perché entrambi cercano sempre nuove strategie a partire dalle loro conoscenze e dai loro tentativi precedenti;
- i giochi più complessi, nei quali si possono incontrare situazioni sempre diverse, corrispondono ai problemi aperti della teoria;
- gli inventori di giochi corrispondono agli innovatori della matematica, a coloro che portano a nuove teorie, a volte con applicazioni che risolvono altri problemi aperti (altri giochi o altre situazioni di gioco).

Infine, egli mette in evidenza – facendo ricorso alla storia come Huizinga e Caillois – che, nel passato, è accaduto spesso che un'osservazione ingegnosa e giocosa abbia portato a nuovi sviluppi della teoria, vale a dire il collegamento fra la matematica ricreativa con i suoi problemi singolari o bagatelle e la serietà di una teoria matematica sistematica e dotta:

> De la Antigüedad se puede citar el *I Ching* como origen del pensamiento combinatorio, y de tiempos más modernos se pueden citar en este contexto a Fibonacci, Cardano, Fermat, Pascal, Leibniz, Euler, Daniel Bernoulli... [ivi, p. 45]

Il legame fra matematica e gioco, secondo lui, prosegue anche nella pratica didattica, che era il principale motivo di questa sua indagine. Ora però egli sostituisce parole della psicologia come motivazione o stimolante con "profondo interesse" ed "entusiasmo", e vede nel gioco il modo per avvicinare gli alunni alla prassi matematica genuina:

> cuando nos preguntamos por los métodos más adecuados para transmitir a nuestros alumnos el profundo interés y el entusiasmo que las matemáticas pueden generar y para proporcionar una primera familiarización con los procesos usuales de la actividad matemática [ivi, p. 43]

Si tornerà su questi aspetti nel Capitolo 2, dove si tratterà la visione di Guzmán sul gioco a scuola (§2.1.6) insieme a quella di altri studiosi precedenti e coevi.

1.3.2 Il gioco e le virtù nella matematica secondo Francis Su

L'impatto di opere come quella citata da Miguel de Guzmán di Berlekamp, Conway e Guy e il lavoro di Coxeter, in particolare come curatore delle edizioni moderne di Ball, ha lasciato un segno almeno su una parte dei matematici attivi nella ricerca nella seconda metà del Novecento, fra coloro – un numero molto minore che non cento anni fa – che si interessano di insegnamento e di divulgazione della matematica; altrettanto potrebbe dirsi per i paesi del Patto di Varsavia, fino alla caduta del muro dei Berlino e la fine dell'Unione Sovietica, in riferimento ad altre opere fra cui spicca quella di Kordemsky. Si tratta di un tema poco esplorato, aperto a ulteriori studi.

Recentemente il matematico Francis Su, già presidente della MAA, nel suo libro *Mathematics for human flourishing*[65], utilizza sistematicamente indovinelli e puzzle per accompagnare la sua esposizione sulla matematica per la maturazione e il compimento dell'essere umano. Egli inoltre dedica un capitolo all'aspetto di gioco (*play*) della matematica, parlando di meraviglia, di divertimento, di godimento o appagamento:

> Doing math properly is engaging a kind of play: having fun with ideas that emerge when you explore patterns, and cultivating wonder about how things work. Math is not about memorizing procedures or formulas, or at least that's not where you start. It's the same way in sports. In football, you wouldn't practice drills unless you wanted to play competitively, but you can start with an enjoyment of the game. [Su 2020, p. 50]

La matematica è un gioco impegnativo che ha delle regole, puoi accettarne la sfida oppure rimanere a guardare il gioco dall'esterno: ma se non partecipi direttamente al gioco è difficile scoprirne la bellezza e certamente è molto raro divertirsi da meri osservatori. Inoltre, nell'innesco di una teoria matematica c'è sempre un problema che si vuole risolvere: spesso questo problema compare sotto la forma di un gioco, di un rompicapo (*puzzle*). Fare matematica corrisponde così ad accettare la sfida di un determinato problema o, in altre forme e situazioni, ad accettare di giocare una certa partita. Anche per i matematici di professione l'inizio di un progetto di ricerca è un'"esplorazione giocosa" dove l'errore fa parte del gioco:

> contemplating patterns, playing with ideas, exploring what's true, and enjoying the surprises that arise along the way. In collaborative research, there is no judgment when one makes a false start; in fact, that's part of the fun of exploration. Math explorers pursue not only problems that have immediate application but also questions without long-term stakes are intrinsically appealing [Su 2020, p. 43]

Se la matematica è gioco, allora fare matematica deve essere un'azione volontaria, e questa è la questione più impegnativa perché richiede la disponibilità dell'altro, ma allo stesso tempo – come per tutti i giochi – più entriamo dentro a un nuovo gioco, più vogliamo giocarci. Egli individua due fasi nell'«esplorazione matematica giocosa»: una prima fase di «pattern exploration»[66] in cui si utilizza «inductive reasoning» e una seconda fase di «justification» in cui si utilizza «deductive reasoning»: quando la seconda fase è completata, saranno nate nuove domande che porteranno a nuove esplorazioni: «So it may be more appropriate to think of exploration as a continuous cycle passing from one phase to the other and back again» (Su 2020, p. 57).

---

[65] In questo libro l'autore dedica ogni capitolo a un desiderio umano che nasce e si sviluppa nel fare matematica. Si parla di esplorazione, senso, gioco, permanenza, verità, lotta, energia, giustizia, libertà, comunità e amore. Attraverso ogni desiderio l'uomo cammina verso virtù che lo aiutano a crescere, a flourishing e dunque, per ogni desiderio, Su propone un elenco di virtù che vengono coltivate (si veda Appendice C.1).

[66] Anche alcune delle opere che trattano di ricreazioni matematiche o di *mathematical puzzles* iniziano con un'analisi dettagliata delle varie strategie di risoluzione; si veda ad esempio Schuh 1968/1943.

Il gioco della matematica è concepito da Su come un dialogo tra il giocatore e la matematica. Di fronte all'oggetto il giocatore si domanda: «Cosa vedo? Cosa devo chiedermi?». Poi, in un continuo botta e risposta, arriva ad affermare: «Ecco cosa vedo...» e attende la risposta della matematica.

> Math play is like a tennis player in a game against a new opponent, trying out different shots to see how he responds. […]
>
> Math play is like a hunter who picks an appropriate arrow from her quiver. Math play is like a cook who chooses a good spice for his culinary creation. Some choices are better than others, but many choices will work, and they will yield different dishes. [Su 2020, p. 55]

Il matematico britannico contemporaneo David Wells (1940), in gioventù campione di scacchi e autore di numerose pubblicazioni sul gioco, nel suo libro *Games and Mathematics. Subtle Connections* (2012) propone sinteticamente l'immagine di una matematica a tre facce, le quali non possono essere separate l'una dall'altra:

> As a collection of games: "the mathematician as game-player observes and makes conjectures"
>
> As a science: "the mathematician as scientist makes moves and spots possibilities"
>
> As a perception: "the mathematician as observer studies objects which are much like the pieces in an abstract games of chess" [Wells 2012, pp. 7-8]

Apparentemente sono tre facce distinte, eppure in verità costituiscono una perfetta sintesi della stretta relazione tra matematica e gioco: il matematico è contemporaneamente un giocatore, uno scienziato e un osservatore, ma le azioni che compie sono perfettamente compatibili con quelle richieste nel gioco (congetture, tentativi, ipotesi, studio di oggetti anche astratti).

In conclusione di questo paragrafo si vogliono presentare le virtù che, secondo Su, la matematica sviluppa e rafforza, a partire dall'«impulso primordiale» al gioco e dal desiderio umano di giocare:

hopefulness	patience
curiosity	perseverance
concentration	ability to change perspectives
confidence in struggle	openness of spirit

Tavola 1.14 - Le virtù del Play [Su 2020, p. 229]

Non sorprende trovare la *curiosità* a proposito del gioco e la matematica. La *speranza* in un'attività matematica è spesso legata a un tempo abbastanza lungo dedicato a un problema e significa sperare che alla fine si riuscirà a risolverlo; nel gioco il tempo può essere minore, ma l'idea è sempre la stessa, sperare di vincere! La matematica, a maggior ragione quando è presente la mancanza di attitudine o di interesse verso la disciplina, diventa un'occasione per favorire la capacità di *concentrazione*, come nella testimonianza di Simone Weil:

> If we have no aptitude or natural taste for geometry, this does not mean that our faculty for attention will not be developed by wrestling with a problem or studying a theorem. On the contrary it is almost an advantage. [Weil S. 1951, p. 160 in Su 2020, p. 61]

Inoltre, nel *math play:*

- si costruisce la fiducia nella lotta (*struggle*) e si impara a capire cosa vuol dire lottare con la forza e la fatica della propria mente;
- si scopre la *pazienza* attendendo una soluzione anche per molti anni;
- si scopre la *perseveranza*, ci si allena settimanalmente affrontando problemi matematici che permettono di diventare sempre più pronti per risolvere nuovi problemi, come nello sport dove con gli allenamenti ci si rafforza i muscoli per diventare più forti per affrontare nuove partite;
- si costruisce la *capacità di cambiare punto di vista*, di guardare uno stesso problema da molti punti vista;
- si fa esperienza di un'*apertura di spirito* che si riconduce all'idea di condivisione e al piacere di lavorare su un problema insieme ad altri e contemporaneamente al giocare insieme con lo stesso obiettivo (si pensi a una squadra o a un gioco cooperativo).

Non è un caso che l'apertura di spirito sia collocata in fondo all'elenco delle virtù che il gioco matematico permette di sviluppare: infatti, è la prima a decadere – afferma Su – nel momento in cui prevalgono la performance, la competizione, la voglia di vincere a tutti i costi. Significativo a tal proposito è l'aneddoto riportato dell'allenatore della squadra degli USA che invita le squadre di altri Paesi a prepararsi insieme per le finali delle Olimpiadi Matematiche Internazionali. «Winning was not as important as enjoying the true spirit of mathematical play» (Su 2020, p. 63).

Se si guarda alla matematica come occasione di sviluppare le virtù sopra elencate e si osserva che queste virtù nascono all'interno di uno dei desideri umani fondamentali, ovvero del gioco, allora sembra molto difficile separare la matematica dal gioco. In altre parole, si potrebbe affermare che:

- se capita di non scorgere il gioco nell'attività matematica il motivo è che probabilmente non si sta facendo veramente matematica;
- se invece accade di non riconoscere alcuna attività matematica nel gioco il motivo è che probabilmente non si attribuisce al fare matematica le virtù menzionate sopra, ma solamente obiettivi, contenuti o competenze che poco hanno a che vedere con l'esperienza umana ricca di costruzione[67] che può e deve essere invece la matematica.

[67] Lo scrittore e critico letterario George Steiner (1929-2020) scrive così nel suo celebre libro *Grammatiche della creazione*: "Nessun esercizio umano sembra più ricco di edificazione (di "costruzione") della matematica pura, in nessuno la verità e la bellezza si alleano in modo più dinamico" [Steiner George 2003, *Grammatiche della creazione* (tit.orig. *Grammars of Creation* 2001), Milano: Garzanti, p. 106]

Capitolo 2 Matematica e gioco a scuola: verso un approccio antropologico

Quando gli allievi chiedono: «ma la matematica, a che serve?» o anche «a che *mi* serve?», sarebbe ingenuo interpretare la domanda letteralmente ipotizzando che cerchino concretezza o praticità, quando, alla loro età, la loro vita – lo sappiamo – è guidata da sentimenti ed emozioni, da sogni e progetti, da scherzi e chiacchiere, da ricerca di svago e di piacere, di potere o di prestanza fisica.

Difatti, la domanda «a che serve la matematica?» difficilmente si risolve mostrando la sua utilità nella vita pratica o in altre applicazioni. Certamente la vita quotidiana o le applicazioni della matematica possono essere messe in gioco, ma non attorno a un "discorso di utilità", bensì per imprimere dinamismo ai concetti matematici, per coinvolgere l'immaginazione degli studenti e far capire loro l'origine di tali concetti e la rete di nodi concettuali delle matematiche elementari[68]. La domanda sull'utilità della matematica è una domanda di senso, è la domanda sul *significato* vitale, *per le questioni vitali* che agitano interiormente gli allievi adolescenti. A queste inquietudini gli insegnanti per lo più oppongono una visione scarna, una pallida eco della visione eroica della *paideia*, che potremmo riassumere nella matematica come regno della logica e del *rigore* che si esprime nell'affermazione "la matematica è una cosa seria": è qui che si gioca spesso il mancato incontro di molti insegnanti di matematica, esperti o giovani, con le ragazze e i ragazzi adolescenti delle loro classi.

L'educazione e l'istruzione hanno avuto il significato per molti secoli, nella tradizione europea, di "mettere in riga" gli allievi, fin dalla prima infanzia, nel senso di porre freno all'irrequietezza fisica, intellettuale ed emotiva, e, con la comparsa della scolarizzazione in classi, nel senso di allineare il gesto, la voce, il segno sulla carta a una forma composta, uguale – uniforme – per tutti. L'istruzione obbligatoria per circa 12 anni riversa, ogni anno, nelle classi dei sistemi di istruzione di tutto il mondo, allievi di straordinaria diversità, per origine familiare e per esigenze singolari sotto ogni punto di vista (fisico, caratteriale, di propensione). Di conseguenza, a dispetto dei tanti discorsi pedagogici sul "mettere l'allievo al centro", "promuovere il pensiero divergente", "lasciare spazio alla creatività", in fin dei conti ciò che si è chiamato brevemente "mettere in riga" è questione più attuale che mai, e legata ancora alla disciplina che è richiesta in ogni momento di vita collettiva e sociale. Dopo il faticoso apprendimento della scrittura in bella grafia, forse la materia più funzionale o asservita a questo "mettere in riga" è stata il calcolo, e più in generale la matematica. Ogni calcolo uguale sul quaderno con uguale risultato; ogni problema uguale con uguale svolgimento e soluzione; ogni dimostrazione uguale, seguendo un unico modello (Euclide).

[68] D'altra parte, l'"utilità" intesa come motore delle scelte del homo economicus non funziona nemmeno nelle ricerche di economia matematica, come si è visto nel corso del Novecento! Figuriamoci con allievi minorenni!

Questo compito o questo obiettivo è presente nelle ore di matematica sottotraccia oggi come nel passato, proprio perché assunto da molti insegnanti di matematica e addirittura, nella scuola secondaria, da molti allievi: sulla matematica non si scherza, in matematica non si devia, non si fanno voli pindarici, si eseguono procedure (in esercizi uguali per tutti) e si ascoltano spiegazioni o istruzioni. Non vi sono commenti da fare e quindi si può anche stare in silenzio.

Oggi, la scuola di massa pone un problema di antropologia pedagogica urgente, che si sovrappone alla difficoltà intrinseca della matematica e rischia di confondersi con esso. Si tratta di una riflessione pedagogica che appare oggi accantonata. L'ideale pedagogico della *paideia* conserva la sua validità. Eppure, già lo stesso Platone allargò il suo punto di vista, come ha mostrato Werner Jaeger, considerando un altro modo di avvicinarsi alla matematica in età più precoce e non rivolto soltanto ai futuri governanti, bensì «come per gioco» (come scrive nelle *Leggi*), un modo incentrato su misure e conteggi. Il *gioco* rappresenta un possibile gancio fra le matematiche elementari nell'educazione e la ricerca antropologica, come è stato sottolineato da alcuni studiosi che si sono occupati del gioco nell'aula di matematica da un punto di vista di antropologia pedagogica. Un allargamento della visione pedagogica delle matematiche elementari può essere fondato sulla visione antropologica del gioco, che esamina questo fondamento della cultura umana nel suo realizzarsi concreto nel nostro pianeta, nella nostra corporeità vivente, attraverso il tempo e nei vari popoli.

Nel *primo paragrafo* di questo capitolo si esplora il tema del gioco nella matematica a scuola, attraverso la discussione di numerosi contributi su questo tema. Si parte dalle applicazioni e implicazioni didattiche dei giochi matematici e dei problemi ricreativi nella tradizione europea, con particolare riguardo alle riflessioni che si collegano alla fase di rinnovamento e rilancio della matematica ricreativa fra la fine dell'Ottocento e i primi del Novecento. Ci si sofferma poi monograficamente su una serie di contributi sulla matematica attraverso il gioco a scuola (in particolare per la scuola dell'obbligo) della seconda metà del Novecento: in autori diversi e in aree diverse del mondo si riscontrano sensibilità e proposte diverse: dall'attenzione per la storia al collegamento con il problema più ampio della risoluzione dei problemi, dall'attenzione ai giochi matematici e anche ai materiali-gioco al rilievo dato a questioni come l'ingegno, la creatività, il coinvolgimento e l'entusiasmo, il piacere o la capacità di iniziativa. Sullo sfondo si trova un "curriculum" o piano di studi consolidato che ammette forse l'inserimento di argomenti nuovi (quali la statistica o l'informatica), ma si oppone al cambiamento di approccio pedagogico, a una matematica meno "seria" ma forse più in grado di far esperire il brivido della ricerca e della scoperta, anche se "per gioco" (con un elemento di finzione) e giocando effettivamente.

Nel *secondo paragrafo* si esplora un rompicapo aritmetico, il *Four Fours problem*, in un percorso che vuole servire da esempio di come il lavoro sistematico attorno a un problema ricreativo offra una vera e propria palestra di pensiero matematico: si scopre un intero "microuniverso", seguendo l'approccio proposto per la risoluzione dei problemi da Alexander Karp (si veda §2.1.2). Si esamina il lavoro con carta e penna, con oggetti da gioco (dadi speciali), e infine anche con lo strumento del linguaggio di programmazione Python. Nel *terzo e ultimo paragrafo* si propongono i tratti salienti di un approccio pedagogico attraverso il gioco alla matematica a scuola con studenti e studentesse di 11-15 anni (ossia durante la scuola secondaria obbligatoria, articolata in modi diversi a seconda dei Paesi). La discussione è corredata anche da alcune indicazioni che bisogna aver presente per proporre un approccio pedagogico alle matematiche elementari attraverso il gioco, tale da guidare sperimentazioni in tale direzione incentrate su classi o argomenti diversi, anche in relazione alla questione del collegamento con le indicazioni nazionali per la scuola secondaria di primo grado e per i licei e con le linee guida per gli istituti tecnici e professionali, con la loro possibile evoluzione futura nonostante la rigidità dovuta alla loro cristallizzazione nella forma attuale a livello internazionale. Questi lineamenti pedagogico-didattici sono stati alla base della progettazione della sperimentazione didattica che è l'oggetto della seconda parte della tesi.

2.1 Giocare con la matematica a scuola

Nella tradizione europea, a partire dal Medioevo, la circolazione orale degli indovinelli e problemi ricreativi è stata affiancata da una tradizione scritta, che è diventata progressivamente più centrale a partire dal Seicento con la compilazione di raccolte a stampa. L'intervento dei dotti porta con sé l'uso della matematica ricreativa nell'insegnamento, e non solo dei problemi divertenti, ma anche dei giochi matematici e persino dei giocattoli. L'insegnamento della matematica si colloca in Europa, fin dal Medioevo e ancora di più dopo l'Umanesimo, nel contesto delle *studia humanitatis*, e ciò porta i dotti a interessarsi del valore educativo della matematica ricreativa, del suo ruolo specifico nella formazione dell'intelletto. Così, il ruolo della matematica ricreativa si collega a quello più generale del gioco nell'educazione: sull'istruire con diletto.

Fra Seicento e Settecento le raccolte di matematica ricreativa si incentrano più su una matematica mondana di intrattenimento. Solo a cavallo del 1900 le raccolte di matematica ricreativa si rivolgono più decisamente agli insegnanti, cercando di portare un contributo alle preoccupazioni pedagogiche e di rinnovamento dell'insegnamento della matematica rivolto a tutti almeno negli aspetti elementari. Le preoccupazioni pedagogiche sono lo sfondo del lavoro di Édouard Lucas, di Ignatiev, di Dénes König, di Lietmann e di David Eugene Smith e Vera Sanford.

Il resto del paragrafo si concentra su autori della seconda metà del Novecento, in varie aree culturali europee, in una fase di consolidamento e sviluppo della matematica ricreativa con l'ampliamento della platea dei cultori e della diffusione internazionale (applicazioni didattiche, nuovo interesse per la storia). In primo luogo, Boris Kordemsky, che è espressione anche dell'evoluzione della didattica della matematica in Russia prima e poi in Unione Sovietica nel Novecento; Kordemsky non è uno storico e non è soltanto un compilatore, ma ha offerto contributi originali in questo campo. Ciò nondimeno egli collega strettamente queste ricerche alla questione pedagogica, e in particolare ai temi che furono cari anche a George Polya, ossia l'euristica e la creatività. Come Sanford, egli si interessa anche di problemi della vita reale e di stampo scientifico. Infatti, i problemi ricreativi sono una palestra dove mettere in gioco tutta una serie di caratteristiche del pensiero e della prassi matematica, come avevano mostrato persino per il livello universitario Bonnie Averbach e Orin Chein nel loro *Problem solving through recreational mathematics* (1980); tanto più nei livelli della scuola dell'obbligo il ricreativo si sposa con la risoluzione di problemi. Questo collegamento fra il gioco e la risoluzione dei problemi è centrale nella proposta di Miguel de Guzmán negli ultimi decenni del Novecento, ed egli fa esplicito riferimento a Polya. A questo riguardo, è possibile applicare alle attività con giochi e ricreazioni matematiche l'idea pedagogica e didattica di procedere non con questioni isolate, bensì con «microuniversi» («specially organized sets of them»), proposta da Alexander Karp, nei suoi saggi sui problemi nella didattica della matematica (Karp 2021).

Si prende in considerazione anche la riflessione di Zoltan Dienes, all'interno dell'universo composito del suo pensiero pedagogico e delle sue proposte didattiche; e anche un gioco matematico per la didattica degli anni Settanta, *Equations*. Se Guzmán, ispirandosi a Huizinga, ha collegato la questione dell'insegnamento della matematica *attraverso il gioco* alla questione della *matematica stessa come gioco* (si veda sopra §1.3), Paul Ernest, ispirandosi a Dienes, ha posto in un articolo del 1986 su «Mathematics in school» chiaramente l'esigenza di formulare un *rationale* per l'uso dei giochi, e quindi di superare un uso episodico e senza un approccio pedagogico sottostante. Infatti, se Guzmán ha condotto chi scrive questa tesi a esaminare più ampiamente la tradizione di antropologia filosofica cui appartiene Huizinga, il breve saggio di Ernest è stato una conferma della pertinenza di proporre un contributo per la formulazione di un approccio complessivo: a esso sono seguiti alcune proposte che cercano di offrire un approccio sistematico. Dai contributi degli anni Venti-Trenta a quelli degli anni Sessanta-Novanta, ritorna la questione di fondo di una matematica democratica, ossia rivolta a tutti: «mathematics for the multitudes» come ambizione e come sfida, con l'espressione scelta della «Mathematical Association» britannica. Tutti questi contributi, seppur procedano in modo più o meno sistematico, sono accomunati dall'amore per la scuola e per la matematica e dall'ispirazione umanistica, ossia dal tentativo di far apprendere la matematica facendola sentire agli allievi come qualcosa che li riguarda, li aiuta a migliorarsi, e può essere godibile e divertente.

2.1.1 La matematica ricreativa europea moderna e l'insegnamento della matematica

La matematica ricreativa in Europa

La matematica ricreativa è presente nella cultura europea fin dall'alto Medioevo, e si è evoluta a partire dalle tradizioni orali e scritte della tarda antichità greco-romana, probabilmente integrando altre tradizioni orientali ma soprattutto rielaborando e contribuendo con nuovi giochi e nuovi filoni di problemi ricreativi. Vi sono almeno due aspetti che si vogliono sottolineare della riconfigurazione della matematica ricreativa o della sua specificità in Europa, fin dal Medioevo:

– la matematica ricreativa (come quella pratica d'altra parte) viene accolta dai dotti o quanto meno "letterateur" (Chabaud 2014) che la mettono per iscritto, senza però perdere del tutto il suo legame con l'oralità.

Lo sottolinea efficacemente Heeffer qualche anno fa raccontando un aneddoto personale:

> The importance of the oral tradition became clear to me when going through the card tricks of Bachet together with someone who had surprised me before with his skills in this discipline. Every problem of Bachet involving cards was immediately known to him and he started demonstrating the tricks without finishing reading Bachet's text. He could show me several variations and explain the arithmetic behind them. However, he was taught all this by friends and relatives and did not learn them from books. So, the tradition in which recreational problems and parlour tricks were communicated before the age of printing continues to be part of our culture. It was a remarkable experience to see some of Pacioli and Bachet's problems still practiced today. [Heeffer 2004, p. 18]

– la matematica ricreativa si associa all'insegnamento della matematica, che fa parte della tradizione.

Sono due aspetti legati fra di loro, poiché l'Europa dotta condivide anche il modello educativo ereditato dal mondo greco-romano, nel quale la matematica fa parte del quadrivium tardoantico e delle sue susseguenti evoluzione nell'Umanesimo e in età moderna. La matematica ricreativa europea medievale emerge in esempi legati all'ideale educativo:

1. l'opera *Propositiones ad acuendos giovanes* attribuita allo studioso e consigliere di Carlo Magno – il cui regno segna convenzionalmente l'origine della storia culturale dell'Europa – Alcuino di York, è una raccolta di quesiti (*propositiones*) pratici (qualcuno suddivide, qualcuno misura, ecc) e ricreativi[69]. Si riallaccia necessariamente a precedenti tradizioni orali, e di tali tradizioni antiche eredita il vincolo stretto alla sfera del calcolo pratico. Si osservi che l'incipit del manoscritto che è anche il titolo con il quale lo conosciamo, usa il verbo *acuĕre*, aguzzare, come nella parola italiana "acume" (ossia perspicacia, acutezza), in riferimento ai giovani[70].

[69] Quest'opera in latino (i numeri vi sono annotati con la numerazione romana) ha avuto una discreta circolazione: si conservano ben 13 manoscritti, si veda la prefazione all'edizione italiana Franci (a cura di) 2005; e Franci 2010.
[70] Si collega la risoluzione dei problemi (non solo ricreativi) ad affilare l'ingegno, come si fa con le lame di metallo usando la pietra, come nel titolo di una celebre opera di matematica a stampa inglese del Cinquecento, *The whetstone of Witte* (1557) scritta da Robert Recorde. Le Propositiones provengono dall'ambito latino nordeuropeo, dall'ambito bizantino greco del Mediterraneo orientale proviene invece la compilazione in greco di epigrammi

2. il gioco Rithmomachia o "Battaglia dei numeri" (il nome deriva dalle due parole greche) si collega strettamente all'insegnamento del quadrivium[71].
3. Nell'Italia del basso medioevo i quesiti ricreativi fioriscono insieme all'aritmetica mercantile e l'attività dei maestri che ne insegnano le tecniche con la numerazione scritta indo-araba. Nei capitoli 12 e 13 del *Liber abaci* (1200ca) di Leonardo Fibonacci, si trovano le «questiones erraticae, problemi che attualmente vengono classificati fra quelli di matematica ricreativa, per la risoluzione dei quali viene introdotta anche la regola della doppia falsa posizione» (Franci 2005, p. 25) e, sulla sua scia, sono una costante presenza, con maggiore e minor estensione ma con filoni ricorrenti, nei manoscritti della tradizione d'abaco fra la fine del Duecento e il Quattrocento[72].

Trovare un numero	Trovare un intero dalle parti
Dividere un numero	Trovar il primo dall'ultimo
Somme di monete	«Se mi dai»
Risposte indirette (la domanda è posta da un terzo)	Lavoro condiviso
Trovare la quantità	Serie e progressioni
Consegnare	Gemelli

Tavola 2.1 - Sintesi dei quesiti di matematica ricreativa che si ritrovano nei libri d'abaco (Van Egmond 1980) nella traduzione di Nadia Ambrosetti (Ambrosetti 2008, p. 248)

Da Luca Pacioli, che compila un'opera, *De viribus quantitatis* (fra il 1497 e il 1508), considerata la prima raccolta di matematica ricreativa, arriva la conferma dell'uso delle questioni erratiche o ricreative nella prassi didattica, facendo emergere la presenza degli scolari[73]:

(composizioni brevi) redatta nel X secolo da Costantino Cefala in 15 libri e oggi nota come *Antologia palatina* (dal nome della Biblioteca Palatina di Heidelberg dove si trova l'unico manoscritto). Infatti, il penultimo libro presenta 150 epigrammi, molti dei quali attribuiti a Metrodoro, un grammatico vissuto fra il V e il VI secolo, quasi un terzo dei quali sono problemi ricreativi[70]. Anche in questo caso il legame con gli studia humanitatis sembra possibile, anche si sono reperite ricerche al riguardo: si veda Franci 2005, pp. 16-18 e una descrizione dei problemi ricreativi ivi contenuti in Singmaster, 2021, vol. 1, pp. 11 ss. Alcuni quesiti epigrammi contenti quesiti matematici sono trascritti (a partire dall'edizione italiana che cito in bibliografia, in Carlo Bo (2006) *L'Antologia Palatina. I miei preferiti fra i 150 epigrammi tratti dal libro XIV dell'Antologia Palatina, compilato da Metrodoro, nel 500 d.C.*, post nel sito web *Base Cinque*, http://utenti.quipo.it/base5/numeri/antopalatina.htm (ultimo accesso 21/12/21).

[71] Nell'XI secolo si inizia a giocare nelle scuole cattedralizie europee questo gioco matematico, noto anche come "gioco dei filosofi"; il vescovo di Würzburg ne scrive il primo manuale di istruzioni. Il radicamento di questo gioco nella matematica – esso è strettamente legato all'aritmetica come si presenta nel trattato dell'autore tardoantico Boezio – e anche all'insegnamento (delle discipline del quadrivium), ma anche oltre ad aspetti culturali più profondi, è stato trattato in profondità da Ann N. Moyer (Moyer 2001); i lavori pubblicati nel 1999 e 2001 da M. Folkerts in tedesco sono pubblicati in versione inglese in Folkerts 2003

[72] Si veda sopra, §1.1.1. Vi sono un gran numero di studi oggi disponibili su questo tema, a partire dal lavoro di Warren van Egmond (1980). Si veda anche Goldthwaite (1972-73) e Swetz (1987) oltre ai lavori di Franci. Fra la fine del Quattrocento e i primi del Cinquecento, Elisabetta Ulivi ha mostrato il ruolo che hanno in questo contesto le sfide a colpi di problemi (Ulivi 2015).

[73] Si veda Palmarini, Sosnowski 2019, Sosnowski 2014 e la descrizione dei quesiti dei tre libri contenuta in Singmaster 2021. Una seconda opera dedicata alla matematica ricreativa conservata solo in manoscritto è il *Libro dicto giuochi matematici* (1513?) di Piero da Filicaia (Ulivi 2013).

E che i maestri d'abaco proponessero nelle loro scuole tale genere di problemi per esercitare l'ingegno degli scolari ed attrarne l'attenzione alle discipline matematiche, il nostro autore lo afferma in più punti, come pure ci dice che alcuni dei problemi che riporta sono originali e proposti da suoi scolari in liete brigate [Agostini 1924, p. 168]

Fra Seicento e Settecento, si pubblicano in Europa numerosi libri dedicati alla matematica ricreativa, i quali – come già il libro di Pacioli – riguardano l'aritmetica, la geometria, la meccanica e altri ambiti. Duranti il periodo della Rivoluzione scientifica le ricreazioni matematiche e fisiche sono più intesi come trucchi e scherzi associati all'illusionismo e lo spettacolo, dove si tratta di sorprendere e incantare più che comprendere. I quesiti ricreativi e giochi matematici sono associati ad aspetti curiosi e dilettevoli di fenomeni fisici, di macchine e altro. Queste opere esprimono i sentimenti dell'epoca sul piacevole e sull'utile, sul divertimento anche intellettuale; il rapporto di strati sociali alfabetizzati con il gioco e con la sfera dell'immaginazione e della meraviglia, in collegamento con l'evoluzione dei costumi e del ruolo della scienza nella cultura europea. Si tratta di un aspetto che è stato studiato per l'Inghilterra, dove questo genere prospera al punto che la parola *Mathematik* diventa quasi sinonimo di magia oppure di inganno (Zetterberg 1980 per una visione di insieme, Van Dyck, Vermeir 2014 per l'opera *Mathematicall magic, or The wonders that may be performed by mechanicall geometry* (1648) di John Wilkins (1614-1672)). In Francia, esso è stato esaminato anche come parte degli usi e ambienti sociali sotto l'Ancien Régime, come si è già visto in qualche esempio nel §1.1.3 (Chabaud 1994, 2004, 2014, Belhoste, Hazebrouck 2014, Budnik 2018). I due grandi successi editoriali del Seicento e del Settecento furono concepiti proprio come opere mondane, rivolte a un pubblico generale e non per l'uso didattico. La prima di esse è *Récreation mathématique, composée de plusieurs problèmes plaisants et facetieux. En faict d'Arithmeticque, Geometrie, Mechanicque, Opticque, et autres parties de ces belles sciences* (1624) (Figura 2.1), uscita nello stesso anno della seconda e definitiva edizione di *Problèmes plaisans et delectables, qui se font par les nombres* dell'erudito e studioso di teoria dei numeri Claude-Gaspard Bachet de Méziriac ma di impostazione molto diversa[74].

[74]Bachet fu l'editore del testo greco della *Aritmetica* di Diofanto corredata da note in latino (Collet, Itard 1947). Labosne fa notare la differenza di impostazione fra le due opere.

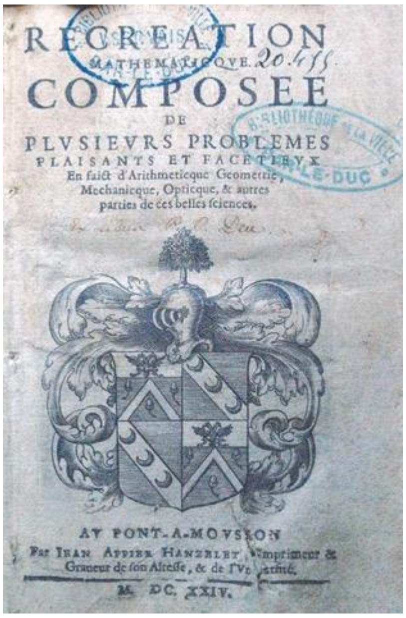


Figura 2.1 - Frontespizio della prima edizione di *Récreation mathématique, composée de plusieurs problèmes plaisants et facetieux* (1624) pubblicata nella cittadina di Pont-à-Musson (nel nordest della Francia), sede di una università dei gesuiti (a metà del Settecento trasferita à Nancy). L'immagine è tratta da Heeffer 2006: si tratta di un raro esemplare conservato presso la Biblioteca Municipale di Bar-le-Duc, che egli ha potuto ispezionare. Reca il nome dello stampatore e incisore ufficiale per l'università, Jean Appier (1596-1647), detto Hanzelet, figlio di un ingegnere militare, il quale aveva pubblicato nel 1620 una raccolta di macchine fuochi d'artificio a scopo militare. Heeffer (2006) lo ha proposto come autore, in alternativa al gesuita francese Jean Leurechon (1591-1670), professore all'università citata e attivo anche in altre città francesi e a Bruxelles, che è in generale considerato l'autore.

Questa opera ebbe numerose ristampe e traduzioni, e i suoi contenuti furono ripresi in altre opere. A essa si ispira ad esempio *Deliciæ physico-mathematica oder Mathematk und Philosophische Eriquickstunden* (1636), stampato a Nürnberg, di Daniel Schwenter (1585-1636).

Una seconda opera che rinnova il genere e si adatta al suo tempo è la imponente *Nouvelles récréations physiques et mathématiques, contenant toutes celles qui ont été découvertes dans ces derniers temps, sur l'aimant, les nombres, l'optiques, la chimie* (1769-1770) di Edmes-Gilles Guyot (1706-1786), un impiegato delle poste a Parigi, appartenente alla borghesia della capitale francese.

In questo contesto editoriale contrasta invece l'opera dedicata alle ricreazioni matematiche dall'insegnante di matematica – prima a Lyon nella regione di origine e poi a Parigi – Jacques Ozanam (1640-1718), pubblicata fra le due prime citate. Essa ha uno spiccato scopo pedagogico, ed è infatti parte di un progetto editoriale più ampio che è stato approfonditamente studiato da Chabaud. Di esso fanno parte tre opere: *Dictionnaire des mathématiques* (1691), *Cours de mathématiques* (1693) e *Récréations mathématiques et physiques* (1694). Le ricreazioni di Ozanam sono, come ha mostrato Chabaud (2014), nel contempo un'apologia delle scienze esatte "avant la lettre" e un progetto pedagogico di portata universale: Ozanam vuole fare accedere tutti ai misteri della divinazione e dei trucchi a base scientifica, e nel contempo ravviva il ricorso agli indovinelli e giochi per far apprendere le matematiche elementari.

Questo valore della matematica ricreativa nell'insegnamento era davvero condiviso fra la fine del Seicento e nel corso del Settecento, quando la domanda e l'offerta di istruzione matematica elementare crescevano ovunque in Europa? La risposta sembrerebbe positiva. Innanzitutto, la presenza di quesiti ricreativi nei libri di aritmetica lo conferma[75]. Si è ricordato nel Capitolo 1 l'atteggiamento prudente di Pascal rispetto a gioco e divertimento nella vita degli esseri umani, nei suoi *Pensieri* pubblicati dopo la morte nel 1662; tuttavia, egli stesso come altri matematici del Seicento (e prima ancora Cardano) si occupò dei principi matematici nel gioco d'azzardo. D'altra parte, nel Seicento si fa spazio l'idea dell'istruire con diletto, in autori che si occupano di educazione dei fanciulli: basti citare l'opera *Schola ludus* (1653), dove Jan Amos Komensky (1592-1670)[76] propone i contenuti delle sue opere didattiche in versione drammatizzata, e l'opera *Some thoughts on education* di John Locke (1632-1704), che attualizza idee che si trovano nelle opere di Platone (D'Angour 2013). Questi autori avranno un influsso nella produzione di giochi, giocattoli e libri a scopo didattico rivolti ai bambini.

Ancora più pertinente al riguardo è ciò che vediamo emergere in Bachet e in Gottfried-Wilhelm Leibniz (1646-1716), poiché si riferiscono non tanto al diletto e la leggerezza, quanto al gioco nella conoscenza e nel pensiero umano. Bachet accosta, infatti, l'intrattenimento alla «subtilité d'esprit»:

> […] car encore que ce ne soient que des jeux, dont le but principal est de donner une honnête récréation, et d'entretenir avec leur gentillesse une compagnie, si est-ce qu'il faut bien de la subtilité d'esprit pour les pratiquer parfaitement, et faut être plus que médiocrement expert en la science des nombres pour bien […] [Bachet 1624, p. 3 della Prefazione]

L'attenzione ai giochi matematici e in generale alla matematica ricreativa, e soprattutto il fatto che li riconosce per la loro virtù di destare l'ingegno («artis inveniendi causa»), è stato messo in evidenza da Margherita Palumbo, a partire dalla presenza di matematica ricreativa nell'ambito dei Mathematica nella sua classificazione delle scienze, in una nota pubblicata da Leibniz nel 1710 sulla Rithmomachia, sugli scacchi e su altri giochi nella «Miscellanea» di Berlino[77] e in una lettera a un cultore della matematica dei giochi d'azzardo (Palumbo 2008). Innanzitutto, egli riconosce giochi matematici come la Rithmomachia o i giochi d'azzardo, la crittografia e altri artifizi matematici:

> Nella classificazione delle scienze Leibniz introduce, nella classe dei Mathematica, la suddivisione dei *Ludi mathematici*, o *Ludi, artificia et opificia mathematica*, intesi non come semplici passatempi o divertimenti di corte, ma piuttosto come nobile applicazione dell'ingegno umano [Palumbo 2008, p. 56]

---

75 L'effetto di questa diffusione ed evoluzione potrebbe essere studiato ovunque in Europa. A titolo di esempio, in Spagna il manuale *Arithmetica demonstrada theorico-practica, para lo mathematico y mercantil* (1699) di Jan Bautista Corachán (1661-1741), professore di matematiche dell'Università di Valencia, contiene un'appendice dedicata alla matematica ricreativa.

76 Sottolineano questo contributo autori della Repubblica ceca e di Slovacchia che si sono occupati di giochi nell'educazione; per il caso della matematica Vankús (2012).

77 Il titolo completo è *Annotatio de quibusdam Ludis; Inprimis de Ludo quodam Sinico, differentiaque trunculorum, & novo genere Ludi Navalis*, pubblicata da Lebiniz a Berlino, nella «Miscellanea Beroliniensia ad incrementum scientiarum» (Leibniz 1710).

nello specifico

> Nella *Tabula de ordinanda Bibliotheca* [1693 (?) ...] si succedono, all'interno della *Mathesis*, le sottoclassi *Ludi Mathematici*, *Steganologica* e *Artes et opificia Mathematica*. Nella contemporanea *Tabula de ordine Bibliothecae*, [...] si trova la diversa formulazione «Ludi artificia et opificia Mathematica ubi et Steganologia», presente anche nella *Idea Leibnitiana Bibliothecae publicae secundum classes scientiarum ordinandae* [ivi, p. 56.nota 3]

Ecco quanto scrive nella nota di Berlino:

> Saepe notavimus, nusquam homines quam in ludicris ingeniosiores esse: atque ideo ludos Mathematicorum curam mereri, non per se, sed artis inveniendi causa. [Leibniz 1710, p. 22]

e ripete in una lettera a Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) scritta da Hannover nel 1716, in risposta all'invio da parte di quest'ultimo di *Essai d'analyse sur le jeux d'hazard* (1708)[78]:

> Les hommes ne sont jamais plus ingénieux que dans l'invention des jeux [...] C'est pourquoy j'ay souhaité qu'un homme aussi habile que vous l'êtes, Monsieur, se mit à les examiner [...] J'eusse souhaité les lois des jeux un peu mieux décrites, et les termes expliqués en faveur des estrangers et de la postérité. Je souhaiterois que vous achevas siés tous les jeux qui dépendent des nombres. [...] On trouve certaines rhithmoma chies dans les vieux Manuscrits, et le Duc Auguste de Wolfenbutel [...] ayant publié son livre en Allemand sur les Echecs, y a joint un tel ancien jeu. [Leibniz, 17 gennaio 1716][79]

Si potrebbe sottolineare che questa osservazione fa riflettere sul fatto che se da una parte i giochi richiedono ingegno, dall'altra permettono di svilupparlo, di migliorarlo. Nella lettera indirizzata a Montmort prosegue in questa direzione, quando, dopo aver osservato che gli è piaciuto un certo gioco matematico («le Solitaire») e che ha preferito "invertirlo" modificandone il meccanismo, improvvisamente si interrompe per rispondere alla domanda «Ma a cosa serve tutto questo?» e risponde «per perfezionare l'arte di inventare»:

> Le Jeu nommé leSolitaire, m'aplu affez. Je l'aipris d'une maniére renversée, c'est-à-dire, au lieu de défaire un composéde Piéces, selon la loi de ce Jeu, qui est de sauter dans une place vuide, & d'ôter la Piéce sur laquelle on faute, j'aicru qu'il seroit plus beau de rétablir ce qui a été défait, en remplissant un trou sur lequel on saute ; & par ce moyen on pourroit se proposer de former une telle ou telle figure proposée, si elle est faisable , comme elle l'est sans doute, si elle est défailable. Mais à quoi bon cela? dirait-on. Je réponds, à perfectionner l'art de inventer. Car il faudroit avoir des Méthodes pour venir à bout de tout ce qui se peut trouver par raison. [Leibniz, 17 gennaio 1716][80]

Non vi sono elementi per giudicare l'influsso di queste vedute di Leibniz, che però si è voluto sottolineare perché sono riprese anche esplicitamente nella seconda metà del Novecento.

---

[78] Esplicito è il riferimento alla Rithmomachia, di cui ricorda la diffusione attraverso il *Das Schach=oder König=Spiel*, pubblicato nel 1616 - sotto lo pseudonimo di Gustavus Selenus - dal duca di Wolfenbüttel August e che comprende, oltre alla nota trattazione del gioco degli scacchi, la tedesca de *Il nobilissimo et antiquissimo giuoco Pythagoreo nominato Rythmomachia* di Francesco Barozzi, apparso a Venezia nel 1572 e basato di Lefevre d'Étaples. Leibniz - che già nel 1710 aveva pubblicato una *Annotatio de quibusdam Ludis* - conservava nella propria biblioteca Beschreibung eines vor 127.Jahren gebräuchlichen kunstreichen Spieles mit Zahlen, illustrazione della *Rithmomachia* apparsa anonima nel 1705. Nel 1715 non poteva lasciarsi sfuggire l'occasione di possedere una copia della celebre Finé di questo gioco matematico, convinto che «nusquam quam in ludicris ingeniores esse: atque ideo ludos Mathematicorum curam mereri, non per se, sed artis inveniendi causa» [Palumbo 2008, p. 57]

[79] Leibniz (a cura di Dutens) 1768, *Opera Omnia, Tomo V*, p. 28.

[80] Leibniz (a cura di Dutens) 1768, *Opera Omnia, Tomo V*, p. 29.

Matematica ricreativa e istruzione a cavallo del 1900: l'influsso di Lucas

Dalle ricerche degli ultimi anni sulla matematica ricreativa emerge come, dal Rinascimento fino all'Ottocento, i quesiti ricreativi non solo ricevono le attenzioni dei dotti che si interessano di matematica, ma interagiscono con la ricerca matematica dotta; hanno svolto un ruolo importante nella creazione e nella diffusione della cultura matematica, come forma di divulgazione fra Ottocento e Novecento; e ciò che più interessa in questa sede, sono in qualche modo associati all'istruzione matematica elementare. A questo riguardo si può citare un autore dei primi dell'Ottocento, Augustus De Morgan (1806-1871), attivamente impegnato e autore di saggi sul tema già allora molto sentito fra i matematici del miglioramento della istruzione matematica, che negli anni 1863-1868 pubblicò una serie di articoli, raccolti postumi nel volume *Budget of paradox* (1872), in cui trattò in modo divertente e leggero la matematica, la scienza e la religione, attraverso citazioni e aneddoti (Pasquali 2020).

Alla fine dell'Ottocento si apre una tappa nuova nella storia della matematica ricreativa europea: essa riceve nuovo impulso in un ambito che si va definendo con maggior chiarezza, rivendicando il suo ruolo nel mondo dell'universo matematico. In quegli anni, il numero delle persone che in un modo o nell'altro hanno a che vedere con la matematica nel proprio lavoro si allarga, si amplia la platea di coloro che ricevono forme di istruzione matematica, le comunità matematiche nazionali si organizzano, aumentano i settori della ricerca matematica. In questo contesto, anche la matematica ricreativa, seppur rimane un'area ben circoscritta, si ridefinisce; si afferma il suo collegamento con la ricerca matematica e con l'educazione matematica, mentre nel contempo si allargano i temi e il coacervo dei problemi. Questa è la fase che ha portato allo sviluppo novecentesco fino al momento attuale, con la pubblicazione molto vivace di raccolte e di periodici di matematica ricreativa.

Il principale artefice del grande rilancio e rinnovamento della matematica ricreativa è il francese Édouard Lucas (1842-1891), il cui contributo si colloca decisamente, come hanno mostrato le ricerche di Anne-Marie Décaillot, nella cornice degli interessi didattici della comunità matematica internazionale – articolata su base nazionale – a cavallo del 1900 (Décaillot 1999, 2014). Egli spicca per la sua personalità e per l'impegno con la neonata *Association Française pour l'Avancement des Sciences* (AFAS), la quale è espressione di un ambiente culturale che ha come scopi la democratizzazione e l'ampliamento dell'attività matematica, e la diffusione della istruzione matematica di base. L'attività dell'AFAS coinvolge scienziati esperti ma anche semplici "dilettanti". Lucas, insieme a Delannoy, Lemoine e Laisant, contribuiscono anche al «Bulletin de la Société mathématique de France» e i loro interventi si diffondono attraverso gli atti (*Comptes rendus*) dei convegni organizzati dall'associazione.

Si è già accennato, dopo la pubblicazione di una nuova edizione di Bachet nel 1874, dell'impatto dell'opera in 4 volumi *Récréations Mathématiques* (si veda Tavola 1.4). Essa apre la strada alla pubblicazione di raccolte di matematica ricreativa di nuova concezione, squisitamente matematiche e con attenzione anche alla storia dei quesiti e dei giochi, in numerosi paesi europei. A ciò non è estranea la grande trama di rapporti in cui era coinvolto Lucas, che emerge dalle dediche presenti nei primi due volumi e nei sei capitoli del quarto volume dell'opera (Tavola 2.2).

Paul Bert (1833-1886), zoologo, fisiologo e politico francese
Baldassare Boncompagni-Lodovisi (1821-1894), principe storico della matematica italiano
Ole Jacob Broch (1818-1889), politico, fisico ed economista norvegese
Pafnutij L'vovič Čebyšëv (1821-1894), matematico russo, membro attivo dell'*AFAS*
Édouard Collignon (1831-1913), ingegnere e membro fondatore dell'*AFAS*, autore di oltre 60 comunicazioni all'interno dell'associazione, di cui è stato presidente nel 1892
Luigi Cremona (1830-1903), matematico e politico italiano
Henry Delannoy (1833-1915), stretto collaboratore di Lucas, matematico e ufficiale dell'esercito francese, membro della *SMF* ed ex-studente dell'École Polytecnique
Jules Develle (1845-1919), politico francese
Louis Dyonis Ordinaire (1826-1896), scrittore e politico francese
Hyppolite Hermary (1840-1895), capitano d'artiglieria ed ex-studente dell'École Polytecnique
Ernest de Jonquières (1820-1901), ammiraglio e vincitore nel 1862 del *Gran Prix dell'Académie des sciences*
Charles-Ange Laisant (1841-1920), stretto collaboratore di Lucas, politico, membro della *SMF,* presidente dell'*AFAS* nel 1904 ed ex-studente dell'École Polytecnique
Paul Mansion (1844-1919), matematico belga e fondatore delle riviste *Nouvelle Correspondence Mathématique* (1874, insieme a Eugene Catalan) e *Mathesis* (1880, insieme a Joseph Neuberg)
Gaston Marquiset (1826-1889), politico francese e membro della *SMF*
Théodore Parmentier (1821-1910), ingegnere, poliglotta, musicista, dalla ricca e variegata carriera militare (generale e ispettore permanente del genio per l'armamento delle coste e membro della commissione per la difesa delle coste), membro dell'*AFAS*
Camille de Polignac (1832-1913), principe, ultimo maggior generale confederato e vicepresidente della *SMF*
Samuel Roberts (1827-1913), matematico britannico particolarmente attivo per la *London Matematichal Society*, nel 1878 ricevette la prestigiosa *Fellowship of the Royal Society (FRS)*
Léon Rodet (1832-1890), matematico, filologo e orientalista, traduttore di sanscrito e ingegnere francese, ex-studente dell'École Polytecnique
James J. Sylvester (1814-1897), matematico britannico di notevole fama e primo professore di Matematica all'università americana Johns Hopkins di Baltimora, membro attivo dell'*AFAS*
Gaston Tarry (1843-1913), francese, membro dell'*AFAS*, perseguì la matematica come un dilettante: in una comunicazione a un congresso dell'AFAS a Parigi nel 1900 provò la congettura di Leonhard Euler che nessun quadrato greco-latino 6×6 è possibile (*il problema dei 36 ufficiali*)[81]
Jules François Viète (1843-1894), giornalista e politico francese

Tavola 2.2 - L'elenco delle dediche di Lucas in ordine alfabetico

[81] Tarry 1900, 1901

Ogni dedica è per una persona diversa, prevalentemente matematici, politici ed ex-studenti dell'École Polytecnique, con molti colleghi stranieri (Cremona, Sylvester, Broch, Čebyšëv, Mansion). Appare in modo evidente (Décaillot 2014) l'influenza dell'ambiente associativo nelle scelte che guidano l'autore francese, poiché molte di queste dediche sono destinate a figure dell'*Association francaise pour l'avancement des sciences (AFAS)* o della *Société mathématique de France (SMF)*. Dietro alle dediche ai politici deputati repubblicani c'è probabilmente lo zampino di Laisant, come evidenziato ancora da Décaillot.

Si tratta di un periodo di grande fermento, di rinnovo del sistema educativo, e, nell'ambito delle idee ispirate a Comenio sulla leçon des choses, ritorna con forza in Francia l'idea che in Gran Bretagna ha avuto ampio riscontro nel Settecento a causa dell'influsso di Locke:

> L'idée selon laquelle l'apprentissage doit conduire à l'abstraction en procédant de l'observation de faits particuliers à la formulation de lois générales, en limitant l'effort de mémoire, est avancée. Le ministre de l'Instruction publique Agénor Bardoux n'a-t-il pas écrit dès 1879 qu'il faut "intéresser l'enfant en l'amusant, exciter et diriger son attention, l'accoutumer à représenter ou à réaliser l'objet de ses conceptions"? Ces idées, sans être nouvelles, sont affirmées et mises en œuvre dans l'exercice de la "leçon de choses" qui devient un credo pédagogique de la fin du siècle. [Decaillot 2014, p. 509]

Décaillot sottolinea che Lucas è sicuramente «in sintonia con i tempi» e nella prefazione al primo volume delle *Récréations Mathématiques* cita le parole che sono state prima considerate di Bachet, e ne condivide gli obiettivi: «la questione della concettualizzazione impone un ricorso necessario alla scienza attraverso la mediazione dell'oggetto ricreativo». Da una parte, poiché la scienza viene ora concepita come fattore di sviluppo nazionale e come vettore di consenso sociale, è cruciale «diffondere l'idea che l'attività scientifica è un'attività sociale e non di svago e che tutti possono partecipare a questo *collectif de pensèe* e diventare "dilettanti" della scienza»; quindi Lucas eredita lo scopo delle vecchie raccolte di Leurechon e di Guyot – le ricreazioni, di cui infatti riprende il titolo – che cercano di rivolgersi al pubblico in generale. Tuttavia, vi è anche uno scopo educativo come in quella di Ozanam:

> Afin d'"éveiller la curiosité endormie", de "charmer en instruisant", la science doit se faire avenante, humaine et même festive. Il s'agit de satisfaire la curiosité, d'éduquer, mais aussi d'émerveiller, de divertir. [Decaillot 2014, p. 512]

Si parla di una scienza che deve lavorare «per suscitare la curiosità addormentata», «per affascinare mentre istruisce»: Édouard Lucas interpreta «a meraviglia il ruolo di mediatore scientifico», con le sue ricreazioni e con un'associazione come l'AFAS dove si possono esprimere liberamente tutti, dilettanti e professionisti; e inoltre si vede la potenziale applicazione della sua raccolta in ambito educativo, come nel caso di Charles Laisant nell'opera *Initiation mathématique* (Auvinet 2017).

Il pubblico di studenti e di insegnanti di matematica elementare – un pubblico ampio e nuovo, in virtù della diffusione dell'istruzione obbligatoria elementare – è citato esplicitamente da Thomas J.

McCormack (1865-1932), il traduttore in inglese della raccolta *Mathematische Mussestunden* di Hermann Schubert (1848-1911), egli stesso un insegnante e preside di una scuola superiore negli Stati Uniti[82]:

> The essays and recreations constituting this volume are by one of the foremost mathematicians and text-book writers of Germany. The monistic construction of arithmetic, the systematic and organic development of all its consequences from a few thoroughly established principles, is quite foreign to the general run of American and English elementary text-books, and the first three essays of Professor Schubert will, therefore, from a logical and aesthetic side, be full of suggestions for elementary mathematical teachers and students, as well as for non-mathematical readers. For the actual detailed development of the system of arithmetic here sketched, we may refer the reader to Professor Schubert's volume Arithmetik und Algebra [...]
>
> The remaining essays on "Magic squares", "The fourth dimension", and "The history of squaring the circle", will be found to be the most complete generally accessible accounts in English, and to have, one and all, a distinct educational and ethical lesson.
>
> In all these essays, which are of a simple and popular character, and designed for the general public, Professor Schubert has incorporated much of his original research. [Schubert 1903, Translator's Note]

I due volumi di matematica ricreativa del giovane Denes König, come ha mostrato Mitsuko Wate Mizuno (2010, 2014), si collocano in maniera decisa su questa scia, e sono frutto del forte interesse per l'istruzione matematica secondaria e per la promozione dell'eccellenza matematica caratteristica dell'Ungheria fra la fine dell'Ottocento e i primi del Novecento, che è stata oggetto di studio negli ultimi anni, anche per i suoi effetti nello sviluppo di una generazione di brillanti studiosi, per la maggior parte emigrati negli Stati Uniti, fra cui lo stesso George Polya (Szénassy 1992; Papp 1999; Israel, Millán Gasca 2012).

Una piega decisamente pedagogica, oltre che popolare e divulgativa, è presente nella fioritura della matematica ricreativa in Russia, ai primi del Novecento. L'interesse per la matematica ricreativa è evidente dalla traduzione russa, pubblicata nel 1877, dell'edizione riveduta di Labosne dell'opera di Bachet, così come anche delle susseguenti traduzioni delle opere di Schubert e di Ahrens. E la matematica ricreativa si connette all'ambiente culturale della Russia pre-rivoluzionaria, attenta al tema dell'istruzione (Karp 2021). Spiccano in tal senso la raccolte di Emelyan Ignatievich Ignatiev (1869-1923)[83], che partecipò attivamente alla rivoluzione, pubblicò nel 1903 a Mosca *Giochi di matematica, intrattenimento e attività* (in russo) e negli anni 1904-1908 i tre celebri volumi della sua opera *Nel regno degli ingegnosi*, *o aritmetica per tutti* (in russo *В царстве смекалки, или арифметика для всех*), i quali furono ristampati poco dopo la sua morte (ultima edizione del 1925), e anche dopo alcuni decenni (Gorev et al 2018). Kordemsky sottolinea che vi si trovano molti quesiti presenti in Bachet e in Lucas, ossia problemi classici, combinati però con altri di

[82] McCormack fu molto attivo, come autore e traduttore, nella divulgazione e nell'insegnamento della matematica, oltre che curatore della ristampa negli Stati Uniti, nel 1898 di un classico di Augustus De Morgan, *On the study and difficulties of mathematics* (1831); si veda McCormack 1910.

[83] Nel sito https://clcl.ru/en/ignatev-emelyan-ignatevich-bolshaya-biograficheskaya-enciklopediya-smotret/ si trovano alcune indicazioni biografiche in russo tratte dalla Grande Enciclopedia Biografica (*Bolshaya biograficheskaya enciklopediya*), corredata da un elenco delle sue opere.

statistica o di macchine calcolatrici, la quarta dimensione e la geometria di Lobacevskij, e persino riguardanti l'arte popolare. Inoltre, Kordemsky osserva che si caratterizza per la sua ricchezza letteraria – anche dovuta al contributo dello scrittore Vladimir G. Korolenko (1853-1921) – e nel contempo il suo stile vivace, popolare molto più accessibile delle due raccolte francesi citate (Kordemsky 1958)[84].

L'uso della matematica ricreativa nel contesto didattico: i contributi fra le due guerre mondiali

Negli anni fra le due guerre si pubblicano i libri di Yakov Isidorovic Perelman (1882-1942), di Giuseppe Peano (1858-1932), di Walther Lietzmann (1880-1959) e già durante la guerra, di Frederik Schuh (1875-1966): tutti con decisa vocazione pedagogica.

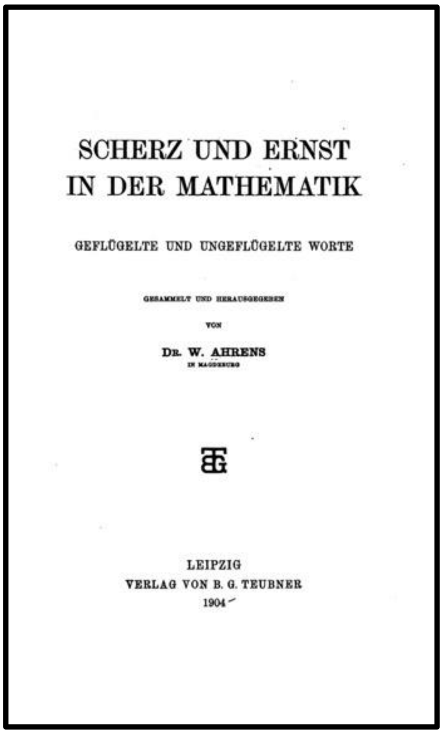
Sulla scia di Ignatiev si collocano i libri di matematica e fisica divertente altrettanto diffusi di Yakov Isidorovic Perelman (1882-1942), a partire dal suo *Fisica per l'intrattenimento* o «fisica divertente» (1913), pubblicati nell'arco di 30 anni. Le sue raccolte "pedagogicamente ponderate" secondo il giudizio di Kordemsky, sono alla base del lavoro di quest'ultimo e, più in generale, della ricerca sugli aspetti pedagogici della matematica ricreativa anche in contesto extra-curricolare che si sviluppò in Unione Sovietica a partire dagli anni Cinquanta.

Lietzmann può essere considerato un esperto di didattica della matematica, una nuova figura nella matematica del dopoguerra (Lambert 2018). Nel 1913 pubblicò, insieme a Viggo Trier, un piccolo libretto prettamente dedicato sull'errore, intitolato *Wo steckt der fehler? Trugschlüsse und schülerfehler*, con esempi concreti, e la sua opera più nota e influente anche nel dopoguerra – nonostante i trascorsi dell'autore durante il nazismo – è *Methodik des mathematischen Unterrichts* (1924, con successive edizioni rivedute). Nel 1922 pubblicò *Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen* presso Hirt (Breslau), opera tradotta in russo ed elogiata da Kordemsky (Kordemsky 1958). Il libro, nato da una conferenza tenuta a Göttingen nel 1921, ebbe numerose edizioni (dalle 187 pagine iniziali alle 276 dell'ultima edizione). Esso, sulla scia di una delle opere di Ahrens (Figura 2.2), contiene battute di contenuto matematico, estratti di romanzi, racconti, saggi, leggende e autobiografie, poesie su argomenti matematici. Ad esempio, viene fornito un estratto dal romanzo *Morte* di Emil Strauss (1866-1969), che descrive la tragedia di un insegnante di matematica che confonde un parallelogramma con un parallelepipedo e crede che l'apprendimento della matematica riguardi la memorizzazione di tabelle di logaritmi. In una recensione dell'opera di Lietzmann sul «Mathematical Gazette» (Broadbent 1933), viene messo in evidenza lo spirito dell'autore:

> And Dr. Lietzinann does his job with gusto, and writes in the spirit of an aphorism of Novalis', quoted on p. 59: "Der ecllte Ilathematiker ist Enthusiast per se". Whether he is presenting us with "The woeful ballad of the two jealous cones […] or even mentioning an American play with characters including the heroine "Plain Geometry", her sister "Anna Lytic Geometry", and a college

[84] Forse si tratta di un commento patriottico-ideologico come era comune nelle opere scientifiche russe, anche dopo la fine dello stalinismo. Kordemsky afferma anche che contiene una serie di affermazioni "metodologicamente inaccettabili" e informazioni matematiche obsolete, e quindi consiglia prudenza se si legge in famiglia, in ambito extrascolastico.

student “Cal. Q. Lus”, there is never any reason to doubt the enthusiasm - we might almost say the high spirits - of the author [Broadbent 1933, p. 144]


SCHERZ UND ERNST
IN DER MATHEMATIK

GEFLÜGELTE UND UNGEFLÜGELTE WORTE

GESAMMELT UND HERAUSGEGEBEN
VON
DR. W. AHRENS
IN MAGDEBURG

LEIPZIG
VERLAG VON B. G. TEUBNER
1904

Figura 2.2 “Matematica per voluttà”. Una prospettiva culturale sulla matematica, combinata con l’accuratezza filologica, caratterizza l’opera di Wilhelm Ahrens. Il titolo della sua originale opera, *Scherz und Ernst in der Mathematik; geflügelte und ungeflügelte Worte* (1904), pubblicata dall’editore specializzato in matematica Teubner di Lipsia, combina la dimensione del serio e del giocoso o scherzoso in riferimento alla matematica.

Nella prefazione Lietzmann richiama l’attenzione sul fatto che alcuni dei compiti proposti nel libro possono e devono essere utilizzati dall’insegnante direttamente nella lezione per interessare gli studenti al materiale oggetto di studio, per colpire la loro immaginazione al culmine della lezione o per liberare la tensione mentale sorta nel corso della lezione.

L’opera di Schuh, *Wonderlijke Problemen; Leerzaam Tijdverdrijf Door Puzzle en Spel* (1943) ha in qualche modo un punto di contatto con la celebre *How to solve it* (1945) di Polya nel capitolo iniziale, dove egli esamina globalmente i problemi “meravigliosi” dal punto di vista più freddo delle varie strategie per risolverli:

> In this book I have endeavoured to show how pure puzzles (that is, puzzles which differ from crosswords, word-play riddles and the like, in that they are not limited to one or more specific languages) can be solved by systematic trial, with the maximum possible assistance from reasoning. This reasoning may often shorten the solving time considerably. Sometimes the reduction is due to the puzzle being put in a simpler form; we may invert it, for example, and solve it backwards. In many cases the solution of the puzzle is found by breaking it up into simpler puzzles; this is a very important strategy, which plays a significant role in mathematics, too. Much attention has been given not only to puzzles, but also to puzzle games (for two players) and their complete analysis. [Schuh 1968/1943, p. III]

Questo tipo di analisi avrebbe sempre portato alla consapevolezza della labilità della linea di confine fra problemi ricreativi e matematica seria o "formale", tanto più nell'ambito dell'insegnamento della matematica:

> no very sharp line can be drawn between pure puzzles and formal mathematics […] Whether one speaks of a mathematical problem or of a puzzle, in such a case, depends on the significance of the question (and, to some extent, also on the nature of the reasoning that leads to the solution); and it is partially a matter of taste as well [Schuh 1968/1943, p. 3]

Spicca per la sua originalità l'approccio di Vera Sanford, ispirato alla sua ricerca storica ma anche alla sua esperienza pedagogica presso la scuola superiore esperimentale della Columbia University. Sanford non pubblica una raccolta di problemi, bensì considera l'uso dei problemi ricreativi nella pratica didattica. Per illustrare brevemente il suo punto di vista, conviene partire da quanto scriveva nel suo vivace e documentato saggio *The teaching of elementary mathematics* (1903), David Eugene Smith, ricordando che l'aritmetica era stata nel passato coltivata, oltre che per motivi pratici, anche come divertimento, ma consigliando di superare quel genere di problemi, su cui invece in seguito si soffermerà per la sua ricerca storica:

> It is not that these problems about the pipes filling the cistern, the hound chasing the hare, the age of Demochares, and the number of nails in the horse's shoe, are not good wit-sharpeners, and possessed of a kind of interest;but we have now a large number of equally good wit-sharpeners possessed of a living interest, problems relating to the life we now live, and to the simple science the pupil is now studying. 'I sometimes feel a doubt, however,' says a recent writer, 'whether boys really enjoy being introduced to such exercises as 'A says to B, how much money have you got? and B makes a very singular hypothetical reply; or to the fish whose body is half as long again as his head and tail together, while head andtail have given relations of magnitude. I cannot but suspect that there is something unpractical in these problems.' These historical problems have some value as history and some interest from their very absurdity, but it is to be hoped that the rising generation of teachers may see them laid aside. [Smith 1903b, p. 218]

Nel saggio citato nel §1.1.1 del 1927, Sanford esprime un punto di vista diverso e più articolato. Si ricordi che nel titolo, si riferisce ai problemi standard in algebra. Come scriveva però nella recensione su «The American Mathematical Monthly» Rosa L. Jackson, il tema di fondo erano i libri di testo scolastici: si trattava in realtà di un'accurata analisi dei problemi a parole che la consuetudine ha tramandato nei libri di testi di algebra, con una riflessione sul perché i problemi facciano parte dell'insegnamento e con una formulazione finale di possibili sviluppi futuri dei problemi scolastici a parole. La prospettiva storica aveva condotto Sanford a identificare tre tipi di problemi: problemi genuini, ossia generati da situazioni reali; puzzles, ossia ricreazioni; e un gruppo intermedio da lei denominato problemi pseudoreali, in cui i fenomeni naturali sono combinati con condizioni innaturali (ad esempio relativi alla leva), gli ultimi arrivati poiché non si ritrovano fino alla fine del Seicento. Jackson sottolineava l'apertura di Sanford a tutti e tre i tipi di problemi:

> [....]in the future puzzle problems will be used because human beings enjoy them; genuine problems will remain because men demand specific and immediate applications of the theory they study; and pseudo-real problems will supplement the other two in providing opportunity for the analytic

thinking that forms the most important reason for teaching algebra. [Sanford 1927, citata in Jackson 1930, p. 446]

Jackson sottolineava l'esempio portato da Sanford sull'insegnamento di un tema standard come le progressioni aritmetiche e geometriche attraverso «such colourful problems instead of the lifeless ones of the usual textbook» (ibidem, p. 445). Inoltre, Sanford affermava che i cosiddetti problemi pseudoreali potevano essere «more real to the student than problems which actually occur in real situations» (ivi). Sono questioni sul rapporto fra la realtà e la sua rappresentazione, sulla vita, che hanno affinità con le riflessioni viste nel §1.2.

Si vuole concludere questo paragrafo riprendendo un lucido e documentato articolo pubblicato nel 1955 su «The Mathematics Teacher» (la rivista del National Council of Teachers of Mathematics, potente associazione professionale fondata nel 1920) da una docente americana di scuola superiore, Jean Parker, la quale a partire da alcuni studi pubblicati negli Stati Uniti prima della guerra pone esplicitamente il problema dell'uso degli indovinelli (puzzles) nell'insegnamento. In particolare, riprende i risultati di un lavoro di stampo sperimentale sull'effetto dell'introduzione della matematica ricreativa sul rendimento scolastico, pubblicato da Rutherford B. Porter (1938). Il miglioramento del rendimento scolastico, osservava Parker, è in realtà uno dei tanti fattori emersi nel lavoro con il gruppo sperimentale e la conclusione indubbia è che «*real mathematics* can be taught through puzzles, wrinkles, and trick problems». Di seguito i cinque risultati principali osservati:

1. The time spent in recreational activities does not inhibit the covering of a prescribed course content; rather, it provides an opportunity for covering much additional material. [emerge qui una delle grandi questioni, ossia quella del "programma" nell'insegnamento della matematica, in particolare nella scuola secondaria dell'obbligo]
2. The use of recreational material is stimulating to the teacher as well as to the pupil. [su questo tema, anch'esso centrale, si è lavorato nella sperimentazione che è descritta nella Parte II]
3. Recreational items may be synchronized with daily assignments, thereby providing a common meeting ground for student and teacher from which a learning situation may progress.
4. Creativeness is encouraged in the pupil as he devises his own recreational items.
5. A form of research is encouraged through the use of recreational material; pupils who have not previously used library facilities have been observed to do so in search for such items. [tema anch'esso di inaspettata attualità] [Parker 1955, p. 219]

In conclusione, Parker si riferisce ad alcune risorse per l'insegnante che desideri trovare materiale relativo ai puzzles, rinviando a riviste e pubblicazioni; sorprendentemente – e con genio pedagogico – al punto 4 e 5 della lista di risorse suggerite, l'autrice scrive:

4. The pupils themselves. With guidance and direction, pupils will submit many interesting items.

5. The teacher. With an underlying source of error of a mathematical principle as a basis, endless problems can be created by the teacher who is interested in this type of work. [Parker 1955, p. 226]

Il tema proposto da Parker era in quegli anni, al di là della cortina di ferro, al centro del lavoro di Kordemsky, sul quale ci si sofferma nel prossimo paragrafo. È il primo di alcuni contributi della seconda metà del Novecento, che considerano progressivamente l'introduzione dei giochi e della matematica ricreativa all'interno della questione più generale del gioco nella istruzione matematica elementare.

2.1.2 Acume, creatività, apprendimento e piacere: Boris Anastasevic Kordemsky (1907-1999)

Boris Kordemsky è un autore russo protagonista assoluto nell'ambito della matematica ricreativa nella seconda metà del Novecento, comunemente visto solo come un ideatore di giochi e indovinelli, senza che vi sia certezza della sua visione pedagogica complessiva. L'analisi è infatti condizionata dal fatto che i suoi lavori pedagogici sono disponibili solo nell'originale russo, mentre i suoi commenti in raccolte di giochi tradotte all'estero sono stati depennati, per motivi editoriali dovuti al pubblico cui erano diretti. Infatti, Kordemsky è visto come l'alter ego dello statunitense e quasi coetaneo Martin Gardner (1914-2010), che curò la traduzione e pubblicazione della sua più celebre raccolta, quando in realtà il loro profilo culturale non è del tutto identificabile. Boris A. Kordemsky, nato dieci anni prima della Rivoluzione d'Ottobre, era figlio di un sacerdote (Anastasij Ivanovic) e apparteneva a una famiglia di insegnanti di scuola elementare di Kiknur (nella regione-*oblast* di Kirov), circa 700 km a est di Mosca[85]. Diplomato alle scuole superiori nel 1924, dal 1926 al 1930 studiò presso il Dipartimento della II Università statale di Mosca (oggi Università pedagogica statale di Mosca): da studente liceale e poi preparandosi per diventare insegnante, visse quell'ambiente riformista in pedagogica che Alexander Karp descrive in questi termini:

> After the revolution of 1917, an attempt was made to establish a new socialist school, which rejected the traditions of drills and rote memorization, characteristic of the old pre-revolutionary approach. The theoretically "new" approach was in fact a strange blend of
>
> – American progressive education;
>
> – ideas developed by the international reform movement, which arose from the International Commission on Mathematics Instruction;
>
> – certain traditions of Russian pre-revolutionary democratic pedagogy;
>
> – and Soviet phraseology, often in a rather primitive form [Karp 2021b]

Inoltre, nei primi decenni del secolo circolavano in Russia i libri di matematica ricreativa di Ignatiev e di Yakov Isidorovic Perelman (1882-1942), oltre alla traduzione in russo del libro *Initiation mathématique* di Charles Laisant.

---

85 Questo paragrafo si basa sulle fonti secondarie Marushina 2012, Shortz & Grabarchuk 2004. Nella biblioteca elettronica russa *koob.ru* creata nel 2009 (o prima?) da Vladimir Nikonov e Georgy Efimov si trova una bibliografia di 11 libri di Kordemsky, corredata da una nota biografica (Nikonov & Efimov 2009?). Il nome della biblioteca elettronica in italiano si traduce come "Il cubo", la biblioteca contiene oltre 51.000 opere russe di narrativa, scientifica e didattica, principalmente di psicologia e filosofia. Inoltre, c'è un aspetto singolare che la caratterizza: il 2 gennaio di ogni anno Nikonov mette a disposizione un link per scaricare l'intera libreria digitale: https://www.b17.ru/blog/koob_2022/

Nei primi anni della carriera di insegnante di Kordemsky – un anno, 1931, in Kuzbass e dal 1932 fino all'entrata in guerra dell'Unione Sovietica presso la scuola di Mosca n. 353 – iniziò quel capovolgimento che si inquadra nella deriva stalinista in Unione Sovietica:

> schools were redirected toward the old ways, and all of these experiments were rejected as left-wing perversions, and their authors were denounced as schemers. [ivi]

Durante i primi anni di guerra lavorò come elettricista in un impianto di difesa, ma nel gennaio 1943 fu chiamato presso l'Accademia Militare di Difesa Chimica dell'Armata Rossa[86], dove insegnò per oltre trent'anni, di cui quasi la metà come capo del Dipartimento di Matematica Superiore, combinandolo con l'insegnamento in altre istituzioni educative di Mosca. Il suo interesse per la matematica ricreativa, che lo portò a scrivere e collaborare con altri studiosi, si iscrive in questo contesto educativo: non a caso, per più di trent'anni si occupò della rubrica sugli "intrattenimenti" nella rivista «Matematica a scuola» in russo[87]. L'ambiente culturale russo in cui si iscrive la sua attività e il profilo di Kordemsky è stato mostrato efficacemente da Albina Marushina attraverso un episodio significativo, che riguarda lo scambio fra Leonid Vitalievic Kantorovich (1912-1986), un docente dell'Università di Leningrado (l'attuale San Pietroburgo) che negli anni Trenta aveva sviluppato la programmazione lineare[88] e Kordemsky:

> In 1951 Kantorovich, in collaboration with another mathematician from Leningrad (St. Petersburg), V. A. Zalgaller, published a small book entitled *Rational cutting out of industrial materials*. This book described, in a popular and affordable format, how some ideas of linear programming could be applied to real world problems (this terminology — the phrase "linear programming" — was not yet in use at the time). Already in 1952, Kordemsky and Rusalev published an epilogue based on the book of Kantorovich and Zalgaller in their book, *The wonderful square*. [...]
>
> Kantorovich, in turn, was also interested in Kordemsky's work. On July 28, 1954, he published a positive review of Kordemsky's *Mathematical acumen*, which had just come out, in «Komsomol'skaya pravda», the leading youth-oriented newspaper of the time. In this review, which was entitled "Mathematical acumen and life," Kantorovich expressed his hope that this book would "contribute to the awakening in our youth of the taste for and enjoyment of mathematics." He specifically praised Kordemsky for including many problems taken from the real world and called for including even more practical tasks.
>
> In response to this review Kordemsky (1954b) wrote a letter to Kantorovich (this letter was published only relatively recently). In this letter he thanked Kantorovich for his review, responded to some of his critical comments, and most importantly, asked for his assistance in finding real world problems. Kordemsky wrote that he had used Kantorovich's works in his other book also, but could not simply repeat them in the new one. Therefore, he needed to find new interesting problems. [Marushina 2012]

---

86 Questo stabilimento militare ad alta componente scientifico-tecnica dedicato alle armi e alla difesa in campo chimico, creata nel 1932 è tuttora esistente (Accademia militare di radiazioni, difesa chimica e biologica "S. K. Timosenko" https://varhbz.mil.ru/), nacque da una sinergia dei dipartimenti di chimica di due istituzioni preesistenti: l'Accademia militare tecnica e l'Istituto tecnico superiore "N. E. Bauman" di Mosca (oggi Università tecnica statale moscovita Baumann, stabilimento di istruzione tecnica che attraverso la rivoluzione, deriva dall'Istituto tecnico imperiale moscovita fondato nel 1868 a partire da istituzioni precedenti risalenti all'età di Caterina la Grande).

87 Egli pubblicò anche articoli in riviste di divulgazione in russo quali «Kvant», «Il giovane tecnico», «Scienza e vita» e voci nell'*Enciclopedia dei bambini*.

88 Un metodo della moderna ricerca operativa, si veda Millán Gasca 2003a/b, 2009.

Il grande successo di «Matematicheskaya smekalka»: lo sviluppo dell'"acume matematico"

Dopo il libro citato da Marushina sul quadrato, in collaborazione con N. V. Rusalev, nel 1954 (a pochi mesi della morte di Stalin), Kordemsky pubblicò il suo libro più celebre dall'editore di Mosca Gosudarstvennoe Izdatel'stvo fiziko-Matematicheskoy Literatury (Государственное издательство физико-математической литературы) sotto il titolo *Matematicheskaya smekalka* ("esperto in matematica"). Questo libro dal successo strepitoso nel proprio paese fino a oggi, si caratterizza perché, oltre a raccogliere molti quesiti del grande patrimonio della matematica ricreativa, ne aggiunge molti di nuovi (in questo è paragonabile al lavoro di Lucas alla fine dell'Ottocento):

> It first appeared in 1954 (not 1956, as is sometimes stated), just after the post-Stalin thaw in the Soviet Union, in an edition of 150,000 copies, which quickly sold out. A second edition in 1955 sold a similar number, as did a third edition in 1956. Altogether more than 10 editions have appeared in Russia to date, most recently in 2000. The book has been translated into Ukrainian, Bulgarian, Romanian, Hungarian, Czech, Polish, German, French, Chinese, Japanese, Korean, all the Baltic languages, English (under the title The Moscow Puzzles, edited by Martin Gardner, first published in 1972), and others. Mathematical Quick-Wits is a giant (500+ pages) collection of math puzzles of many kinds – magic squares, cryptarithms, dissections and other geometrical challenges, puzzles with dice and dominoes, matchstick problems, algebraic problems, and assorted brainteasers. Gardner called it "marvelously varied." Knowledgable solvers recognized some of the puzzles as the original inventions of the American Sam Loyd, the British Henry E. Dudeney, the Belgian Maurice Kraitchik, and others. But undoubtedly a significant number of the puzzles were new.
>
> While the book was hugely entertaining, its purpose was mainly didactic. In the introduction Kordemsky said: 'All materials in this book are devoted to the educational aim -- to spur creative thinking, to further perfection of mathematical knowledge ....'. [Shortz, Grabarchuk 2004]

Il libro è stato tradotto al di fuori dell'Unione Sovietica con il titolo "giochi matematici russi" oppure *gli enigmi di Mosca*[89], usato nella edizione inglese del 1972 curata da Martin Gardner, che aumentò decisivamente la sua fama. Kordemsky scelse in realtà una parola russa nel titolo originale, ovvero *smekalka*, che sta ad indicare acume o ingegno (un po' come nell'intestazione della collezione di problemi di Alcuino) e che si trovava nella celebre opera in tre volumi di Ignatiev (si veda §2.1.1)[90]. Lo scopo dichiarato dall'autore – non è ripreso nelle edizioni disponibili, che contengono soltanto la collezione di problemi – è relativo alla conoscenza della matematica, ma con l'accento posto sulla creatività, sulla capacità di trovare soluzioni in modo autonomo, come nel libro di George Polya pubblicato in inglese nel 1945 negli Stati Uniti. Indubbiamente però vi è l'elemento del piacere e del gioco, come sottolineato

[89] Scrive Maroushina: «Probably the most famous collection of problems authored by Kordemsky (1954a) was translated into English as early as 1972, under the title *The Moscow Puzzles*. The editor of the translation, Martin Gardner, provided an introduction in which he described Kordemsky's biography and contribution. Some details, however, were not quite accurate there. Specifically, the first edition of the book in Russian appeared in 1954 rather than 1956, as Gardner wrote, and although Kordemsky indeed taught in secondary schools for some time, he can hardly be characterized as a high school teacher (as Gardner wrote) because during a much longer period he taught in higher educational institutions. What is true, in any event, is that Kordemsky was indeed one of the most important contributors to recreational mathematics. His name can be listed alongside the Russians Ignatiev and Perelman, the British Dudeney, and the Americans Loyd and Gardner».

[90] Tradotta variamente in inglese con acumen, wit, quick-wit, insight, intelligence.

da Kantorovic nella sua recensione, e anche l'attenzione ai contesti extrascolastici o di tempo libero. Nella sua tesi di dottorato sui "compiti extracurriculari per l'ingegno"[91], discussa tre anni dopo, si collega già nel titolo all'incoraggiamento dell'iniziativa matematica negli adolescenti e negli adulti che sono al centro della educazione popolare: l'educazione matematica e il gusto per la matematica hanno un sostegno sicuro nei problemi o questioni piacevoli e "sfidanti", siano essi di vita reale o pratica o indovinelli e mirabilia, ogni aspetto in grado di coinvolgere e sollecitare nel lettore/alunno lo sviluppo dell'acume (*smekalka*), e quindi di fare apprezzare la matematica. Egli pubblicò anche due raccolte di problemi per prepararsi agli esami (in collaborazione con Viktor K. Egerev e Vladimir V. Zaistev) per i concorsi negli istituti tecnici e per gli alunni di secondaria (gradi 8-11), tratti dalla raccolta del prolifico autore russo Mark Ivanovic Skanavi (1912-1972). E numerosi libri nei cui titoli si parla del fantastico mondo dei numeri, di affascinare gli studenti, di lusinghe matematiche, di vite di grandi matematici oppure della geometria che viene in aiuto dell'aritmetica, fino al libro postumo *Matematicheskiye zavlekalki* (Seduzioni matematiche, 2000); sono libri per la scuola, ma anche per i momenti di vita extrascolastica o tempo libero, ossia per i circoli matematici, i contesti studiati da Pelay (2011), uno scenario che è stato sfruttato anche nella sperimentazione presentata nella seconda parte della tesi.

La pedagogia kordemskyana: "iniziativa matematica" ed educazione all'attività mentale creativa

Figura 2.3 - La copertina in russo della raccolta di Kordemsky *Очерки о математических задачах на смекалку* (titolo in italiano *Saggi sui problemi matematici per l'ingegno*)

Le riflessioni pedagogiche di Kordemsky sono contenute in una raccolta dal titolo *Saggi sui problemi matematici per l'ingegno* (in russo, Figura 2.3):

[91] Non esiste una traduzione dal russo di questo lavoro del 1957 dal titolo *Compiti extracurriculari per l'ingegno come una delle forme di sviluppo dell'iniziativa matematica negli adolescenti e negli adulti* (in russo *Внеучебные задачи на смекалку как одна из форм развития математической инициативы у подростков и взрослых*), ma il suo contenuto è stato riproposto nella raccolta del 1958 *Saggi sui problemi matematici per l'ingegno* (in russo *Очерки о математических задачах на смекалку*), di cui è stato possibile recuperare il testo dell'opera caricato in linguaggio html nella raccolta di libri dell'URSS curata da Vladislav Yuryevich Shebashov (n. 1958 a Leningrado), scrittore russo noto sotto lo pseudonimo di Boris Karlov all'indirizzo https://sheba.spb.ru/shkola/matemat-ocherki-1958.htm. Si riportano estratti dalla traduzione automatica realizzata attraverso Google.

Così scrive Kordemsky nella prefazione:

> Nella teoria della pedagogia, la tecnica pedagogica creativa include, in particolare, l'organizzazione di attività extrascolastiche divertenti e utili che sono interessanti per gli studenti. Ma quali attività divertenti ti fanno bene? Quali sono le caratteristiche pedagogiche generali dei problemi extracurriculari come "l'intrattenimento matematico"? In che modo influenzano lo sviluppo matematico e, in generale, lo sviluppo dell'attività mentale?
>
> In questo libro si cerca di svelare il contenuto delle domande poste, di mostrarne l'attualità e il collegamento con alcuni principi e leggi della psicologia dell'educazione, di aiutare l'insegnante (come insegnante di adolescenti e come consulente per i genitori in materia di educazione ai problemi) per ottenere la risposta giusta e conclusioni utili. [Kordemsky 1958][92]

Molto interessante è la definizione del concetto di "iniziativa matematica" introdotta dall'autore:

> Come elemento del pensiero matematico, l'iniziativa si esprime nel desiderio di comprendere da soli il problema, nel desiderio di cercare autonomamente modi e mezzi per risolvere i problemi. La flessibilità e la criticità della mente si esprimono nell'invenzione e nell'applicazione di tecniche non stereotipate, originali, spiritose per risolvere problemi e metodi di ragionamento con verifica costante della loro correttezza, rigore e valore pratico.
>
> Tutti questi elementi essenziali del pensiero matematico di un adolescente o adulto in combinazione con sforzi volitivi: persistenza e perseveranza mostrate nel superare le difficoltà che sorgono nel processo di padronanza dei metodi matematici nella risoluzione dei problemi, accetteremo di chiamare brevemente in futuro: iniziativa matematica.
>
> In molti tipi di attività pratica e mentale, una persona ha bisogno di un'iniziativa matematica.
>
> Lo sviluppo e l'educazione dell'iniziativa matematica contribuisce all'emergere dell'interesse di un adolescente o adulto per la matematica e le sue applicazioni, eleva le qualità generali della mente e della volontà a un livello superiore. L'educazione all'iniziativa matematica è alla base dell'educazione matematica di massa, che, a sua volta, è il fondamento dell'educazione politecnica del popolo. [ivi]

A supporto dello sviluppo dell'iniziativa matematica Kordemsky propone nel primo capitolo una citazione da una tesi intitolata "Metodo, forme e contenuto del lavoro dei circoli matematici sulla matematica elementare e gli inizi della superiore" (Andreevsky 1954):

> Lo sviluppo a tutto tondo dell'attività e dell'indipendenza degli studenti, fornito da compiti attenti e ben ponderati di difficoltà sempre crescenti, ma fattibili per loro - questo è un altro principio dell'insegnamento della matematica, che dovrebbe essere guidato da un insegnante nel suo lavoro

E cita anche Ahrens 1911:

> Naturalmente, il compito dell'insegnamento della matematica e dell'insegnante che guida questo insegnamento è suscitare l'interesse degli studenti per conclusioni indipendenti, sviluppare la loro curiosità e soddisfazione dal lavoro indipendente

Successivamente presenta un elenco degli strumenti che contribuiscono allo sviluppo matematico:

1. Circoli matematici, olimpiadi e concorsi
2. Serate matematiche
3. Libri di divulgazione scientifica
4. Saggi di matematica e sezioni "Nel tempo libero" su riviste e giornali
5. Raccolte di intrattenimento matematico, giochi e compiti di intrattenimento (compiti per l'ingegno)

---

[92] Qui e nel seguito con Kordemsky 1958 si intenderà sempre la traduzione automatica menzionata nella nota 91.

6. Riviste di matematica popolare di massa

7. Poster e riviste scolastiche

8. Promozione delle conoscenze matematiche nei club e alla radio

[Kordemsky 1958]

Il libro di Kordemsky si occupa solamente di uno di questi strumenti, ovvero i "problemi extracurriculari di matematica":

> I problemi extracurriculari di matematica contengono esercizi mentali per coloro che amano la matematica e per i "nemici" della matematica, per coloro che sono bravi a capire e per coloro che hanno bisogno di ulteriore aiuto per sviluppare la propria intelligenza.
>
> Sia gli insegnanti sia gli studenti necessitano di esercizi matematici extracurriculari, correttamente selezionati metodicamente, che possano soddisfare una varietà di esigenze mentali e diversi livelli di sviluppo degli studenti. In accordo con questi requisiti, i problemi matematici didattici si suddividono naturalmente nelle due seguenti categorie:
>
> Prima categoria. Problemi che sono adiacenti al corso di matematica della scuola, ma con maggiore difficoltà, come i problemi delle olimpiadi matematiche.
>
> Seconda categoria. Problemi del tipo di intrattenimento matematico. [ivi]

La categoria più interessante per il lavoro di questa ricerca è ovviamente la seconda per la dimensione popolare, perché

> non implica una grande formazione matematica. Ciò include compiti di vario grado di difficoltà e, prima di tutto, gli esercizi iniziali del ciclo di esercizi extracurriculari che sviluppano l'iniziativa matematica, cioè esercizi progettati per coloro che stanno appena muovendo i primi passi nel mondo dell'ingegnosità matematica; esercizi adatti ad un ragionevole riempimento del tempo libero.
>
> Ciò non significa, tuttavia, che solo gli esercizi leggeri siano inclusi nella seconda categoria di compiti. Qui ci sono problemi con soluzioni molto difficili e tali problemi, la cui soluzione non è stata ancora ottenuta (una sorta di "noci crude").
>
> [...] i problemi matematici educativi della seconda categoria hanno una serie di tratti pedagogici caratteristici, in particolare, hanno la proprietà da una parte di affascinare con la matematica sia gli adulti sia gli adolescenti, che non hanno ancora mostrato interesse per questo argomento, e dall'altra di muovere nei soggetti già "istruiti" il desiderio di esercizi mentali e di uno studio sistematico della matematica. [ivi]

Viene così descritto il ruolo dei problemi eccezionali nella formazione di un'iniziativa matematica, si invita a farne un uso anche e soprattutto nel tempo extrascolastico, nell'ambiente domestico e nel periodo post-scolastico, magari in vista dell'ingresso all'università come scrive Kolmogorov:

> Indipendentemente dalla partecipazione ai circoli, puoi impegnarti nella soluzione indipendente di problemi più difficili. Ci sono diverse interessanti raccolte di problemi per gli amanti della matematica. Alcuni di loro sono scritti in modo che il lettore. risolvendo problemi che sono costantemente collegati tra loro, può immaginare vividamente le modalità di sviluppo di teorie matematiche piuttosto complesse. [Kolmogorov 1952, *Sulla professione di matematico (per aiutare chi entra nelle università)*, p. 10, in Kordemsky 1958]

Kordemsky riporta poi alcuni esempi di persone che hanno scoperto la loro vocazione scientifica trovando una soluzione originale a un problema eccezionale:

> Così, per esempio, Poisson ha portato in matematica il vecchio problema di dividere il vino in due parti uguali usando due recipienti vuoti di capacità diversa. Secondo Arago, il giovane Poisson

> inizialmente ha mostrato abilità estremamente limitate in tutto, ma dopo aver abilmente risolto questo problema, ha trovato la sua vera vocazione. [Kordemsky 1958]

Allo stesso tempo a partire dalla richiesta di risoluzione di problemi eccezionali è possibile comprendere e scoprire concetti matematici nuovi e coltivare interesse per uno specifico problema teorico. È così che diventano interessanti i sistemi di numerazione se servono a risolvere un determinato problema ad esempio con il binario, alcune proprietà topologiche delle figure geometriche (conservazione delle proprietà per eventuali distorsioni della figura che non comportino rotture o "incollaggi" delle sue parti) se permettono di affrontare al meglio il problema del disegno di una figura con un solo tratto o la teoria dei labirinti.

Kordemsky dedica poi un capitolo del suo saggio alle "caratteristiche pedagogiche dei problemi matematici con ingegno":

> Le caratteristiche pedagogiche dei compiti matematici esperti includono: concretezza, capacità di suscitare interesse in un argomento, rendere interessante il processo di soluzione, divertimento e accessibilità generale. Inoltre, la raccolta di problemi di matematica può includere problemi di contenuto politecnico. [ivi]

Ogni caratteristica viene descritta nel dettaglio della matematica e vengono mostrati esempi e problemi collegati.

> La fase iniziale del pensiero è sempre concreta. La concretezza apre la strada all'astrazione, una delle qualità più importanti del pensiero nelle sue forme più elevate. La concretezza dei problemi matematici si manifesta principalmente nelle loro connessioni con oggetti e processi del mondo reale, ma questi sono anche numeri, figure, azioni.
>
> [...] Di grande valore educativo sono quei compiti, il cui contenuto è suggerito dalla vita reale, dalle attività multiformi delle persone. [ivi]

A titolo di esempio si vuole riportare anche uno dei due problemi-racconti presentati da Kordemsky per documentare al meglio la caratteristica della concretezza:

> RICOMPENSA COSTOSA
>
> Quando Nuria Saradzheva era ancora un'adolescente, lei, come il famoso Mamlyakat, fu una delle prime nella sua fattoria a utilizzare un metodo più avanzato di raccolta del cotone. Come ricompensa, Nuria ha ricevuto un buon tappeto realizzato da meravigliosi tessitori di tappeti turkmeni. Questo primo premio è stato molto apprezzato da Nuria. Ora è cresciuta e lavora come agronoma nella sua fattoria d'origine. Il tappeto, ovviamente, è con lei, per terra nel suo laboratorio.
>
> Una volta, facendo qualche ricerca, Nuria ha versato dell'acido sul tappetino e questo si è bruciato proprio nel mezzo. Ha dovuto ritagliare la parte danneggiata dal centro del tappeto. Il risultato è un grande foro rettangolare 1 x 8 pollici (Fig. 16 [qui Figura 2.4]).

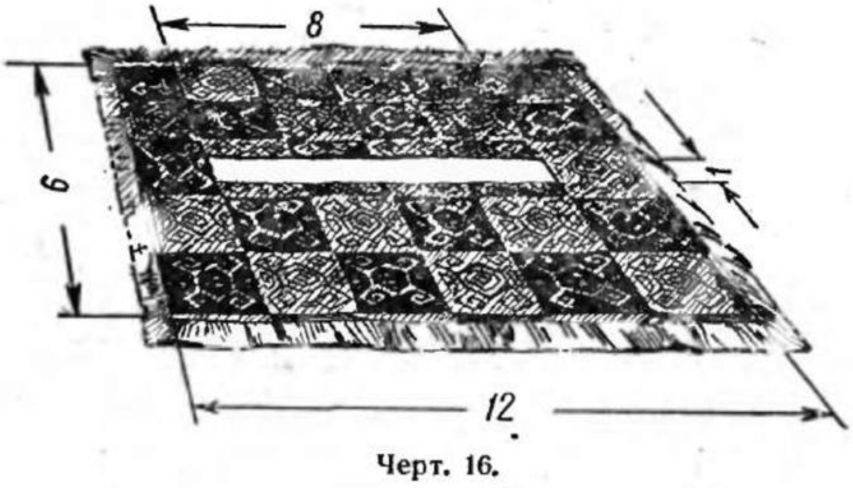


Figura 2.4 - La figura 16 del tappeto di Nuria

Ma Nuria non ha abbandonato il suo tappeto. Con molta abilità ha tagliato in due la parte rimanente del tappeto in modo che le nuove parti ottenute, una volta piegate insieme, formassero un quadrato. Le cuciture erano impercettibili, e di nuovo era un bel tappeto. Come ha fatto? [ivi]

La seconda caratteristica è l'induzione:

Un adolescente o un adulto che cerca autonomamente una soluzione sconosciuta a un problema, anche se qualcuno l'ha già risolto, esegue un processo creativo elementare. Il punto di partenza di questo processo di pensiero è la semplice induzione, cioè il passaggio da un certo numero di casi particolari alla posizione generale che li racchiude. L'induzione, a sua volta, si basa sull'osservazione. Per sottoporre qualsiasi proprietà a un test induttivo, bisogna prima notarlo. Quindi, iniziando a risolvere il problema, spesso ne riproduciamo la condizione praticamente, sugli oggetti, su un disegno, cercando prima di tutto di notare, osservare quelle relazioni che dovranno essere sostanziate in seguito. Assimilando una certa posizione generale, una regola, la osserviamo prima in una serie di esempi particolari.

Nel corso della risoluzione di un problema, il processo di generalizzazione, come sai, viene spesso eseguito utilizzando l'induzione matematica o completa, la conclusione ottenuta in questo modo è già deduttiva. La semplice induzione stessa non ha potere probatorio, ma fornisce un punto di partenza per la deduzione.

A causa della concretezza del contenuto dei compiti matematici, esperto, abbiamo in questa raccolta un insieme sufficiente di esercizi per l'uso del metodo induttivo, per lo sviluppo dell'osservazione e la capacità di eseguire generalizzazioni. Sullo stesso argomento si può formulare un problema sia come un puzzle pubblico che ammette una soluzione sperimentale, sia come una serie di problemi via via più complessi che portano alla giustificazione dell'algoritmo, e magari alla costruzione di una teoria appropriata. [ivi]

Sperimentare il metodo induttivo vuol dire per Kordemsky:

Ottenere conclusioni dalle osservazioni, trovare modelli nei processi di risoluzione di una serie di problemi simili, stabilire connessioni e nuove proprietà, cercare possibili generalizzazioni: tutti questi sono elementi della creatività matematica che contribuiscono allo sviluppo dell'iniziativa e dell'attività matematica.

Anche se la soluzione non funziona o le osservazioni non si prestano alla generalizzazione, è utile pensare a possibili generalizzazioni e connessioni, sono utili gli sforzi per trovare una soluzione, è utile anche l'assimilazione attiva della soluzione esistente. [ivi]

Nessun passaggio del fare matematica è risparmiato a chi si cimenta con un compito di matematica extracurriculare: «esperienza, contemplazione, accumulo di osservazioni, consapevolezza dei risultati delle osservazioni, comprensione dei fondamenti teorici del materiale contemplato e ulteriormente, se necessario, una nuova, arricchita, applicazione della conoscenza alla pratica».

All'inizio del paragrafo dedicato all'«interesse», Kordemsky riporta una citazione celebre di Konstantin Dmitrievich Ushinsky (1824-1871), insegnante russo e ucraino, fondatore della pedagogia scientifica in Russia.

> "Nessun mentore deve dimenticare che il suo compito principale è abituare gli alunni al lavoro mentale e che questo compito è più importante del trasferimento della materia stessa". Qui Ushinsky sottolinea che il lavoro mentale è forse il lavoro più duro per una persona. [ivi]

Sempre Ushinsky affermava:

> È facile e piacevole sognare, ma è difficile pensare. Non solo nei bambini, ma anche negli adulti, incontriamo più spesso la pigrizia del pensiero. È più probabile che il ragazzo lavori fisicamente tutto il giorno o si sieda, senza pensare, davanti alla stessa pagina per diverse ore e la memorizzi meccanicamente piuttosto che pensi seriamente per diversi minuti. Inoltre, il lavoro mentale serio stanca una persona qualsiasi più velocemente del lavoro fisico più pesante. [Bondarenko 1977, p. 1]

Kordemsky insiste molto sull'interesse in quanto le sue ricreazioni riguardano prevalentemente il tempo extracurriculare e dunque non si tratta di risolvere problemi "obbligatori" nell'ambito scolastico. Non sarebbero potute esistere attività extrascolastiche per secoli senza essere interessanti, accattivanti. Si ritrova verosimilmente l'influenza di Polya sul tema del desiderio di risolvere un problema e sulla «passione per il processo di risoluzione».

> La crescita dell'interesse è contemporaneamente accompagnata dall'emergere di nuove domande e da un desiderio avido di ottenere risposte ad esse, ovvero un aumento del sentimento di insoddisfazione per quanto realizzato, che a sua volta ora diventa uno stimolo per ulteriori riflessioni e ricerche di qualcosa di nuovo.
>
> Questa unione di piacere e insoddisfazione, che contiene l'unità e la compenetrazione degli opposti, nel risolvere la contraddizione che ne deriva, è la molla motrice sia dell'interesse stesso che dell'attività ad esso associata. [Kordemsky 1958]

Emerge, si sviluppa e cresce l'interesse per la matematica attraverso attività realizzate intorno a giochi matematici, a problemi di matematica ricreativa. In Russia è significativa al riguardo anche l'esperienza dei circoli di matematica.

Non c'è dubbio che il divertimento debba fare coppia fissa con l'interesse nel contesto delle ricreazioni matematiche, anche nel contesto dei problemi "eccezionali" di Kordemsky:

> Se abbiamo in mente un divertimento non vuoto "per passatempo", allora il divertimento del contenuto del compito o il divertimento della forma della sua "presentazione" serve agli stessi scopi pedagogici dell'interesse. [...]
>
> Attraverso il divertimento, un senso di bellezza in matematica penetra nella coscienza, che, nello studio successivo dell'argomento, è completato da una comprensione del bello. Gli elementi estetici del divertimento includono: l'umorismo leggero della trama, l'imprevedibilità della situazione o il

risultato fornito dalla soluzione del problema, l'armonia della forma geometrica, la grazia della soluzione, intesa come combinazione di semplicità e originalità delle modalità per ottenerlo. [ivi]

Il divertimento è connesso con la bellezza e questa è un'esperienza peculiare del fare matematica: è divertente affrontare un problema bello per la ricchezza e l'imprevedibilità delle strade che ci portano alla sua soluzione, per la "grazia della soluzione", ma anche per la forma con cui ci viene proposto, per il carattere poetico e in alcuni casi leggendario del racconto in cui il problema viene collocato. Kordemsky a tal proposito riporta diversi esempi dalla tradizione indiana, ma è sufficiente pensare anche semplicemente al *problema del lupo, della capra e del cavolo* o al *problema di Giuseppe*.

Problemi di intrattenimento possono e devono avere spazio anche nella scuola secondaria di secondo grado. A supporto di quest'affermazione Kordemsky riporta alcuni estratti di una tesi intitolata "Lavoro extracurriculare in matematica nelle classi superiori della scuola secondaria" (Afonina 1952).

Nella parte conclusiva del paragrafo dedicato al "divertimento" l'autore mette in guardia dai «falsi divertimenti» che portano alla «volgarizzazione delle proposizioni matematiche, alla semplificazione, alla sciatteria della presentazione, in una parola all'erroneità matematica». Per spiegare cosa intende riporta un esempio di semplificazione eccessiva che va oltre i confini della correttezza matematica con l'intento di divertire e con il risultato di ottenere l'effetto contrario, quello del «mostruosamente ridicolo» e inaccettabile neanche come scherzo matematico:

> Nella rivista "Ogonyok", 1953, n. 26, veniva proposto ai lettori il seguente problema: "Come sottrarre 45 da 45 (la somma che è composta dalla somma dei numeri da 1 a 9) per fare 45 alla fine?"
>
> La seguente "soluzione" è posta nel n. 27 della rivista:
>
> $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ e $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$
>
> $8 + 6 + 4 + 1 + 9 + 7 + 5 + 3 + 2 = 45$
>
> Qui, a sinistra delle uguaglianze, la seconda riga viene sottratta dalla prima, come se si trattasse dei numeri 987654321 e 123456789. Ne risulta un numero la cui somma delle cifre è uguale sia a quella delle cifre del minuendo sia a quella delle cifre del sottraendo. [ivi]

Un'altra caratteristica messa in evidenza da Kordemsky è l'«accessibilità pubblica», il "per tutti" per riprendere il titolo di questo lavoro. Si tratta qui del fatto che la soluzione della maggior parte dei problemi di intrattenimento richiede una base matematica molto modesta, principalmente aritmetica e in piccola parte algebrica e geometrica. Attenzione però a non confondere accessibilità con semplicità:

> L'accessibilità non è la stessa cosa della facilità di soluzione. La soluzione di alcuni problemi può essere semplice, comprensibile, ma non tutti possono capire come risolvere il problema, poiché per risolvere problemi di ingegnosità matematica, spesso non è sufficiente utilizzare metodi familiari e ingegno. Si richiede intraprendenza, perseveranza, flessibilità di pensiero, manualità. [ivi]

L'ultimo aspetto è il «politecnismo», ovvero il contributo che l'insieme di problemi eccezionali di Kordemsky offre per affrontare i problemi dell'educazione politecnica. Naturalmente le attività mentali, risolte principalmente nell'immaginazione non possono e non devono sostituire le vere attività di produzione eseguite da mani, strumenti, dispositivi, ma preparano azioni pratiche, le completano. La raccolta di problemi ingegnosi di matematica si arricchisce gradualmente di esercizi che rafforzano la comprensione del lettore delle reali relazioni tra cose e processi, compiti, sviluppano abilità progettuali e coinvolgono il lettore in azioni pratiche. [ivi]

Gli studenti riferiscono di aver applicato quanto appresso attraverso i compiti extracurriculari in problemi concreti come la misura dell'altezza di un albero o la larghezza di un fiume. Allo stesso tempo fioriscono metodi originali per l'accatastamento della legna, per il calcolo del peso del fieno, per il taglio razionale dei materiali industriali. A questo proposito Kordemsky fornisce un esempio concreto con un calcolo speciale per ottenere il taglio più economico di fogli di metallo rettangolari, rimandando alla pubblicazione con Rusalev per maggiori dettagli (Kordemsky, Rusalev 1952). Altri esempi riportati sono legati alle macchine per disegnare curve e alla marcatura del legno.

Nell'ultima parte del saggio, avvalendosi anche dei risultati della ricerca di una tesi intitolata "Sulla questione della natura psicologica dello sviluppo matematico negli scolari" (Stepanov 1952), viene affrontato il tema di come i problemi di intrattenimento possano contribuire a un incremento della cultura matematica degli studenti. Lo studio di Stepanov ha riguardato il materiale dei problemi geometrici e l'idea è piuttosto semplice: quando si studia un certo argomento si vedono teoremi e regole e poi si risolvono «problemi tipici», ovvero problemi «la cui soluzione si basa principalmente sull'applicazione della teoria appena studiata». Così si formano diversi «gruppi di associazioni» che però non sono messi in rete, in rapporto tra loro: si definiscono dunque conoscenze e abilità «a grappolo», che non permettono ad uno studente di risolvere problemi di maggiore difficoltà rispetto a quelli del relativo grappolo.

Per risolvere con successo problemi di maggiore difficoltà, è necessaria la facilità di transizione dalle associazioni di un cespuglio alle associazioni di un altro, cioè sono necessarie "associazioni inter-arbustive" o "intersistemiche" sviluppate. Questo è il nome delle associazioni che collegano sezioni separate del programma, unendo cespugli disparati di associazioni in un unico insieme.

Se nella pratica degli esercizi matematici prevale la soluzione di problemi tipici, allora gli studenti non formano forti associazioni intersistemiche; gli studenti non notano le connessioni tra teoremi separati o sezioni del programma con cui hanno familiarità, necessarie per risolvere problemi non di routine.

Solo il lavoro sistematico sullo sviluppo delle associazioni intersistemiche crea le precondizioni per lo sviluppo più facile di nuove associazioni intersistemiche e allo stesso tempo è uno dei processi importanti dello sviluppo matematico dello studente.

Da questo punto di vista, diventa evidente un inconveniente significativo dei problemi scolastici stabili, in particolare il libro dei problemi di geometria: sono pochissimi i problemi che prevedono la relazione tra le varie sezioni del corso. [ivi]

Se quanto descritto «sono i requisiti della psicologia, il cui adempimento contribuisce al processo di sviluppo matematico dello studente», allora Kordemsky presenta l'applicazione nei problemi matematici ingegnosi con esempi che mostrano la ricchezza delle formazioni di connessioni intersistemiche. Si riporta qui il primo esempio:

Esempio 1. Disponi nove interi qualsiasi nella forma di un quadrato in modo da ottenere gli stessi prodotti di numeri lungo le righe, le colonne e le diagonali del quadrato.

Quali connessioni possono essere associate qui? Questo compito è stato preceduto da esercizi per disegnare quadrati magici con somme costanti di numeri lungo righe, colonne e diagonali.

Se ora ricordiamo la regola per moltiplicare le potenze con la stessa base e prendiamo un qualsiasi numero, ad esempio 2, come base, e usiamo come esponenti i numeri di qualche quadrato magico con somma costante, ad esempio, come nella figura 23 (qui Figura 2.5), allora i numeri ottenuti formano il quadrato voluto (Fig. 24 [qui Figura 2.5]). [ivi]

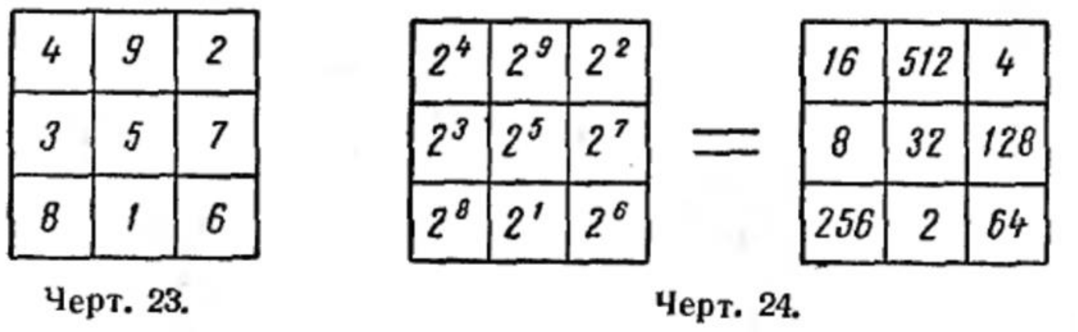


Figura 2.5 - Le Fig. 23 e 24 dell'esempio 1 mostrato da Kordemsky: un quadrato magico con i prodotti costanti.

La nota proprietà delle potenze, che apparentemente non ha nulla a che fare con il problema in questione, viene applicata in nuove condizioni:

$$4 + 9 + 2 = 3 + 5 + 7 = 8 + 1 + 6 \Longrightarrow 2^4 \cdot 2^9 \cdot 2^2 = 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7 = 2^8 \cdot 2^1 \cdot 2^6$$

Inoltre questo problema può essere risolto in un altro modo, in base alle connessioni con altri rami dell'algebra. Naturalmente è solo un esempio, ma rende l'idea. Infine, Kordemsky sottolinea alcuni aspetti pedagogici dei compiti per l'ingegno. Nella loro varietà alcuni rafforzano la capacità del pensiero logico o le capacità costruttive del pensiero indipendente, altri sviluppano la correttezza del discorso matematico, altri la prudenza nei giudizi "per analogia", altri ancora favoriscono la conoscenza della varietà e della bellezza delle forme geometriche, delle connessioni matematiche con le attività pratiche. E «tutto insieme» contribuisce ad aumentare in generale la cultura matematica di coloro che praticano sistematicamente la risoluzione di questi problemi.

In seguito, Kordemsky si sofferma su uno degli obiettivi più importanti dell'insegnamento della matematica: «l'educazione all'attività mentale creativa». Tralasciando il collegamento con le teorie psicologiche sull'attenzione, si riporta quanto afferma Kordemsky in conclusione del paragrafo:

Una caratteristica dei compiti matematici esperti è che sono in grado di suscitare interesse per il risultato della soluzione e la tentazione di ottenere il risultato ispira a superare le difficoltà del processo di risoluzione dei problemi e quindi contribuisce all'educazione dell'attività mentale. [...]

Esercizi affascinanti allontanano la pigrizia intellettuale e volitiva, allenano il pensiero, sviluppano l'abitudine al lavoro mentale, il bisogno di esso, instillano la perseveranza nel superare le difficoltà, la pazienza, provocano una gioiosa consapevolezza del successo che è benefica per il corpo in caso di soluzione trovata indipendentemente.

Inserendo nell'arsenale dei mezzi educativi materiali "arguti", l'insegnante acquisisce un'ottima guida per riempire intelligentemente il tempo libero degli alunni, per giocare, per la ginnastica mentale quotidiana.

È anche importante che la proposta educativa avvenga spesso attraverso libri relativi al genere di opere contenenti problemi matematici per l'ingegno, che permettono di sviluppare un incentivo allo studio della matematica. [ivi]

Dopo aver riportato anche alcune testimonianze di studenti che raccontano come abbiano cambiato il loro rapporto con la matematica a partire dalla lettura di un libro di compiti per l'ingegno (si riportano le lettere di studenti che hanno letto il libro di Perelman *Geometria ricreativa* (Perelman 1925 tr. it. 2015), infine Kordemsky presenta diversi esempi di come si manifesta l'iniziativa matematica creativa nella risoluzione di problemi per l'ingegno: tali esempi mostrano che le ricreazioni matematiche possono essere risolte a tutte le età e «il loro significato culturale ed educativo è innegabile».

2.1.3 Let's play mathematics: la visione di Zoltan Dienes (1916-2014)

Zoltan Dienes[93] nacque in Ungheria nel 1916 sotto l'impero austro-ungarico e trascorre i suoi primi anni in Ungheria, Austria, Italia e Francia. Avverte da subito il fascino della matematica, e si tramanda l'aneddoto secondo cui egli si nascondeva dietro una tenda per ascoltare le lezioni di matematica del fratello maggiore, per le quali era ritenuto troppo piccolo! A 15 anni si trasferì in Inghilterra, dove continuò gli studi, fino al PhD presso l'Università di Londra nel 1939. Poliglotta, aveva un profondo amore per la musica, per l'arte e per la natura; e, quando egli parla della "psicomatematica" (titolo che evoca le psicoaritmetica e psicogeometria di Montessori), si tratta in parte di una ibridazione con la psicologia sperimentale in voga dagli anni Cinquanta e Sessanta negli Stati Uniti e a livello internazionale, ma con una caratteristica sfumatura legata ad aspetti estetici. Per oltre un decennio fu Direttore del *Centre de Recherches en Psychomathématiques* dell'Università di Sherbrooke nel Quebec.

Egli dedicò la sua carriera al miglioramento dell'educazione matematica in tutto il mondo, con una caratteristica attenzione sia agli allievi, sia ai loro insegnanti – molto pertinente all'approccio del progetto che si presenta nella Parte II di questa tesi – con attività in numerosi paesi europei (fra cui l'Italia) e americani, in comunità tribali delle regioni montane della Nuova Guinea e nei quartieri popolari di Rio de Janeiro, nelle classi di nativi First Nations e Métis a Manitoba e nell'addestramento dei Corpi di

[93] Si veda il necrologio sul sito a lui dedicato: https://zoltandienes.com/obituary/necrologio/: «Zoltan comprendeva arte ed estetica della matematica e la sua passione era quella di condividerla con insegnanti e bambini. Era attratto dalle difficoltà che tante persone avevano nell'apprendere la matematica e desiderava che gli altri ne vedessero la bellezza come accadeva a lui. Pertanto portò a termine un secondo corso di studi in psicologia, per comprendere meglio i processi del pensiero. Divenne famoso per il suo lavoro sulla psicologia dell'educazione Matematica, in base al quale creò il nuovo settore della psicomatematica. Definito come il "matematico maverick [vagabondo]", Zoltan introdusse le idee rivoluzionarie dell'apprendimento dei concetti complessi della matematica attraverso il divertimento mediante giochi e danza, in modo che i bambini erano spesso inconsapevoli del fatto che stavano apprendendo la matematica mentre partecipavano, con desiderio crescente, ad esperienze creative, meravigliose ed avvincenti. È stato l'inventore dei Blocchi Aritmetici Multibase Dienes e di molti altri giochi e materiali didattici che incorporavano (embodied) concetti matematici.» Con la moglie Tessa, amica d'infanzia, ha trascorso 68 anni di matrimonio con cinque figli fino alla morte di lei, nel 2006.

Volontari per la Pace nelle Filippine. Nella sua vita ha ricevuto numerosi riconoscimenti universitari ed è stato definito un "uomo del rinascimento":

> The name of Zoltan P. Dienes (1916 – [2014]) stands with those of Jean Piaget, Jerome Bruner, Edward Begle, and Robert Davis as a legendary figure whose work left a lasting impression on the field of mathematics education. Dienes' name is synonymous with the multibase blocks that he invented for the teaching of place value. Among numerous other things, he also is the inventor of algebraic materials and logic blocks, which sowed the seeds of contemporary uses of manipulative materials in instruction. Dienes' place is unique in the field of mathematics education not only because of his theories on how mathematical structures can be effectively taught from the early grades onwards using manipulatives, games, stories, and dance (e.g., Dienes, 1973, 1987), but also because of his tireless attempts for over 50 years to inform school practice through his fieldwork in the United Kingdom, Italy, Australia, Brazil, Canada, Papua New Guinea, and the United States. Dienes' theories on the learning of mathematics have influenced many generations of mathematics education researchers, particularly those involved in the Rational Number Project, and more recently those working in the models and modeling area of research. Dienes championed the use of collaborative group work and concrete materials, as well as goals such as democratic access to the process of mathematical thinking, long before the words constructivism, equity, and democratization became fashionable. [Sriraman, Lesh 2007, pp. 59-60]

Nel suo pensiero pedagogico, incentrato sulla matematica, ha un ruolo cruciale il gioco. Egli non intende il gioco (la matematica ricreativa quindi) come strumento didattico, ma piuttosto si riferisce a un "giocare" la matematica elementare, ossia viverla come un gioco, come esprime il titolo di un suo libro, *Let's play math!* (1973). Si vede quindi una transizione ulteriore rispetto alle idee di Komensky: anche se egli si è occupato principalmente di bambini, le sue idee hanno avuto un impatto oltre, e per quanto riguarda questi aspetti, esse sono pertinenti alla scuola dell'obbligo in generale, e in tal senso – come si vedrà – verrà ripreso negli anni Ottanta da Paul Ernest. Negli anni Settanta egli è molto seguito negli ambienti degli insegnanti e istituzionali, ma le sue concezioni sono basate su studi di stampo esperimentale, secondo una impostazione molto personale.

La sua presentazione teorica, psicologica ed epistemologica, si articola intorno a più assi, nei quali i giochi matematici e il giocare hanno un ruolo rilevante: una classificazione dei giochi didattici o nella didattica; una serie di livelli di apprendimento che si susseguono (dove l'aspetto del gioco è presente) e una serie di principi trasversali per l'apprendimento, due dei quali sono anche pertinenti al gioco.

Il Mathematics-Learning Project*: "fare matematica" è un gioco!*

Il progetto sull'apprendimento della matematica (si noti l'accento posto sull'apprendimento, che porterà alla visione corrente dell'alunno-*learner*), condotto da un gruppo di ricerca guidato da Dienes insieme a Jerome Bruner, riguardò cinque gruppi sperimentali di studenti di terza e quarta elementare: progettazione e analisi dell'implementazione furono oggetto di frequenti seminari, tenuti presso l'University Center for Cognitive Studies della Harvard University. I risultati sono presentati nel suo libro *An experimental study of mathematics-learning* (1963, tradotto in italiano nel 1968; si cita dall'edizione italiana del 1976), il cui capitolo introduttivo è dedicato alla «funzione del gioco nel pensiero matematico».

Attraverso numerosi esempi vengono distinti tre tipi di gioco che possono avere attinenza con l'apprendimento della matematica, «in quanto sia di aiuto sia di interferenza sulla via verso la comprensione delle strutture matematiche»:

> [...] parleremo del gioco di manipolazione, del gioco di rappresentazione e del gioco basato su regole. Il *gioco di manipolazione* è un'attività che potrebbe essere descritta anche come un'esplorazione, dal momento che, all'inizio, il soggetto difficilmente è consapevole del processo esplorativo, ma acquista consapevolezza mano a mano che accumula esperienza. Il *gioco di rappresentazione* ha luogo quando si assegnano a oggetti o persone proprietà diverse da quelle che effettivamente sono loro proprie; l'immaginazione è una componente essenziale di questo genere di gioco. Il *gioco basato su regole* è essenzialmente una "partita", nel senso che le scelte sono limitate in qualche modo ben determinato dalle stesse regole del gioco. [Dienes tr. it. 1976, ed. orig. 1963, p. 12]

Nel gioco basato su regole si vede l'eco del pensiero di Piaget sullo sviluppo del bambino e le regole. Si tratta di un esempio di classificazione di pertinenza didattica, senza collegamenti con le ricerche storico-culturali sulla matematica ricreativa né tanto meno con la classificazione dei giochi di Caillois, come vedremo oltre nella proposta di Oldfield sulla rivista «Mathematics in school». Dienes non definisce confini fissi e immutabili tra le diverse forme di gioco, anzi sottolinea due possibilità: da una parte, un gioco può presentare due o tutte tre le caratteristiche insieme; dall'altra, è importante la variazione da un tipo di gioco a un altro, poiché – come sottolinea l'autore ungherese – «può incrementare le risorse necessarie per affrontare più avanzati processi conoscitivi che nascono proprio dal gioco: all'incirca allo stesso modo, per esempio, in cui la corrente alternata, in certi casi, facilita lo sfruttamento dell'energia elettrica».

Ogni tipo di gioco viene discusso in relazione allo sviluppo del pensiero matematico nei ragazzi, nei suoi vari aspetti: costruzione di concetti, generalizzazione e analisi. Il gioco basato su regole ha mostrato di essere sorgente di *motivazione* – concetto dominante nella psicologia dell'epoca (Quadrio Aristarchi 1996) – all'attività: il desiderio di «arrivare a dominare una struttura di regole» contribuisce a motivare lo studente nella ricerca. Lo stimolo all'attività e l'atmosfera di entusiasmo favorevole all'apprendimento e all'indagine possono essere ostacolati se il gioco non avviene in totale libertà e in una relazione di fiducia tra docente e studenti ed è invece condizionato da promesse di punizioni o premi. Egli riflette anche sulla questione della confusione e della vivacità che inevitabilmente si genera in una classe che gioca: libertà di azione e «chiasso» sono due variabili che vanno tenute in forte considerazione in relazione all'apprendimento della matematica attraverso il gioco. Su questo però non se la sente di esprimere un giudizio definitivo:

> non sappiamo quali dovrebbero essere i criteri precisi per un effettivo apprendimento. Si discute molto ancora intorno al miglior modo di ordinare i giochi di rappresentazione e quelli basati su regole per conseguire un miglior apprendimento della matematica e resta aperto il problema circa la determinazione della reazione che intercede tra l'efficacia del gioco di manipolazione e la completa padronanza delle regole. E infine c'è il problema, probabilmente il più difficile da risolvere, di valutare il chiasso cui dà origine ogni gioco in relazione a una qualsiasi struttura matematica assegnata, nonché la connessione fra la quantità di rumore e l'effettivo apprendimento. [ivi, p. 46]

Ci sono così studenti che sanno limitarsi sul chiasso e altri che hanno bisogno di esso e di situazioni «più rumorose» per astrarne i concetti matematici: sarà dunque l'insegnante, a seconda dell'esigenza, a dover favorire l'aumento o la diminuzione del chiasso nel contesto di gioco.

La dinamica dell'apprendimento della matematica e i giochi

Oltre la visione del coacervo dei giochi, si apre una visione dell'intero apprendimento della matematica, che si ricostruisce dalle sue opere originali. Dienes descrive più fasi nella sua dinamica, ognuna delle quali costituisce un gioco: man mano che si alza il livello, anche il gioco diventa di difficoltà superiore. A partire dalla teoria di Bruner (il suo modello *CPA: concrete, pictorial, and abstract*), e mettendola in relazione con le caratteristiche fondamentali della matematica, egli delinea sei fasi (Tavola 2.3), a partire da quella iniziale di "gioco libero" fino alla fase finale dove la simbolizzazione ha un ruolo predominante, ma nella quale è possibile ancora individuare l'aspetto di gioco. Si vede qui quindi l'intervento, come in Guzmán, di una concezione soggiacente della matematica; nel contempo l'accento posto sulla simbolizzazione si colloca nel contesto di un crescente abbandono della geometria e dell'intuizione nella matematica scolastica.

«Zoltan Dienes's six-stage theory of learning mathematics»
Stage 1
Most people, when confronted with a situation which they are not sure how to handle, will engage in what is usually described as "trial and error" activity. What they are doing is to freely interact with the situation presented to them. In trying to solve a puzzle, most people will randomly try this and that and the other until some form of regularity in the situation begins to emerge, after which a more systematic problem solving behaviour becomes possible. This stage is the FREE PLAY, which is or should be, the beginning of all learning. This is how the would-be learner becomes familiar with the situation with which he or she is confronted.
Stage 2
After some free experimenting, it usually happens that regularities appear in the situation, which can be formulated as "rules of a game". Once it is realized that interesting activities can be brought into play by means of rules, it is a small step towards inventing the rules in order to create a "game". Every game has some rules, which need to be observed in order to pass from a starting state of things to the end of the game, which is determined by certain conditions being satisfied. It is an extremely useful educational "trick" to invent games with rules which match the rules that are inherent in some piece of mathematics which the educator wishes the learners to learn. This can be or should be the essential aspect of this part of the learning cycle. We could call this stage learning to play by the rules, as opposed to the free learning characteristic of stage one.
Stage 3
Once we have got children to play a number of mathematical games, there comes a moment when these games can be discussed, compared with each other. It is good to teach several games with very similar rule structures, but using different materials, so that it should become apparent that there is a common core to a number of different looking games, which can later be identified as the mathematical content of those games that are similar to each other in structure, even though they might be totally different from the point of view of the elements used for playing them. It is even desirable, at one point, to establish "dictionaries" between games that have the same structure, so to each element and to each operation in one game, should correspond a unique element or operation in the other game. This will encourage learners to realize that the external material used for playing the games is less important than the rule structure which each material embodies. So learners will be

encouraged to take the first halting steps towards abstraction, which is of course becoming aware of that which is common to all the games with the same rule structure, while the actual physical "playthings" can gradually become "noise". This stage could be called the comparison stage.

Stage 4

There comes a time when the learner has identified the abstract content of a number of different games and is practically crying out for some sort of picture by means of which to represent that which has been gleaned as the common core of the various activities. At this point it is time to suggest some diagrammatic representation such as an arrow diagram, table, a coordinate system or any other vehicle which would help fix in the learner's mind what this common core is. We cannot ever hope to see an abstraction, as such things do not exist in the real world of objects and events, but we can invent a representation which would in some succinct way give the learner a snapshot of the essence that he has extracted or abstracted through the various game activities. Each one of the learned games can then be "mapped" on to this representation, which will pinpoint the communality of the games. This stage can be called the representation stage.

Stage 5

It will now be possible to study the representation or "map" and glean some properties that all the games naturally must have. For example it could be checked whether a certain series of operations yields the same result as another series of operations. Such a "discovery" could then be checked by playing it out in one or more of the games whose representation yielded the "discovery". An elementary language can then be developed to described such properties of the map. Such a language can approximate to the conventional symbolic language conventionally used by mathematicians or freedom can be exercised in inventing quite new and different symbol systems. Be it one way or another, a symbol system can now be developed which can be used to describe the properties of the system being learned, as the information is gathered by studying the map. This stage can be called the symbolization stage.

Stage 6

The descriptions of the symbolization stage can get very lengthy and often quite redundant. There comes a time when it becomes desirable to establish some order in the maze of descriptions. This is the time to suggest that possibly just a few initial descriptions would suffice, as long as we appended ways of deducing other properties of the map, determining certain definite rules that would be allowed to be used in such "deductions". In such a case we are making the first steps towards realizing that the first few descriptions can be our AXIOMS, and the other properties that we have deduced can be our THEOREMS, the ways of getting from the initial axioms to the theorems being the PROOFS. This stage could be called the formalization stage.

Tavola 2.3 - I sei livelli di Dienes, nella versione evoluta presentata nel suo sito ufficiale [https://zoltandienes.com/academic-articles/zoltan-dienes-six-stage-theory-of-learning-mathematics/]

Contestualmente propone quattro principi di base per l'apprendimento della matematica:

- *Principio dinamico.* L'apprendimento passa dall'esperienza all'atto di categorizzazione, attraverso cicli che si susseguono regolarmente. Ogni ciclo è composto da circa tre fasi: una fase di gioco preliminare; una fase di costruzione intermedia più strutturata seguita dal discernimento; e, una fase finale in cui la nuova visione è più saldamente fissata. Spesso i giochi preliminari sono fatti con materiale concreto, ma gradualmente si possono presentare anche «dei giuochi mentali, al fine di risvegliare il gusto del più affascinante dei giuochi, quello della ricerca matematica» (Dienes tr. it. 1967, ed. orig. 1960, p. 37)
- *Principio di costruzione.* Costruzione, manipolazione e gioco costituiscono il primo contatto con le realtà matematiche. Sempre prima la costruzione dell'analisi.

- *Principio della variabilità percettiva* o del «multiple embodiment» (Sriraman, Lesh 2007). Per astrarre efficacemente un concetto matematico dobbiamo trovarlo in più forme diverse per percepirne le proprietà puramente strutturali.
- *Principio della variabilità matematica* o *concettuale*. Ogni concetto matematico coinvolge variabili essenziali. I concetti che contengono più di una variabile devono essere studiati attraverso esperienze che ne coinvolgano il maggior numero possibile. Confrontando le diverse costruzioni realizzate, si può vedere cosa c'è di invariante in esse, che sarà ciò che interessa per la formulazione del concetto.

Il gioco è presente in modo esplicito nei primi due ed è implicito nel principio della variabilità percettiva, come una delle forme diverse in cui è possibile rappresentare un concetto.

Si è di fronte quindi a un vero e proprio approccio pedagogico alle matematiche elementari attraverso il gioco, che si potrebbe chiamare un "gioco dell'apprendimento a più livelli": si propone qui un esempio nel caso dell'apprendimento delle operazioni con i numeri interi (si rimanda all'Appendice B per il testo integrale e originale di Dienes).

Il primo livello è naturalmente il gioco libero («free play»), dove Dienes suggerisce l'utilizzo di materiali concreti, come ad esempio i blocchi multibase. Lo studente costruisce castelli e scopre che ha bisogno di molti cubetti per fare un «long» e di molti «longs» per costruire un «flat». Così man mano lo studente costruendo scopre dei vincoli e a partire da essi osserva le regole che ne derivano osservando che alcune cose sono possibili e altre no. Presto inventa lui le regole e accetta di buon grado («quite happy») anche le regole indicate da altri se rispettano i vincoli che ha trovato e sperimentato in prima persona. Qui Dienes osserva:

> "Doing mathematics" is a game in the above sense. It starts by posing a problem, then there are the general rules usually observed in logic, arithmetic and algebra, as well as the special rules determined by the problem in hand. The end of the game is the solution of the problem.
>
> What could be a better preparation for "doing mathematics" than the playing of various games with rules? In order to give the games some mathematical value, we merely have to construct materials and make up the rules of the game in question to correspond to the properties of the structure we wish children to learn. If the game is motivating, children will want to play it, and we shal not have to stand behind them to make sure that they "do mathematics". [Dienes 2007, p. 20]

Dienes afferma cioè che "fare matematica" è un gioco: si parte da un problema, ci sono delle regole da rispettare e poi il gioco finisce quando si trova la soluzione. Purtroppo insegnare a fare matematica non è così banale: il matematico ungherese dice che bisogna "solamente" costruire dei materiali e ideare delle regole del gioco che corrispondano alle proprietà della struttura matematica che si vuole far apprendere ai propri studenti. Certo se i materiali e le regole esistono già, allora può essere veramente semplice (si ritornerà su questo nel Capitolo 3).

Si passa ora al secondo livello, quello dove si tratta di imparare a giocare seguendo delle regole. Dienes propone tre giochi diversi per mostrare alcune proprietà delle operazioni con i numeri interi positivi e negativi. Mostrando tre giochi e non uno soltanto viene applicato il principio sopra citato della variabilità percettiva: «it would be good to use many other "embodiments" of adding and subtracting positive and negative numbers» (ivi, p. 22).

The dance game

Sono presenti alcuni gettoni di colore rosso, che rappresentano le ragazze, e altri di colore verde, che rappresentano i ragazzi. Ragazzi e ragazze vanno a ballare a coppie secondo le seguenti regole:

1) si può ballare solo con un membro del sesso opposto

2) se c'è qualcuno con cui ballare, si deve ballare sempre nella «dance hall»

3) se non c'è qualcuno con cui ballare, si attende nella «refreshment room»

Si hanno a disposizione un dado di colore rosso e uno di colore verde. Al proprio turno ogni giocatore tira entrambi i dadi per decidere quante ragazze (dado rosso) e quanti ragazzi (dado verde) arrivano al ballo. E poi si seguono le tre regole sopra citate. Se alla fine del turno la refreshment room è vuota, viene assegnato 1 punto al giocatore di turno. Il primo che arriva a 5 punti è il vincitore.

Addizione

Nella Figura 2.6 si vede schematizzata una possibile situazione con i ragazzi che corrispondono alla lettera *g* (di «green») e le ragazze alla *r* (di «red»): inizialmente ci sono due ragazzi in meno rispetto alle ragazze, poi arriva un gruppo dove ci sono 3 ragazzi in più rispetto alle ragazze e alla fine rimane un ragazzo in più rispetto alle ragazze.

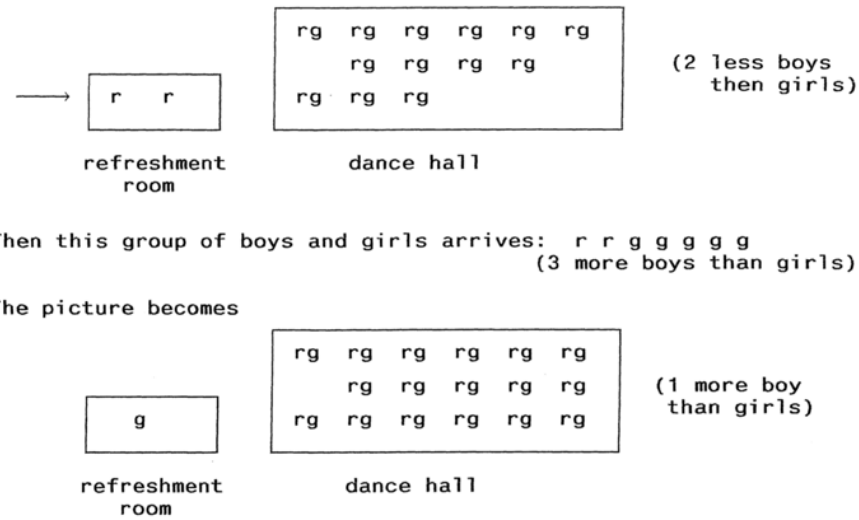


Figura 2.6 – Lo schema del *dance game*: dove la lettera *r* corrisponde alle ragazze (*girls*) e la *g* ai ragazzi (*boys*) [ivi, p. 21]

L'operazione nascosta non è altro che $(+3) + (-2) = (+1)$,

ovvero sono stati "addizionati" «(3 more boys than girls)» a «(2 less boys than girls)» e il risultato ottenuto è «(1 more boy than girls)».

Sottrazione

Allo stesso modo presenta la sottrazione, immaginando che alcune persone vadano a casa dopo aver ballato. Viene aggiunto un dado con metà delle facce colorate di rosso e l'altra metà di verde. Se tirando il dado esce una faccia di colore verde significa che le persone stanno arrivando a ballare, se esce una faccia di colore rosso vuol dire che qualcuno sta andando via. In questo caso a ogni turno di gioco sarà necessario tirare tre dadi: questo nuovo dado per sapere se arrivano o vanno via e i due precedenti per stabilire il numero di ragazzi e di ragazze. In una situazione del genere viene assegnato a uno studente il compito di registrare:

a) le presenze nella refreshment room (il numero di ragazzi rispetto a quello delle ragazze)

b) se le persone stanno arrivando o andando via (dado rosso-verde)

c) quante ragazzi e quanti ragazzi stanno arrivando o andando via (dado verde e dado rosso)

Così, ad esempio, viene proposta la situazione seguente:

a) ci sono due ragazze nella refreshment room (2 less boys than girls)

b) alcune persone stanno andando via

c) 5 ragazze e 2 ragazzi stanno andando via (3 less boys than girls)

Di quelli che stanno andando via 2 ragazzi e 2 ragazzi possono essere due coppie, ma rimangono altre 3 ragazze. Ci sono due possibilità:

2 delle 3 ragazze che stanno andando via sono quelle che stavano nella refreshment room e un'altra stava ballando. Questo significa che ora nella refreshment non ci sono più ragazze ma solo il ragazzo che stava ballando con quella che se n'è andata via.

le 3 ragazze stavano ballando e andando via hanno lasciato soli i ragazzi con cui facevano coppia. 2 dei ragazzi "lasciati" sono nuovamente tornati a ballare con le 2 ragazze che erano nella refreshment room, mentre un ragazzo è rimasto solo in attesa.

In entrambi i casi esposti rimane un ragazzo, ovvero «1 more boy than girls». Si è dunque realizzata la sottrazione:

$$(-2) - (-3) = (+1)$$

The walks

In questo gioco si contano i passi fatti a destra o a sinistra. L'addizione è veramente elementare, per la sottrazione propone quest'esempio. Si intenda con "x DX y SN" una camminata di x passi a destra e y passi a sinistra.

Se si vuole sottrarre "5 DX 3 SN" da "6 DX", allora si può considerare "6 DX" come equivalente a "9 DX 3 SN" e dunque compiere la sottrazione richiesta sarebbe uguale a rispondere alla domanda "Quanti passi a destra e a sinistra avreste fatto se nella camminata "9 DX 3 SN" non aveste fatto "5 DX 3 SN"? La risposta sarebbe naturalmente 4 DX, ovvero in termini di sottrazione:

$$(+9) + (-3) - (+5) - (-3) = (+4),$$

o meglio $(+6) - (+2) = (+4)$

Balance beam [o bilancia aritmetica]

Si parte da un disegno che rappresenta la bilancia immaginaria in 2D

Aggiungendo pesi a destra o a sinistra a partire dalla situazione di equilibrio in Figura 2.7, la bilancia pende a destra o a sinistra, ovvero si ha «more on the right than on the left».

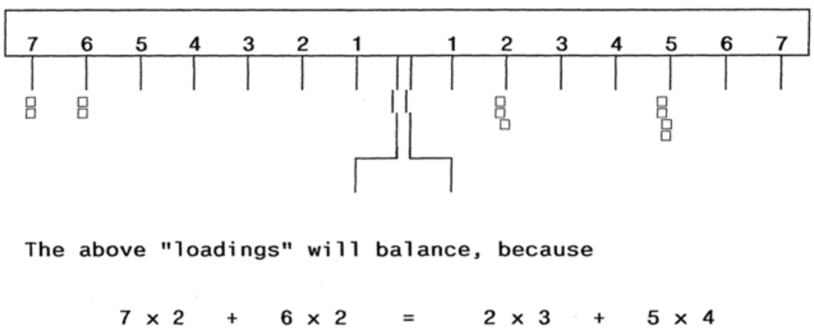


Figura 2.7 – La bilancia aritmetica del terzo gioco delle operazioni con i numeri interi [ivi, p. 23]

A questo punto è piuttosto semplice comprendere come si procede nel terzo livello, ovvero nel confronto tra i tre giochi scelti nel secondo livello. Come si può vedere nella

Figura 2.8 la corrispondenza tra i tre giochi è evidente e gli studenti, giocando ai tre giochi contemporaneamente, passo dopo passo, comprendono come essi rappresentino tutti la stessa cosa («really the same»)

Dance	Walks	Balance
boy comes in	step to the right	1 weight on 1 on the right
girl comes in	step to the left	1 weight on 1 on the left
boy leaves	where would we be if 1 right not taken?	remove 1 weight on 1 on the right
girls leaves	where would we be if 1 left not taken?	remove 1 weight on 1 on the left

Here is an example of an "adding situation" in all three embodiments:

3 girls in the refreshment room	2 boys and 5 girls arrive	6 girls left in refreshment room
Walker is 3 steps left of start	2 right and 5 left steps taken	Walker finishes 6 steps left of start
2 weights on 5 on left, 1 weight on 7 on right (overloaded 3 on left)	place 1 weight on 2 on right, 5 weights on 1 on left	9 on right, 15 on left (6 over on left)

Figura 2.8 – Il confronto tra i tre giochi nel terzo livello (ivi, p. 24). I tre giochi equivalgono ed equivalgano all'addizione: $-3 + (-3) = (-6)$

Avendo "astratto" ciò che è in comune tra le diverse situazioni, nel quarto livello della «rappresentazione» si può cercare di rappresentare queste caratteristiche comuni come in Figura 2.9.

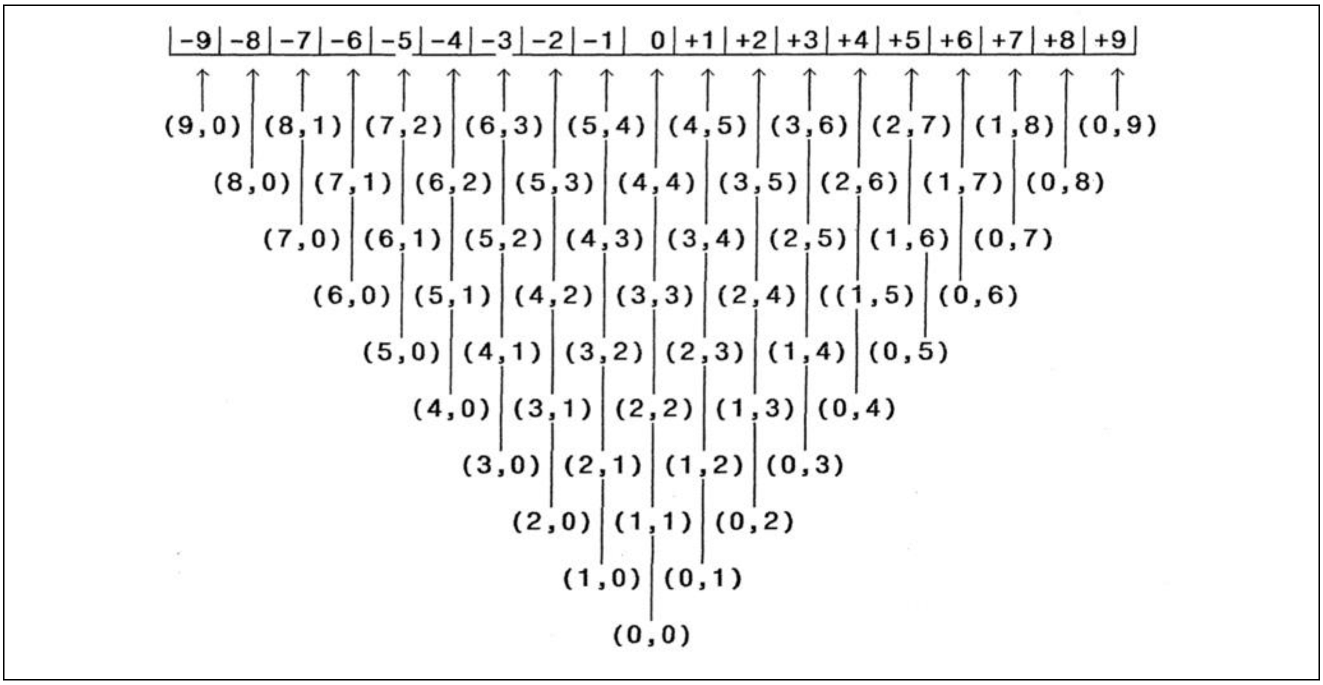


Figura 2.9 – La rappresentazione dei numeri interi nel quarto livello (Dienes 2007, p. 25)

Al centro si trovano le coppie «as many as line», a sinistra della linea verticale centrale si trovano le coppie «less right than left lines» e a destra della linea verticale centrale le coppie «more right than left lines». La scoperta delle diverse corrispondenze (ad es: *right = more* e *left = less*) è lasciata agli studenti. Si sottolinea la puntualizzazione di Dienes sulla linea dei numeri che non deve essere usata in questo livello per rappresentare interi positivi e negativi, ma costituisce al più un altro gioco del secondo livello.

Il quinto livello è quello della «simbolizzazione».

Esempio. Il simbolo $(+2)$ significa che ci sono due cose di un certo tipo in più di quelle di un altro tipo.

Se si trova qualche numero $+2$ significa che si deve addizionare 2 a quel numero. Analogamente con gli interi negativi e la sottrazione.

Comunemente si preferisce scrivere 2 al posto di $(+2)$ per gli interi positivi e analogamente si preferisce scrivere -3 a $-(+3)$.

Si costruirà insieme agli studenti un elenco delle proprietà scoperte man mano, quali le seguenti:

Numero $-(+3)$ = Numero $+(-3)$

Numero $-(-3)$ = Numero $+(+3)$.

Il sesto e ultimo livello è quello proprio della scuola secondaria, ovvero il livello della «formalizzazione». Si rimettono in ordine le idee, le proprietà scoperte, le condizioni iniziali... In sostanza si riconoscono gli assiomi a partire dai quali attraverso un procedimento logico-deduttivo si dimostrano i teoremi (le proprietà) ed ecco che il percorso è completato.

La riflessione conclusiva, al termine di questa proposta, è un'amara considerazione sull'insegnamento della matematica: il sistema simbolico viene presentato troppo presto, saltando i quattro livelli precedenti. I ragazzi talentuosi qualche volta riescono da soli a muoversi tra i livelli descritti, ma quelli che fanno più difficoltà si ritrovano a ripetere meccanicamente le "risposte" richieste dall'insegnante o dal libro di testo, che chiama "problemi" esercizi identici al problema modello risolto all'inizio del capitolo.

Il "percorso di apprendimento" *(learning path*, nella terminologia di Karen Fuson) proposto da Dienes è certamente impegnativo. Si tratta di una modalità di approccio pedagogico attraverso il gioco, che richiede materiale e idee che non sempre sono disponibili, o meglio accessibili a tutti. Senz'altro però rimane un punto di vista autorevole da tenere in considerazione se si vuole insegnare a fare matematica a tutti i "livelli", dagli studenti più piccoli – di cui si è occupato molto il matematico ungherese – a quelli più grandi oggetto di questa ricerca.

2.1.4 Layman E. Allen (1927-2018) e il gioco matematico «Equations» in una situazione di difficoltà

> L'amore senza la conoscenza, o la conoscenza senza l'amore, non possono maturare una vita retta. Nel medioevo, allorché la pestilenza mieteva vittime, santi uomini riunivano la popolazione nelle chiese per pregare, cosicché l'infezione si diffondeva con straordinaria rapidità fra le masse dei supplicanti. Ecco un esempio di amore senza conoscenza. La grande guerra e un esempio di conoscenza senza amore. In entrambi i casi le conseguenze furono disastrose.
>
> Benché amore e conoscenza siano necessari, l'amore è, in certo senso, più fondamentale perché spinge l'intelligenza a scoprire sempre nuovi modi di giovare ai propri simili ["alle persone amate" sarebbe la traduzione letterale]. Le persone non intelligenti si accontenteranno di agire secondo quanto è stato loro detto, e potranno causare danno, proprio per la loro ingenua bontà. [Bertrand Russell, *Why I Am not a Christian* (1957), tr. it. *Perché non sono cristiano*. Milano: Longanesi, p. 29]

Attorno al 1960 un docente di giurisprudenza statunitense, Layman E. Allen (1927-2018), allora attivo presso la Yale University, inventò il gioco matematico da tavolo *Equations*, che è tutt'ora di attualità, promosso dalla AGLOA *Academic Games Leagues of America*[94]

Equations è un «problem-generating game» e in ogni turno di gioco la scelta di un giocatore incide su quella del giocatore successivo, come accade negli scacchi. Il gioco si svolge in una continua generazione di problemi, tentativi di risolverli e nuovi problemi nati dalle scelte dei giocatori.

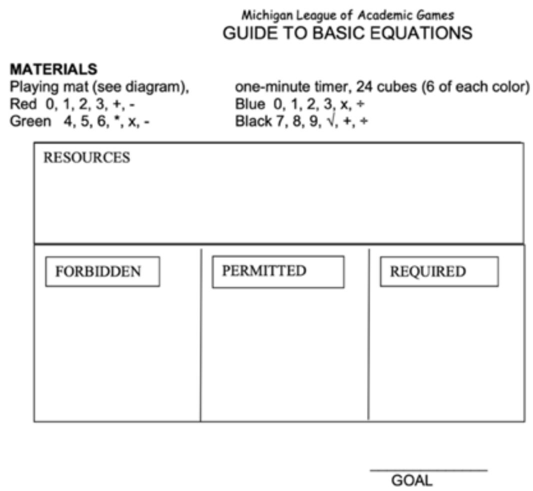


Figura 2.10 - I materiali e uno schema del tabellone del gioco Basic *Equations* contenuta nel documento sito web *Michigan Leagues of Academic Games. Official 2019-2020 Tournament Rules* (MLAG Rule Book) reperibile nel sito web dell'organizzazione *Michigan Leagues of Academic Games* http://www.mlagonline.com/Guide%20to%20basic%20eq.pdf (p. 1)

L'idea è quella di costruire delle uguaglianze aritmetiche utilizzando le quattro operazioni e le cifre da 0 a 9 con un dato numero "bersaglio" (*Goal*), seguendo le condizioni rappresentate sul tabellone di gioco (un'idea si può avere in Figura 2.10) che vengono decise di volta in volta dai giocatori di turno: all'inizio del turno si lanciano i dadi e si determinano il numero Goal (in genere di due cifre), le cifre e i segni di operazioni utilizzabili (*Resources*) per costruire l'uguaglianza che dia come

[94] Allen sviluppò la sua carriera per quarant'anni dal 1966 presso la University of Michigan (dove divenne professore ordinario nel 1971). Fu anche ideatore di *WFF 'N PROOF. The game of modern logic*.

risultato il numero Goal. Il giocatore di turno può scegliere di spostare una "risorsa" (cifra o segno d'operazione) tra quelle vietate (*Forbidden*), tra quelle necessarie (*Required*) o tra quelle sempre permesse ma non obbligatorie (*Permitted*). Un giocatore può scegliere anche di non spostare alcuna "risorsa" e sfidare gli avversari a risolvere l'uguaglianza con le condizioni date giocandosi un NOW (se si ritiene che esista una soluzione possibile e si è in grado poi di mostrarla) o un IMPOSSIBLE (se si ritiene che non esista alcuna soluzione con le condizioni date). Si capisce dunque che è un gioco che dipende molto dalla creatività e dalle conoscenze dei giocatori: per vincere occorre vedere se le soluzioni esistono o non esistono e saper scegliere cifre o segni d'operazione da vietare o da rendere obbligatori.

Nel video *Equations. The game of creative mathematics* (si veda Allen 2012 in B4 Videografia) si ascolta la presentazione a una classe americana di 6° grado.

Le risorse online correnti sul gioco nel sito web di AGLOA *Academic Games Leagues of America* si trovano all'indirizzo: https://www.agloa.org/equations/, le regole e documenti a https://www.agloa.org/eq-docs/

Equations è un mix tra due giochi prodotti dall'azienda CreativaMente oggi in commercio, che sono stati applicati nel Con-corso Matematica per tutti: *Rolling CUBES Pytagora* (si vedano §2.2.4 e §3.3.1) e *FUNB3RS* (si veda §3.3.6).

Nel 1974 Allen e Dana B. Main presentarono al 12° Simposio annuale del National Gaming Council degli Stati Uniti uno studio sul combattere l'assenteismo nella scuola dell'obbligo grazie all'introduzione del gioco in aula, nello specifico il gioco da tavolo *Equations*. La citazione in epigrafe è tratta dall'opera di Bertrand Russell *Why I Am not a Christian* (1957), che gli autori citano all'inizio e alla fine del loro lavoro (Allen, Main 1974)[95]. La ricerca era stata condotta nella Pelham Middle School, nel centro di Detroit, nell'anno scolastico 1972-73 e aveva coinvolto 2 insegnanti e 9 classi (tutte classi di 7° grado, equivalente alla seconda media, tranne una dell'8° grado che aveva vissuto un'esperienza analoga l'anno precedente). Lo svolgimento del gioco in classe prevedeva tavoli di gioco da tre studenti: i gruppi iniziali erano creati sulla base delle abilità matematiche possedute dagli studenti (sulla base del criterio di valutazione scelto dal docente): i primi tre sono assegnati al tavolo 1, i successivi tre al tavolo 2, e così via. Dopo la prima partita i tavoli vengono ridisegnati in base ai risultati: il giocatore vincitore del tavolo (*High scorer - H*) si sposta al tavolo con il numero precedente (dal tavolo 2 al tavolo 1, dal tavolo 3 al tavolo 2, e così via) e così il giocatore perdente del tavolo (*Low scorer - L*) si sposta al tavolo con il numero successivo. In sostanza si sale o si scende di categoria in base al risultato della partita. I giocatori che sono arrivati secondi nel proprio tavolo (*Middle scorer - M*) rimangono lì dove sono. Il giocatore vincente del tavolo 1 rimane dov'è (non può salire di categoria), così come il giocatore perdente del tavolo con il numero più alto.

Questa modalità di gioco-lavoro favorisce l'inclusione e l'apprendimento di ogni studente secondo i propri tempi, come spiegano gli autori:

> This tournament structure and its implications for the affective and cognitive experiences of the learners is probably the most significant aspect of the learning environment of this study. The

[95] Ho riportato qui l'estratto un po' più ampio nella traduzione italiana, anche perché molto attuale nel periodo che sta vivendo il mondo negli ultimi due anni.

tournament rules have the result that in the long run each student in the class turns out to be H about one-third of the time, M one-ththird of the time, and L one-third of the time. In terms of the game, what amounts to"winning" and "losing" with respect to other players is shared evenly among all. Each turns out-to "win" half the time with respect to others, and to "lose" half the time. In this manner the competitive aspect of this learning situation is carefully controlled. In terms of "wins" and "loses" for purposes of the game, the slow student is not overly-deprived and the fast student is not overly-indulged. Each receives his fair share of each. Reinforcements are evenly shared among all students in the classroom, not unduly heaped upon only a few of the brightest. [Allen, Main 1974, p. 6]

Inoltre, sottolineano («may be the most important affective result of this arrangement»), la scelta di questa modalità permette agli studenti di scoprire il lato positivo della sconfitta («losing»). Gli studenti che partecipano al gioco imparano che una sconfitta può essere un'occasione di crescita («one of the most important lessons for improving their problem-solving in general»). Ad esempio:

The player who loses at Table 5 because he did not understand how to subtract negative numbers, but learns how to do so in the process, will have an opportunity to use his new-found knowledge at Table 6 and probably to good advantage. On the other hand, the player who wins at Table 3 and moves to Table 2 - where he may be walloped by the wizards there will become aware of the price attached to "winning. When these experiences occur repeatedly, players gain a sense that "winning" is not an unmixed blessing and that "losing" does not fail to have its compensations. They learn to cope with and "live" with both outcomes. That is probably a useful capability for other situations outside the games. [ivi, pp. 6-7]

Infine, è particolarmente favorita la cooperazione tra gli studenti attraverso una suddivisione in squadre di livello eterogeneo, a differenza dei tavoli-gruppi di gioco che sono inizialmente omogenei. Ogni squadra è costituita da: «one fast learner, one slow learner, and a sprinking of players in between». Il punteggio durante il gioco è assegnato in modo tale che le vittorie di uno "slow learner" in tavoli di gioco di categoria pari o superiore a quella iniziale valgono un po' di più per la squadra rispetto alle vittorie di un "fast learner". Non passa molto tempo finché il fast learner della squadra capisce che se vuole ottenere un buon punteggio deve insegnare agli altri componenti della sua squadra qualcosa di ciò che sa.

Lo studio fu realizzato durante due periodi scolastici (di circa 80 giorni ognuno): alcune classi lavorarono per un periodo o per entrambi i periodi con i giochi per due lezioni a settimana, svolgendo le altre tre lezioni "ordinariamente", mentre altre (i gruppi di controllo) non hanno mai lavorato con i giochi. Questa era l'unica differenza tra le classi poiché i docenti sono sempre rimasti gli stessi. I risultati statisticamente significativi della sperimentazione relativamente al tasso di assenteismo (la percentuale di giorni di assenza rispetto al totale dei giorni di scuola del periodo) sono descritti dagli autori così:

(1) The mean absentee rate in nongames classes was significantly higher (more than three times) than that in games classes.

(2) The mean absentee rate of students switched from games classes in the first teem to nongames classes in the second term was significantly more (just about double) in the second term than in the first.

(3) The mean absentee rate in the second term of students enrolled in nongames classes both terms was not significantly more (at the .05 level) than that of students enrolled in games classes the first term and nongames classes the second, although it was significantly more at the .10 level. Thus the evidence for there being a carryover effect of participation in a games class for one term in lessening

absenteeism in a nongames class the subsequent term is much more tenuous than is the clear evidence that there is more absenteeism in nongames classes than in games classes. [ivi, p. 1]

Appaiono dunque evidenti gli effetti dell'utilizzo di questo gioco sul tasso di assenteismo nelle classi della scuola di Detroit e, se si considera l'assenteismo come un indicatore della motivazione allo studio – più è basso uno, più è alta l'altra – allora è semplice arrivare alla conclusione che il gioco favorisce la motivazione allo studio. Con i giochi – sostengono Allen e Main – non vi è dubbio che si può creare amore, ma la domanda ovvia successiva è:

> Does it lead to the seeking and achievement of knowledge? In intelligent hands, it should. On this dimension, we need to find out more. [Allen, Main 1974, p. 15]

2.1.5 I contributi della rivista «Mathematics in School» (1986-1992)

«Mathematics in school» è una rivista pubblicata dal 1971 fino a oggi dalla *Mathematical Association* britannica, un'associazione "che sostiene la matematica nell'educazione" come si legge nel suo logo, attiva dal 1897 come evoluzione di una associazione culturale volta al rinnovamento dell'insegnamento della geometria, fondata nel 1871 sotto la presidenza di Thomas A. Hirst:

> The MA was the first teachers' subject association to be formed in England, in 1871, as the 'Association for the Improvement of Geometrical Teaching', the original catalyst being the need to develop and to lobby for alternatives to the then standard treatment of geometry.
>
> The Association's history is located within a broad context of changes in the educational system, developments in educational and mathematical thought, the growth of professionalism, and wider social, political and economic forces which influence the curriculum.
>
> MA reports and publications became standard references in the growing international interest in mathematics education throughout the 20th century. [MA, sito istituzionale, https://www.m-a.org.uk/who-we-are]

Le sue origini ottocentesche erano incentrate sulla geometria euclidea[96], quindi essenzialmente sull'istruzione secondaria (allora opportunità quasi esclusivamente limitata ai ragazzi maschi di famiglie benestanti oppure destinatari di beneficenza, la "charity" inglese). L'evoluzione successiva verso l'istruzione matematica per tutti è ben esemplificata dal titolo (si noti il punto interrogativo) *Mathematics for the multitude?* di un saggio commissionato e pubblicato dalla stessa MA sulla sua storia nel 1994 (Price 1994).

Negli anni 1986-1992 furono pubblicati sulla rivista «Mathematics in School» una serie di contributi sul gioco nell'insegnamento della matematica che si presentarono ai lettori/soci come una proposta culturale complessiva, che prende spunto fortemente dall'approccio di Dienes, ma nel contempo

[96] Si ricorda soltanto che in queste discussioni fu coinvolta la comunità matematica italiana postrisorgimentale, ed in particolare Luigi Cremona che ebbe un intenso rapporto con Hirst (Nurzia (a cura di) 2017, Israel 2017, Israel, Millán Gasca, Regoliosi 2019, Giacardi, Scoth 2014). Le vivaci polemiche si possono collegare a dinamiche interne alla comunità dei cultori di matematica nei singoli paesi (fra cui gli ingegneri, attenti all'educazione superiore dei futuri ingegneri) e anche all'impegno patriottico di essi stessi per lo sviluppo della cultura nazionale (Millán Gasca 2011).

operativa, nello stile che caratterizza questa associazione, e anche l'atmosfera culturale in Gran Bretagna: l'ambizione di cercare di cambiare e migliorare l'istruzione e lo sforzo messo in campo per realizzarlo, a cavallo fra ricerca teorica e la quotidiana attività della rete degli insegnanti delle scuole[97].

In questi contributi ci si riferisce a "games" e a "play", mentre è assente l'espressione "recreational mathematics".

Dapprima vide la luce, nel 1986, contributo di sintesi – riprendendo alcuni studi recenti – e di prospettiva, *Games. A rationale for their use in the teaching of mathematics in school*, scritto dallo studioso universitario Paul Ernest, che si apre con il riferimento ai giochi con le carte e al tiro al bersaglio (le freccette), agli scacchi e giochi da tavolo in vendita fino a oggi (Monopoly, Scrabble). Da quell'anno e fino ai primi anni Novanta almeno furono pubblicati due diverse serie di articoli a cura di due autori che possiamo descrivere come "esperti" in didattica della matematica – una nuova figura professionale allora emergente – ma comunque più ancora vicini al lavoro "sul campo" degli insegnanti: 13 articoli di David Kirkby dal titolo *Maths games workshop* (Kirkby 1986-1989) e 5 articoli di Bernard J. Oldfield dal titolo *Games in the learning of mathematics* (Oldfield 1991-1992)[98].

Si prendono in esame dapprima il contributo di Ernest e i lavori cui egli si riferisce, che mostrano l'esistenza di progetti di ricerca solidi in questa direzione, fra cui uno negli Stati Uniti e il lavoro condotto nel Regno Unito da Edith Biggs (1911-2002), membro dell'ispettorato scolastico impegnata nell'istituzioni di corsi di formazione per gli insegnanti volti a diffondere nuove metodologie didattiche per la matematica, che ebbe un ruolo importante nel progetto Nuffield per la matematica primaria (D'Altorio 2020). Verrà posta particolare attenzione a un contributo sull'assenteismo scolastico e all'impatto del gioco *Equations*, tutt'ora in vendita.

Subito dopo si descriverà l'"officina di giochi" proposta da Kirkby (che iniziava allora una prolifica carriera come autore di sussidiari per la scuola primaria per diverse case editrici britanniche e consigliere *freelance*) e la proposta complessiva di Oldfield (attivo come esperto in ambiti istituzionali locali nel Kent e nel West Sussex, nel sudest dell'Inghilterra), che include una rilevante classificazione di giochi per la didattica[99].

---

97 Si veda ad esempio la precedente proposta della Fondazione Nuffield studiata in D'Altorio 2020. Questi contributi si collocano invece negli anni a ridosso del celebre rapporto *Mathematics counts* (1982) della Commissione Cockcroft, che Ernest cita nel suo contributo seminale.

98 Sono state scelte queste due serie di contributi, ma, ad esempio, un lavoro dello stesso periodo pubblicato nella rivista è Friedlander & Taizi 1987. Vi sono citazioni incrociate fra questi contributi, ed è ben presente fin dal primo contributo di Ernest l'approccio di Dienes; tuttavia, non si hanno elementi per parlare di un disegno strategico voluto, riguardo all'insieme degli articoli che furono pubblicati. In quegli anni vi furono mezza dozzina di presidenti della MA, fra cui ad esempio A.G. Howson e Alan J. Bishop. Rimane così aperta la possibilità di esplorare l'intera produzione in questo contesto editoriale.

99 Si ritiene che si tratti di un tentativo inedito e rimasto unico nel suo genere, e che si distingue e si collega alle classificazioni "catalogazione" o di analisi storico-culturale che prese in esame nel Capitolo 1 (si veda §1.1.2)

«A rationale for the use of games in the teaching of mathematics» di Paul Ernest (n. 1944)

Paul Ernest è attualmente professore emerito di filosofia dell'educazione matematica all'Università di Exeter, noto per il suo lavoro sugli aspetti filosofici dell'educazione matematica e per i suoi contributi allo sviluppo di una filosofia costruttivista sociale della matematica. Nella prefazione all'autobiografia di Dienes *Memoirs of a maverick mathematician* (Dienes 1999), Ernest racconta del suo primo incontro con il matematico ungherese – in un pranzo insieme alla moglie – un anno prima della pubblicazione dell'articolo, un momento intenso che diede l'avvio a un rapporto ininterrotto fra i due negli anni seguenti. L'episodio si svolse così: Dienes propose ad Ernest un rompicapo da risolvere con un mazzo di 48 carte che mostravano delle immagini con vari numeri di fiori e di foglie: gli diede 47 carte del mazzo e gli chiese di scoprire qual era la carta mancante. Ernest ebbe bisogno di un'ora intera a risolvere il rompicapo (mentre le cameriere del ristorante aspettavano solo loro per chiudere finalmente il loro turno di lavoro!):

> I had solved the problem, but it was the hardest working lunch I have ever had! As they say, there is no such things as a free lunch. [Dienes 1999]

Ernest cita nell'articolo l'affermazione impegnativa di Dienes: «all mathematics teaching should begin with games»; la prende con cautela, convinto però che egli sia «un uomo che vale la pena di ascoltare»[100]. Ecco come pone nelle prime righe del suo articolo la questione dei giochi nell'aula di matematica come scelta che effettivamente avvicina alla matematica, oltre proposte episodiche e senza un criterio (*rationale*):

> Why use games in the mathematics classroom? Can games help children to learn mathematics, or are they just a form of entertainment or "time filler"?
>
> Many teachers bring out games, puzzles and recreations around Christmas time, or at the end of the Summer term. These activities help to create a light hearted and "fun" atmosphere in the classroom which pupils and teachers enjoy. But pupils will often say "that was fun and I enjoyed it, but it wasn't real mathematics". Are they right? Are games just an enjoyable interlude or can games be used to actually teach mathematics? [Ernest 1986, p. 2]

Un certo numero di ricerche sperimentali condotte sistematicamente negli anni precedenti in paesi di lingua inglese – condotte anche con gruppi di controllo e con test costruiti con domande a risposta multipla di cui egli offre un esempio – hanno portato Ernest alla conclusione che si possono effettivamente usare i giochi *per insegnare matematica* e ottenere apprendimento riscontrabile, ma soltanto a condizione che la loro presenza in aula non sia episodica, come riempitivo o per puro intrattenimento:

[100] «Dienes has not only carried out an extensive programme of classroom research, he has also developed some of the best apparatus available for teaching mathematics, including the multi-base arithmetic blocks, the algebraical experience materials, logic blocks and the number balance» (Ernest 1986, p. 3; include in bibliografia il prima citato Dienes 1963). Menziona anche Jean Piaget e Jerome Bruner (senza però alcun riferimento in bibliografia), mentre vi si trova l'allora noto saggio *The psychology of mathematics for instruction* (1981) dell'influente studiosa Lauren B. Resnick (con Wendy W. Ford).

[...] if games are to contribute to the effective teaching of mathematics they must be fully incorporated into the mathematics curriculum.

During the teaching of a specific topic, or directed at a particular objective, games should be

1. selected on the basis of the desired objectives,

2. incorporated into the teaching program.

Used in this way mathematical game have a vital part to play in aiding pupils' achievement and success in mathematics. [Ernest 1986, p. 5]

Ernest quindi tralascia i vantaggi – che enuncia però all'inizio dell'articolo - e si concentra invece sul raggiungimento di specifici obiettivi genuinamente matematici", precisamente sui seguenti che egli individua come i più pertinenti:

1. The reinforcement and practice of *skills*

2. The acquisition and development of *concepts*

3. The development of *problem solving strategies* [Ernest 1986, p. 3, il corsivo è mio]

Alla distinzione fra abilità e conoscenze si affianca quindi la questione più generale della risoluzione dei problemi – come si è visto nel lavoro di Kordemsky – e sempre più centro di attenzione della ricerca didattica, anche sulla scia della diffusione del lavoro di Polya (si pensi ai programmi per la scuola elementare in Italia del 1985). Ernest citava il multimedia *Problems with Patterns and Numbers* (1984) curato dallo Shell Centre for Mathematical Education della University of Nottingham che mostrava bambini con loro insegnanti intenti a giocare a *Pirates* e altro e migliorando le loro capacità strategiche di fronte ai problemi. Non senza un pizzico di ironia, Ernest scriveva:

H[er] M[ajesty] Inspectorate[101] have gone so far as to specify the following problem solving strategies as distinct objectives of mathematics teaching.

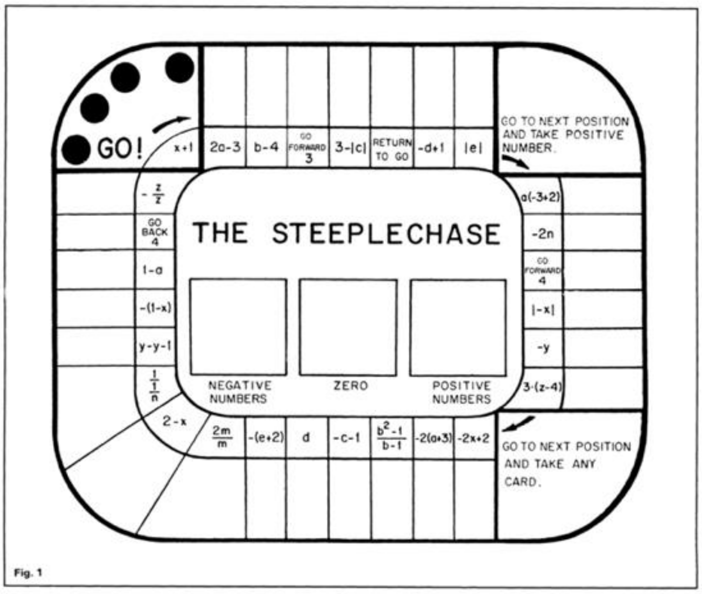
- Trial and error methods
- Simplifying difficult tasks
- Looking for pattern
- Making and testing hypotheses
- Reasoning
- Proving and disproving [ibidem, p. 4]

Ernest inquadra il contributo di Dienes nel secondo obiettivo, e cita la seguente riflessione di quest'ultimo:

the rules of games represent realistic restrictions on possible mathematical operations and thus help to guide and shape children's mathematical understanding [cit in ivi, p. 4]

Ernest menziona il gioco da tavolo *The Steeplechase* e implicitamente il gioco *Equations*, riferendosi al lavoro di Allen e Main (1974) citato nel §2.1.4.

[101] Il riferimento è ai contenuti del documento *Mathematics from 5 to 16* (1985) elaborato dal Department of Education and Science.



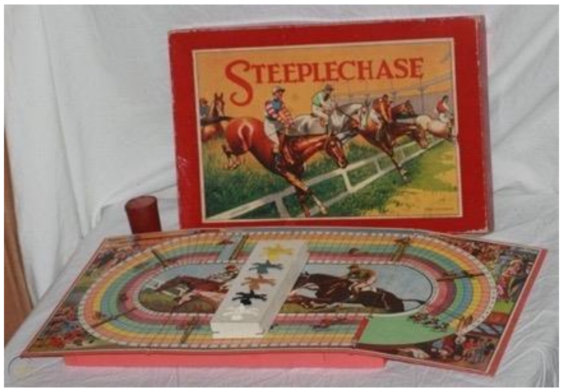


Figura 2.11 – A sinistra, riproduzione del tabellone del gioco *The Steeplechase* (“la corsa a ostacoli”), citato nell’articolo di Ernest sull’uso dei giochi nell’insegnamento della matematica (Friedlander, Taizi 1987, p. 3); a destra un gioco da tavolo in commercio dallo stesso titolo riguardante una corsa a ostacoli da cavalli.

The Steeplechase era stato al centro di una sperimentazione con studenti dei primi tre anni di scuola secondaria in Israele, la quale, secondo Ernest, portava conclusioni positive per tutti e tre gli obiettivi matematici con studenti dei primi tre anni di scuola secondaria in Israele (Friedlander 1977, Ilany et al 1982). Il gioco (2/4 giocatori, il tabellone è riprodotto nella unica illustrazione dell’articolo, qui nella Figura 2.11) è stato pensato principalmente per prendere confidenza con la sostituzione algebrica, o meglio con la sostituzione di un numero all’interno di una proposizione aperta. Scopo del gioco è compiere a un giro completo del percorso a partire dalla casella di partenza (*Go!*). Ci sono tre mazzi di carte, con dei simboli numerici: carte con le cifre da 1 a 6, carte con la cifra 0 e le carte con i simboli per numeri negativi, da – 1 a – 6. Ogni giocatore durante il suo turno sceglie il mazzo di carte da cui pescare una carta e sostituisce il numero corrispondente nell’espressione algebrica scritta sulla casella dove si trova la sua pedina. Nella sperimentazione si è visto che, tra gli studenti meno capaci in partenza, chi ha giocato con *The Steeplechase* ha avuto dei risultati migliori di chi non ha giocato. Ciò riguarda non soltanto le abilità algebriche ma anche l’assimilazione di concetti portanti dell’algebra elementare; si riportano qui le conclusioni principali dell’articolo originale:

> 1. On the whole, the pupils who played the game did not regard the expression - *x* as giving negative outcomes only, whereas non-playing pupils did
>
> 2. When asked to choose a number to substitute into a given expression, the pupils who played chose positive and negative numbers equally, whereas pupils who did not play chose positive numbers only.
>
> 3. Given the number resulting from a (unknown) substitution, playing pupils succeeded to a far greater extent than non-playing pupils in finding the number to be substituted to obtain the given result (that is, in performing the reverse process before they had learned to solve equations). [Ilany et al 1982, pp. 224-225]

A supporto del primo obiettivo vengono altri tre studi citati provengono da uno stesso gruppo di ricerca statunitense molto attivo in questo campo, formato da George W. Bright, John G. Harvey e Margariete Wheeler tutti dello stesso istituto (Wheeler 1983, Bright et al 1979, Bright et al 1982). I primi due riguardano l'uso dei giochi per rafforzare quel che viene descritto come fatti numerici basilari di moltiplicazioni di numeri naturali a una cifra (le tabelline pitagoriche) e le relative divisioni («basic multiplication and division facts with single digit factors»). Erano state coinvolte rispettivamente 14 classi di alunni 9-11 anni nel 1976 e 10 classi di alunni 10-11 anni nel 1977; ogni classe aveva giocato per 15 minuti ogni giorno per sette giorni complessivi. I miglioramenti in un test somministrato all'inizio e alla fine delle attività con i giochi (punteggi migliori in media del 56%) hanno mostrato, scrive Ernest, che «the games treatment was an effective way to retrain and reinforce children's skills with basic number facts» (Ernest 1986, p. 3). Il terzo studio riguarda l'ordinamento dei numeri razionali, e ancora esso avrebbe mostrato essere un efficace rinforzo delle capacità degli allievi.

Al riguardo, conviene notare che i ricercatori statunitensi (Bright et al 1979) sono cauti nelle loro conclusioni relative all'effettivo apprendimento raggiunto: essi sottolineano che si tratta dei primi 10 giorni di scuola, e che quindi è difficile fare previsioni sull'impatto successivo, e inoltre ammettono francamente che non hanno idea di quanto gli allievi avrebbero espresso in un contesto diverso da quello del test.

Per quanto riguarda invece il secondo obiettivo, cita uno studio della stessa équipe statunitense condotto con studenti di 11 e 13 anni sul gioco equo nella teoria della probabilità (Bright et al 1983a, 1983b). Gli studenti hanno giocato con 8 coppie di giochi (uno equo e uno no) e ad alcuni alunni sono stati forniti i risultati di una simulazione al computer dei giochi (50 partite simulate): i punteggi dei test di questi alunni sono sensibilmente migliorati da prima a dopo le attività con i giochi.

Largo spazio è dato a un ampio progetto di innovazione didattica condotto da Edith Biggs con studenti di 7-13 anni di 12 scuole (per metà scuole elementari e per metà scuole medie) di Londra, che teneva in considerazione specifica gli «slow learners» accanto agli studenti senza particolari difficoltà (Biggs 1985). In questo caso non vi era l'impianto sperimentale controllato che potesse permettere di attribuire ai soli giochi eventuali impatti sugli allievi; tuttavia, aspetti diversi di questo progetto servono a Ernest per quanto riguarda il secondo obiettivo e il terzo, poiché i giochi erano una parte importante del programma di studio (tranne per gli studenti più grandi e senza difficoltà). Per gli studenti con apprendimento lento, i giochi sono stati usati prima come strumento diagnostico e poi come ausilio per l'insegnamento. Gli studenti avevano cominciato mostrando un pregiudizio nei confronti dei giochi considerati «not proper maths», ma lentamente avevano cambiato il loro atteggiamento e cominciato a divertirsi lavorando con i giochi. Si sono rilevati sostanziali miglioramenti nella comprensione concettuale (sistema posizionale e delle quattro operazioni).

Per lo sviluppo di strategie di problem solving, Ernest cita lo studio di Biggs sui giochi con agli studenti senza particolari difficoltà (per i più grandi, il programma si concentrava sui problemi e l'investigazione, non esclusivamente riferita ai giochi). Bright aveva pubblicato nel 1980 uno studio nel «Journal of Experimental Education» sulle mosse nel gioco in quanto legate alla strategia e alla conoscenza (Bright 1980), e soprattutto nello stesso anno William H. Kraus aveva discusso la tesi di dottorato *An exploratory study of the use of problem solving heuristics in the playing of games involving mathematics* presso l'Università di Wisconsin–Madison (Kraus 1980; si veda Wheeler 1983): entrambi questi lavori mostravano come i giochi rendono possibile individuare il comportamento "strategico" nella risoluzione di problemi di individui più o meno allenati, e allo stesso tempo migliorarlo; Kraus addirittura arrivava attraverso i giochi a suddividere le classi in gruppi contrassegnati dal tipo di strategie scelte di fronte ai problema di matematica.

Come si è visto, Ernest si limita volutamente a considerare un impatto effettivo dei giochi, in particolare i giochi da tavolo, sull'istruzione matematica, nella scuola dell'obbligo almeno fino ai 13 anni. Egli però fin dall'inizio si riferisce a un valore aggiunto che riguarda la motivazione (aspetto che emerge nelle ricerche di Ilany et al e di Biggs), ma anche molto di più. I giochi:

- introducono varietà nei programmi di studio;
- offrono l'occasione di conversazione (fra allievo e insegnante, ma anche fra pari) quando si dichiara la mossa da compiere e si discute la correttezza di risposte e differenti strategie risolutive; e in generale portano situazioni di oralità
- incoraggiano il lavoro cooperativo perché quando si affronta un gioco matematico anche chi compete sta lavorando insieme verso un risultato comune che verrà condiviso;
- provocano l'"immersione" nelle attività, il coinvolgimento attivo, perché è impossibile giocare passivamente senza essere coinvolti, soprattutto se si vuole vincere
- fanno sì che lo studente assimili, renda propri i concetti e le abilità

Questi ultimi due aspetti riportano l'attenzione agli aspetti trattati nel Capitolo 1 sull'antropologia del gioco, anche se Ernest (a differenza di Guzmán, come si vedrà nel §2.1.6), non ne fa alcun cenno. L'esempio principale che egli riporta a questo riguardo è lo studio sperimentale sull'introduzione del gioco in aula usando *Equations* di cui abbiamo parlato nel precedente paragrafo.

Games in the teaching of mathematics: David Kirkby e Bernard J Oldfield

Negli anni 1986-1988 David Kirkby pubblicò a puntate (13; si veda Bibliografia B1) su «Mathematics in school» una "officina di giochi matematici", costruendo un approccio complessivo come auspicato, che presentò poi nel suo libro *Games in the teaching of mathematics* (1992). Kirkby è una figura tipica degli anni Ottanta-Novanta del secolo scorso, autore di decine di libri e sussidiari fino al 2000, formatore di insegnante e consulente free-lance, come lo descrivono gli editori. Per quanto il livello scolastico di riferimento sia principalmente la scuola primaria (per i quali ha scritto varie famiglie di testi, secondo le regole di un mercato di editoria didattica che chiede sempre prodotti nuovi), considerazioni e contenuti proposte sono assolutamente adeguate anche al percorso di scuola secondario. Nell'introduzione sintetizza la visione che è lo sfondo della sua proposta:

> In school they [games] are often relegated to end-of-term activities, Friday afternoons and Christmas. If this is so then they will never be accepted as making a serious contribution towards mathematics learning.
>
> Some teachers view the use of games ad appropriate, mainly, to help the less able. I believe they have much to offer the whole range of ability.
>
> Many school texts and schemes relegate games to a couple of pages at he back, almost as an afterthought.
>
> My intention, through this book, is to illustrate ways in which games can be given a higher profile. [Kirkby 1992, p. 4]

Si ritrova una critica allo scarso spazio dedicato ai giochi a scuola: utilizzati solo in periodi particolari dell'anno (ultimi giorni prima delle vacanze o in orario extracurriculare), presenti su un paio di pagine dei libri scolastici e considerati uno strumento didattico principalmente per i «meno capaci». L'autore propone un più alto profilo: parla di entusiasmo, motivazione, autostima, interesse, ma presenta anche un dettagliato elenco di obiettivi, di bersagli collegabili al curriculum di studi di matematica a scuola (Tavola 2.4). Le tre aree indicate da Ernest 1986 sono così esaminate in modo analitico in modo parallelo a quanto proposto da Dienes e Kordemsky e di quanto propone negli stessi anni Guzmán.

1. learn the language and vocabulary of mathematics;
2. use mathematical notation;
3. know mathematical facts;
4. develop mathematical skills;
5. understand mathematical concepts;
6. devise problem-solving strategies;
7. develop ability with mental mathematics
8. be the generator of the mathematical activity at a variety of different levels;
9. serve as a source for investigational work;
10. arise naturally within the investigation process.
In a wider context, games contribute to the pupil's development because they can:
11. encourage discussion – both pupil-teacher discussion and pupil-pupil discussion (particularly via team games);
12. contribute to the development of communication skills:
(explain the rules to others)
(write down your own rules);
13. stimulate creativity and imagination:
(make up your own game)
(invent your own rules)
(try your own variation);
14. encourage co-operative learning:
(work in small teams).

Tavola 2.4 – Gli obiettivi didattici dell'utilizzo dei giochi nell'insegnamento della matematica [Kirkby 1992, pp. 5-6] Kirkby presenta esempi concreti di giochi per ognuno di questi bersagli formativi; e prova una classifica dei giochi basata sui primi sei.

Questa visione per obiettivi si intreccia con una serie di otto idee-guida per l'azione didattica sul campo, delineando complessivamente un vero e proprio approccio pedagogico attraverso il gioco, anche se limitato a giochi con delle regole ben definite, per i quali sono spesso sufficienti carta e penna, (secondo quanto si è visto nel §1.1.2 e il terzo tipo di Dienes): rompicapo o problemi di matematica ricreativa sono esclusi, ma anche – forse per semplificare l'implementazione didattica, e non farla dipendere dalla disponibilità di uno o l'altro gioco da tavola, giocattolo o materiale didattico – i giochi con materiali strutturati (di cui si è fatto largo uso nel progetto sperimentale presentato nella Parte II). Queste idee-guida richiederebbero un profondo ripensamento per estenderle al vasto patrimonio della matematica ricreativa nei suoi filoni attuali (si veda Tavola 1.11), a meno che non si formuli un gioco a partire da un quesito ricreativo, come nel caso del *Four Fours problem* che verrà discusso nel §2.2.

Training
Una fase preliminare di allenamento prima di giocare.
Purpose
Gli studenti devono scoprire lo scopo del gioco.
Participation
Tutti gli studenti devono essere coinvolti, sia chi è di turno sia chi non lo è, dall'arbitro al segnapunti.
Discussion
Conversazione in piccoli gruppi, che possono discutere le possibili risposte, le strategie impiegate, e così via.
Forward planning
L'insegnante come primo giocatore: prova a casa il gioco in modo da comprendere al meglio i punti di forza e i limiti del gioco rapportati alla propria classe.
Rules
Partire da regole semplici e inserire man mano altre condizioni per aggiungere complessità al gioco. È importante offrire l'occasione agli studenti di confrontarsi sulle regole del gioco.
Simplicity
I giochi migliori sono i più semplici che richiedono un numero limitato di componenti (anche i con carta e penna).
Flexibility
Un buon gioco può essere adattato a vari livelli di profondità matematica e si può modificare in diversi modi, considerando singolarmente le sue componenti.

Tavola 2.5 - Giocare con la matematica a scuola: Idee-guida didattiche secondo Kirkby

L'ultima idea guida, la flessibilità, è esaminata concretamente – questo carattere operativo, frutto di un contatto ravvicinato con la realtà scolastica, è uno dei pregi di Kirkby – in un esempio di formulazione autonoma dell'insegnante di varianti possibili di un gioco, considerando svariati aspetti "mobili": «objective, procedure, rules, scoring system, apparatus, numbers of players, board» (Kirkby 1992, p. 18). L'esempio proposto da Kirkby (*The nasty order game*) mostra la ricchezza e la varietà di attività matematiche che possono essere sviluppate a partire da un singolo gioco: nel §2.2 si procederà in modo analogo partendo da un gioco che a sua volta dipende da un quesito ricreativo, il *Four Fours problem*, anche se non verranno prese in considerazione tutte le varianti possibili del gioco iniziale.

The Nasty order game: il gioco base

«Apparatus»: un dado da 6

«Scoresheet»: foglio segnapunti diverso per ogni partita (Figura 2.12)

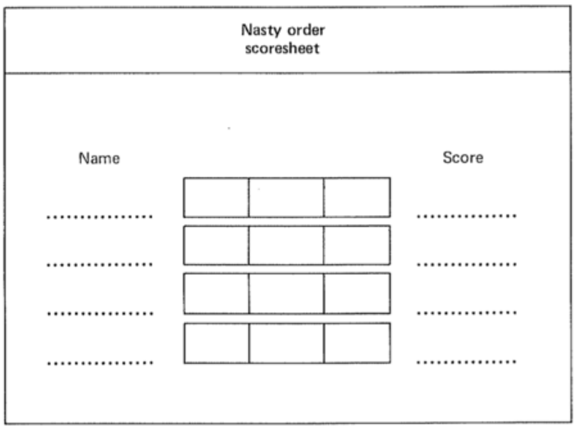


Figura 2.12 – «The Nasty order game»: il foglio segnapunti [Kirkby 1992, p. 18]

«Procedure»: 4 giocatori. Si scrivono i nomi negli appositi spazi. Ad ogni turno si tira il dado da 6 e si scrive la cifra uscita in una delle caselle vuote al centro del foglio segnapunti.

«Rules»: Ogni giocatore può collocare al suo turno la cifra uscita sul dado su una qualunque delle caselle vuote, ad eccezione di quelle che appartengono alla riga corrispondente al suo nome. Man mano che la partita va avanti, le caselle si riempiono e si scopre un numero di 3 cifre sulla riga di ogni giocatore.

«Scoring»: quando tutte le caselle sono riempite vengono assegnati i punti ai giocatori in ordine decrescente di numero: il giocatore con il numero più grande ottiene 4 punti, il secondo numero più grande ottiene 3 punti, il terzo 2 punti e il quarto 1 punto.

«Objective»: Avere il numero più grande sulla riga corrispondente al proprio nome. Il vincitore è il giocatore che ottiene il maggior punteggio totale al termine di quattro partite.

Tavola 2.6 - Descrizione del gioco *The nasty order game* di David Kirkby

Un tale gioco ammette molte varianti, "giocando" con i vari elementi che concorrono alla creazione dello scenario del gioco, dall'apparato fisico (dadi e altro) allo scopo del gioco (una riga fondamentale in ogni "libretto delle istruzioni") ai fogli segnapunti e alle regole (Tavola 2.6).

Creazione di varianti di *the nasty order game*

Obbiettivo o scopo del gioco

«the largest number» può essere sostituito da:

(a) the smallest;

(b) the largest odd;

(c) the largest even;

(d) the smallest odd;

(e) the smallest even;

(f) the nearest to 352;

(g) the furthest from 264;

(h) the largest number divisible by 3, and so on. [Kirkby 1992, p. 19]

Inoltre, ci si potrebbe trovare ad assegnare a un giocatore 0 punti perché sulla sua riga non è presente un numero pari o dispari.

Procedura

- il giocatore che tira per primo sceglie le colonne in cui dovranno essere collocate le cifre che usciranno in quel turno (da 4 lanci)
- il giocatore che inizia sceglie il tipo di Objective per la partita

Materiale strumentale («apparatus»)

- dado da 6 (gioco base)
- un dado a 10 facce con le cifre da 0 a 9
- una ruota con i settori numerati da 0 a 9
- due mazzi di carte con le cifre da 0 a 9 (si mescolano e si pesca una carta a ogni turno, in modo da ottenere durante una partita al massimo due ripetizioni per ogni cifra)

Regole

1) aggiungendo una condizione extra come, ad esempio:
   - non si possono inserire cifre ripetute nella stessa riga o numero
   - se il risultato del dado è 1, 2 o 3 allora il giocatore di turno deve collocare la cifra uscita nelle sue caselle, mentre se esce 4, 5 e 6 è costretto a collocarla nelle caselle degli avversari.
2) modificando il criterio di assegnazione del punteggio, complicando un po' la gestione della somma totale, come ad esempio:
   - a ogni turno si considera come punteggio il valore del numero di 3 cifre corrispondente alla propria riga
   - più articolata è l'opzione in cui si assegna 1 punto a chi ha un numero inferiore a 253, a chi ha numeri più grandi di 253 si assegnano 3 punti se il numero è pari e 5 punti se il numero è dispari e infine a chi ha esattamente il numero 253 si assegnano 10 punti.
3) partecipanti: modificare il numero di giocatori e conseguentemente il foglio segnapunti o anche dividersi in due squadre e a ciascuna squadra si assegnano due righe/numeri.

Foglio segnapunti

1) Aumentando o diminuendo le caselle per riga, ovvero giocando con numeri a due o quattro cifre.
2) Elaborando fogli più complessi (Figura 2.13, Figura 2.14 e Figura 2.15)

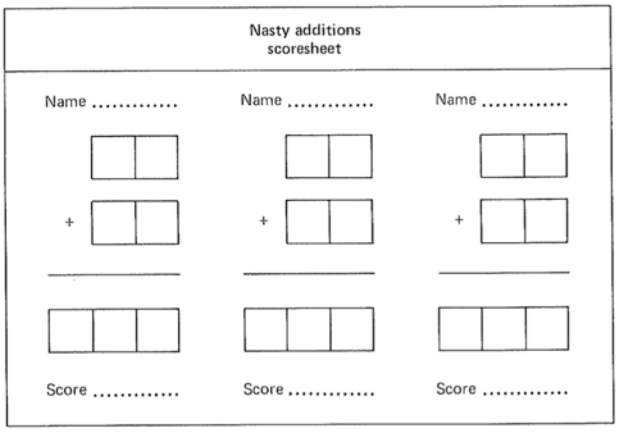


Figura 2.13 – Variante del foglio segnapunti di «The Nasty order game» in cui occorre eseguire un calcolo (addizione) per scoprire il proprio numero (esempio per tre giocatori) [Kirkby 1992, p. 21]

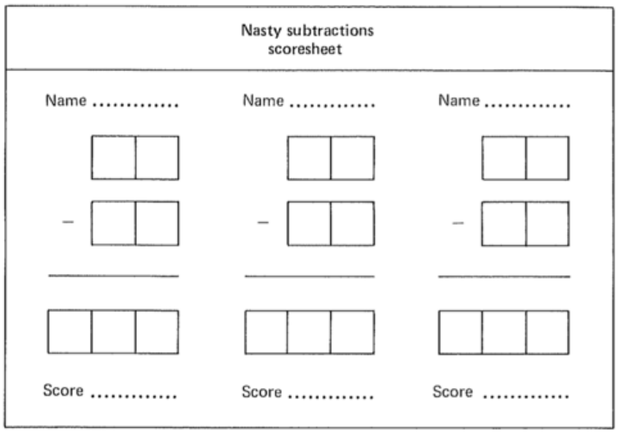


Figura 2.14 - Variante del foglio segnapunti di «The Nasty order game» in cui occorre eseguire un calcolo (sottrazione) per scoprire il proprio numero (esempio per tre giocatori) [Kirkby 1992, p. 22]

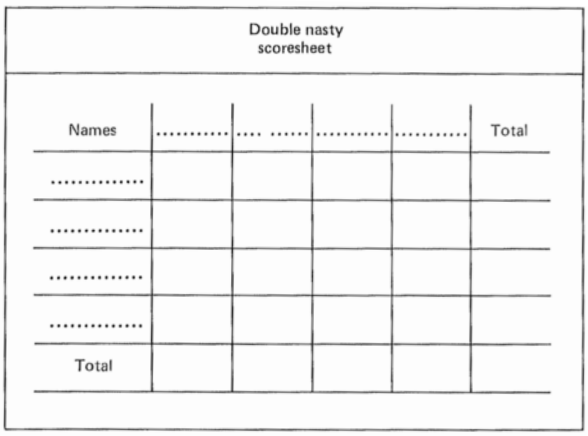


Figura 2.15 - Varianti del foglio segnapunti di «The Nasty order game» in cui ogni giocatore ha due numeri assegnati, uno per riga e uno per colonna e alla fine della partita si calcola la somma tra i due numeri [Kirkby 1992, pp. 23]

Una classificazione didattica dei giochi matematici: Bernard Oldfield

Bernard J. Oldfield ha svolto la sua carriera nell'amministrazione pubblica scolastica in Inghilterra. Nella serie di cinque articoli pubblicata negli anni 1991-1992 sulla rivista «Mathematics in School» propone una classificazione dei giochi matematici «in terms of the educational reasons» (Oldfield 1991, p. 41) che in un certo modo complementa e integra gli obbiettivi e le idee-guida di Kirkby: insieme essi offrono all'insegnante una vera e propria guida operativa, incentrata – come si è detto per Kirkby – sui giochi matematici e non sulla matematica ricreativa nel suo complesso. Egli illustra esempi per ciascuno dei gruppi elencate nella Tavola 2.7, osservando che un gioco può appartenere anche a due o più categorie di quelle proposte.

1. Puzzle-Type Games
2. Games to Reinforce Concepts
3. Games to Practice Skills
4. Games to Stimulate Mathematical Discussion
5. Games to Encourage the Use of Strategies
6. Multicultural Games
7. Mental Games
8. Computer Games
9. Calculator Games
10. Collaborative Games
11. Competitive Games
12. Games for Emphasising Underlying Mathematical Structures

Tavola 2.7 – La classificazione dei giochi matematici di Oldfield nella rivista «Mathematics in School» [Oldfield 1991, pp. 41-43]

I «Puzzle-Type Games» sono quelli dove è richiesto di «puzzle-out a situation». L'esempio scelto per illustrarli è il gioco *Blind Alley*, dove si devono scambiare di posto i gettoni rigati e quelli pieni in Figura 2.16. Si capisce bene che si tratta dei giochi dove il risolutore deve mettere insieme i pezzi in modo logico per arrivare alla soluzione, esattamente come si fa in quelli che comunemente vengono chiamati *puzzle* in Italia. Usando la definizione proposta da Schuh (§2.1.1): «If the game is so simple that it can have a complete analysis, we speak of a puzzle game.» [Schuh 1943, p. 4] Un altro esempio di puzzle game è il classico tris, mentre naturalmente gli scacchi non sono un puzzle game, ma lo sono tutti i rompicapi ispirati a essi: dal problema delle otto regine al salto del cavaliere, fino ai problemi del tipo "data questa situazione quante mosse servono per arrivare allo scacco matto".

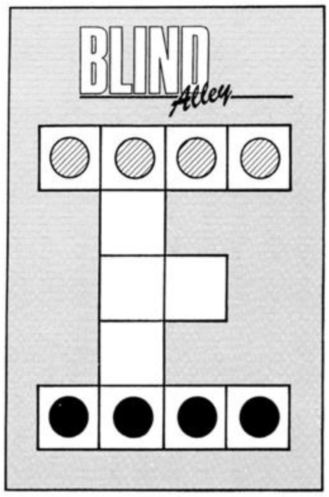


Figura 2.16 – Il gioco *Blind Alley* proposto come esempio di Puzzle-Type Games [Oldfield 1991, p. 42]

Fra i giochi per rafforzare i concetti o per esercitarsi nelle abilità (la seconda e terza categoria di Oldfield, in corrispondenza della distinzione già usata da Ernest e allora molto in voga, prima dell'arrivo dell'idea di "competenza") probabilmente si possono collocare moltissimi giochi, ad esempio tutti i giochi da tavolo dell'azienda italiana CreativaMente che sono stati usati nel progetto sperimentale presentato nella Parte II[102], tra cui il gioco aritmetico *Rolling CUBES Pytagora*, il quale permette di rafforzare il concetto di uguaglianza aritmetica e di esercitarsi nel calcolo con le quattro operazioni, e quindi rientra anche nella categoria dei giochi di calcolo, la nona categoria (si esaminerà questo gioco, in collegamento al filone *Four Fours problem* della matematica ricreativa, nel §2.2.4).

Tra i giochi che favoriscono la conversazione matematica – il quarto gruppo – si può trovare veramente tutto: Oldfield presenta dal NIM al Tangram, fino a un gioco di origine indiana chiamato *Leopards and Cows*. In classe, molto dipende dall'insegnante che deve guidare la discussione, al di là del gioco e le sue regole.

I giochi di strategia sono molti, ma sono facilmente riconoscibili: un esempio anche qui è il NIM, come anche il gioco del 15.

I giochi multiculturali della classifica mostrano l'arrivo nelle scuole europee della questione interculturale attraverso alunni che non hanno come madrelingua la lingua dell'insegnamento che si usa in aula. Da una parte, si tratta di aprire l'orizzonte verso giochi provenienti da altre aree del mondo, i quali (ma Oldfield non ne fa cenno), nella loro introduzione in classe, si potrebbero avvalere da un approccio storico-culturale grazie alle ricerche attuali che abbiamo delineato nel §1.1. Egli considera anche, con perspicacia, i giochi che non richiedono di capire un testo in lingua inglese (o forse si comprendono senza bisogno di tante parole).

102 Nel §3.3 si descrivono sei diversi giochi da tavolo.

Anche i «Computer Games» sono una novità in quel periodo: secondo Oldfield, spesso non sono adeguati all'insegnamento della matematica, eppure ce ne sono alcuni che rientrano nelle categorie 2, 3 e 5 (Tavola 2.7). Sottolinea i giochi che coinvolgono numeri molto grandi nei punteggi, i quali possono essere un'occasione per esercitarsi e sviluppare le capacità di calcolo.

Fra i giochi mentali menziona *20 Questions*: un gioco che consiste nell'indovinare un numero ponendo un massimo di 20 domande a cui si può rispondere solo sì o no. Nei «Calculator Games» rientrano invece i giochi di calcolo mentale, che favoriscono lo sviluppo e l'apprendimento di concetti come il sistema di numerazione posizionale e altri ancora che invitano a utilizzare la stima.

Tra i giochi cooperativi un esempio è il gioco geometrico *La Boca* (si veda la descrizione nel §3.3.4), mentre non c'è dubbio che la maggior parte dei giochi siano competitivi.

Infine, esistono alcuni giochi che mettono in luce strutture matematiche nascoste: Oldfield rimanda alla lettura di un classico di Dienes, *Mathematics through the senses, games, dance and art* (1973).

2.1.6 Insegnamento della matematica, approccio attraverso il gioco ed euristica: Miguel de Guzmán (1936-2004)

Miguel de Guzmán, come gli autori che abbiamo considerato, è partito dall'idea di introdurre i giochi matematici a scuola, anche se – più in generale dei matematici britannici citati – egli si riferisce in generale alla matematica ricreativa: non solo *giochi matematici*, ma ogni genere di *quesiti e puzzle* e inoltre i *teoremi e problemi "con sapore di gioco"*, fra cui alcuni teoremi della matematica elementare accessibili senza molte conoscenze previe e comprensibili nell'enunciato, come quelli che presentava in *Mirar y ver* (1977). Considera nei suoi libri e articoli numerosi esempi, alla base dei quali vi è una grande cultura matematica, come si dimostra nei riferimenti bibliografici: a partire dal 1984 cita autori anglosassoni (fra cui, diffusamente, Gardner), ma anche russi (diffusamente Perelman, nelle traduzioni in spagnolo dell'editore sovietico Mir), oltre all'originale francese di Lucas (si ricordi che aveva imparato il francese sugli antiquati libri francesi di matematica dei suoi fratelli) e le traduzioni inglesi di Kraitchik e di Schuh; e infine, come si è ricordato, lavori di matematici come Coxeter e Conway che hanno rinvigorito l'approccio ottocentesco di Lucas.

Proprio sulla base di questi contributi egli matura, come si è visto nel §1.3.1, una visione del rapporto stretto tra matematica e gioco, che cristallizza grazie alla sua conoscenza dell'antropologia filosofica. Di conseguenza, nella sua visione di matematica e gioco a scuola vi è una spinta verso uno scenario di ampio respiro: il gioco (*play*) nella didattica nella matematica, oltre i giochi matematici per la didattica (*mathematical games*). Si cercherà di rintracciare quindi nei suoi interventi gli elementi per l'approccio pedagogico alla matematica elementare attraverso il gioco che egli delinea, a partire dalla sua relazione *Juegos matemáticos en la enseñanza* tenuta in occasione del suo intervento al quarto convegno nazionali degli insegnanti spagnoli di matematica del 1984[103]. Sullo sfondo si trova però una visione complessiva della pedagogia della matematica, i suoi scopi, le difficoltà e la situazione presente in Spagna e altrove:

> [...] es claro que, especialmente en la tarea de iniciar a los más jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradable y, para algunos, aún apasionante. [...] Nuestros científicos y nuestros enseñantes se han tomado demasiado en serio su ciencia y su enseñanza y han considerado ligero y casquivano cualquier intento de mezclar placer con deber. Sería deseable que nuestros profesores, con una visión más abierta y más responsable, aprendieran a aprovechar los estímulos y motivaciones que este espíritu de juego puede ser capaz de infundir en sus estudiantes. [Guzmán 2004, p. 10]

Le considerazioni puntuali sull'utilizzo dei giochi nella didattica partono da alcune domande cruciali trovate anche negli altri autori: «I giochi matematici possono essere utilizzati con profitto nell'insegnamento? Come? Quali giochi? Quali obiettivi si possono raggiungere attraverso i giochi?»

La prima riflessione di Guzmán è relativa al carattere di passatempo e divertimento dei giochi: i giochi sono nati per divertire e per «passare il tempo» e questo è il loro ruolo fondamentale. È dunque naturale che ci sia molto sospetto sul loro utilizzo nella didattica:

> "El alumno – piensa – se queda con el pasatiempo que, eso sí, le puede comer el coco totalmente y se olvida de todo lo demás. Para lo que se pretende, es una miserable pérdida de tiempo".
>
> A mi parecer, en cambio, ese mismo elemento de pasatiempo y diversión que el juego tiene esencialmente, debería ser un motivo más para utilizarlo generosamente. ¿Por qué no paliar la mortal seriedad de muchas de nuestras clases con una sonrisa? Si cada día[104] ofreciésemos a nuestros alumnos, junto con el rollo cotidiano, un elemento de diversión, incluso aunque no tuviese nada que ver con el contenido de nuestra enseñanza, el conjunto de nuestra clase y de nuestras mismas relaciones personales con nuestros alumnos variarían favorablemente. [ivi, p. 13]

Un sorriso, un elemento di divertimento introdotto nel fare matematica a scuola sarebbe certamente un vantaggio per la relazione tra i docenti e i loro studenti, ma ancora di più tra la matematica e gli studenti. Quanto sostiene Guzmán non è distaccato dalla realtà scolastica, nella quale egli è intervenuto attraverso la redazione di libri di testo originali e profondi, bensì molto concreto: a partire dal nesso stringente tra matematica e gioco è possibile presentare molti concetti attraverso il gioco, «in molti casi con evidenti vantaggi di tipo psicologico e motivazionale». Insiste molto sul blocco psicologico che si crea nelle persone che si dichiarano incapaci, «negate a vita per la matematica»:

> Es un hecho frecuente que muchas personas que se declaran incapaces de toda la vida para la matemática, disfrutan intensamente con puzzles y juegos cuya estructura en poco difiere de la matemática. Existen en ellas claros bloqueos psicológicos que nublan su mente en cuanto se percatan de que una cuestión que se les propone, mucho más sencilla tal vez que el juego que practican, tiene que ver con el teorema de Pitágoras. [ivi, p. 13]

[103] In questo lavoro si farà riferimento alla pubblicazione della rivista Numeros che nel 2004 ha ripubblicato il testo originariamente apparso negli atti del convegno.

[104] Nei suoi libri di testo, anche per le secondarie superiori, egli inserisce alla fine di ogni lezione o capitolo una sezione chiamata "Rivista", con curiosità, storia, matematica ricreativa, un poco come un club di matematica dilettevole.

Attribuisce l'origine di questi blocchi per lo più all'età infantile, identificando qualcosa che ripeterà anche in numerosi interventi pubblici e che lo porterà a intervenire attivamente sulla questione della formazione degli insegnanti dei bambini: quando «domande assurde iniziali senza motivo» hanno ricevuto «risposte apparentemente sconnesse», la matematica diventa agli occhi dei più piccoli «una matassa inestricabile sempre più assurda e complicata». Si tratta dunque di intervenire nel momento giusto in modo tale che ciascuno possa mostrare le sue capacità e una intelligenza «corrispondente al successo della sua attività in campi diversi dalla matematica».

Il matematico spagnolo propone due schemi o vie possibili per guidare l'inserimento della matematica ricreativa nell'insegnamento. Il primo schema in quattro fasi, intitolato *Come risolverlo* (la traduzione letterale di *How to solve it*), di più ampio respiro, consiste in un'euristica attraverso la matematica ricreativa ispirata a Polya:

> Lo que sigue viene a ser, en sus líneas generales, un calco de las directrices fundamentales de la famosa obra de Polya ¿cómo resolverlo?, ilustradas aquí con algunos juegos que a mí, espigando en la literatura, me han parecido adecuados. El objetivo de este esquema consiste simplemente en tra- tar de poner bien patente la *semejanza de actitudes que se dan en la resolución de un puzzle o un juego y en la de un genuino problema matemático*, y cómo, efectivamente, muchos de los hábitos adecuados para la tarea matemática podría no adquirirlos igualmente bien divirtiéndose con ejemplos escogidos de juegos. [ivi, p. 15, la sottolineatura e mia]

L'idea di fondo è che – al di là dei contenuti di matematica elementare che si insegnano – l'esperienza intellettuale e umana del confrontarsi con un problema di matematica e attraversare un'indagine si può vivere o "mimare" con un indovinello o gioco. Si tratta quindi di una idea che ha implicazioni pedagogiche profonde, poiché coinvolge la ratio stessa per la quale si insegna matematica a scuola. Ci si diverte, certo, ma non è vero che anche i matematici attivi nelle frontiere della ricerca si divertono anch'essi?

Si tratta di un tentativo ambizioso di cui lo stesso matematico spagnolo riconosce i limiti. Egli presenta un abbozzo di schema (Tavola 2.8) relativo ai giochi matematici (anche se generalizzabile), che tuttavia necessita di essere corredato da esempi specifici per ognuna delle osservazioni/domande che appaiono sottolineate nello schema: «richiederebbe una profonda immersione nell'abbondante letteratura esistente (si pensi a quanto esposto nel §1.1.2) per analizzare i giochi più appropriati per ogni aspetto e verificare l'effettivo svolgimento di questa attività». Propone allora esempi per alcune delle osservazioni, che riguardano la matematica ricreativa intesa quindi in senso molto moderno, includendo giochi matematici, problemi ricreativi e problemi e teoremi con sapore di gioco.

Il linguaggio dello schema è volutamente non-serio, adopera un linguaggio colloquiale e quasi scanzonato: l'effetto drammatico – ispirato al libro di Polya – è ottenuto attraverso battute in prima persona scritte per un personaggio-alunno che svolge una specie di monologo interiore, con verbi ed espressioni quali «tramar», «lanzarse a lo loco», "¡ya me lo sé!», «me lo pinto en colores», «no nos liemos», «con los ojos cerrados». Il canovaccio lo accompagna in un cammino di pensiero matematico; un cammino che, attraverso la matematica, ha risvolti educativi ampi, che investono le virtù di Su e le dimensioni sottolineate da Kordemsky (perseveranza, iniziativa, acume, riflessione). L'allievo è invitato a mettersi in discussione, le parole che gli si propongono di recitare sono una piccola provocazione, eppure mostrano immedesimazione, come a dire "anch'io ci sono passato e ci passo ancora, questa è la matematica".

Si parla della plancia o tavolo da gioco, delle pedine, si propone persino alla fine che l'alunno inventi un gioco da sé... e lo brevetti!

Cómo resolverlo

1. ANTES DE HACER TRATARÉ DE ENTENDER. No pienses que es una observación del todo tonta. La experiencia dice que son muchos los que se lanzan a hacer cosas a lo loco, por si alguna da en el blanco por casualidad. ¿Sabes bien de qué va?

¿Cómo funcionan las diferentes partes del juego? Estúdialas una a una: forma del tablero, reglas, funcionamiento de las fichas...

Hazte una o varias figuras si te parece que te va bien.

Juega un poco con las fichas o las partes del juego según las reglas para familiarizarte con su forma de actuar.

2. TRAMARÉ UNA ESTRATEGIA. Busca conexiones con otros elementos que conozcas. Tal vez necesitarás construirte un juego auxiliar más simple que puedas resolver.

Al final de esta etapa deberías construirte un plan de ataque concreto.

Aquí tienes algunas observaciones y preguntas que te pueden ayudar en esta tarea.

Ya me lo sé. ¿Lo has visto antes? ¿Lo has visto en forma parecida al menos?

No me lo sé, pero conozco uno que... ¿conoces algún juego semejante, relacionado con éste de alguna manera? ¿sabes algo del otro que pueda ayudarte en éste?

¿Cómo marchaba aquél? Tienes un juego semejante en el que sabes cómo actuar. ¿Puedes usar la misma forma de proceder? ¿Puedes usar la misma idea que conduce allí a la solución? ¿Deberías introducir en éste alguna modificación que lo haga más semejante a aquél?

Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil. ¿Puedes resolver al menos parte del juego? ¿Lo puedes hacer en circunstancias especiales, suponiendo por ejemplo que hubieras conseguido superar una etapa inicial? Supón que se te pide un poco menos, ¿puedes entonces?

Supongamos el problema resuelto... ¿Puedes tratar de recorrerlo hacia atrás? ¿Puedes pensar desde aquí en alguna pista?

Si hago esto, entonces queda así... A ver si puedo transformar eljuego en otro más sencillo. Introduce tú mismo modificaciones en las reglas, en las condiciones... tratando de sacar alguna luz de estas modificaciones.

Me hago un esquema, me lo pinto en colores, me escribo una ecuación... Procura, por todos los medios a tu alcance tener un buen esquema de los puntos principales en la mente.

Veamos de nuevo... ¿para qué son así las reglas? ¿cuál es la mala (o buena) idea detrás de ellas? Fíjate de nuevo en la estructura del juego. Trata de encontrar pistas en la diferente función de las partes.

3. MIRARÉ SI MI ESTRATEGIA ME LLEVA AL FINAL. Trata de poner en práctica tus planes.

Ya tengo una idea. Vamos a ver si marcha. Lleva adelante tu estrategia con decisión. No te arrugues fácilmente. Si tienes varias ideas, pruébalas una a una, por orden. No las mezcles en un principio sin ton ni son.
No nos liemos... Probaré otra cosa. No te emperres demasiado en una sola estrategia. Si te lleva a una situación muy complicada, vuelve al paso segundo y busca otra estrategia. Probablemente hay otro modo más sencillo.
Lo conseguí... ¿por casualidad? Si te va bien con tu estrategia, estúdiala detenidamente para convencerte de que no es por casualidad.
4. SACARÉ JUGO AL JUEGO. No consideres que ya has terminado del todo cuando lo has resuelto. Míralo a fondo. Aprovecha tu solución para asimilar bien la experiencia.
No sólo sé que va, sino que veo por qué va. Trata de localizar la razón profunda del éxito de tu estrategia.
Con los ojos cerrados. Mira a ver si con la luz que ya tienes encuentras otra estrategia, otra solución más simple.
Ahora veo la astucia de las reglas. Trata de entender, a la luz de tu solución, qué lugar ocupan las condiciones y reglas del juego.
Además con esto gano a aquel otro juego. Mira si otros juegos semejantes funcionan también con el mismo principio que has encontrado.
Me hago otro juego... y lo patento. Constrúyete un juego semejante al que has resuelto modificando sus piezas o sus reglas y mira si tu principio vale aquí también.

Tavola 2.8 - «Directrices heurísticas basadas en juegos»: lo schema di Guzmán "copia-carbone" delle linee guida fondamentali di Polya nella risoluzione dei problemi. Si è andato a capo ad ogni frase, poiché ognuna delle frasi delle quattro fasi è molto densa. I corsivi sono dell'autore (ivi, pp. 15-17)

Il secondo schema presentato, *Direttrici tematiche per l'uso dei giochi*, è più vicino all'impostazione di Kirkby, poiché è rivolto agli insegnanti e direttamente applicabile in classe. Si tratta di una bussola fatta di idee-guida (Tavola 2.9):

- per orientarsi nel terreno della matematica ricreativa (e non solo fra i giochi matematici in senso stretto): egli ha già proposto un quadro storico e ora lo integra con un panorama seguendo certi filoni (evitando una classificazione al modo di Oldfield)
- per stabilire i collegamenti con i nuclei tematici della matematica elementare e anche con atteggiamenti tipici dell'attività matematica che "possono essere motivati, illustrati e arricchiti attraverso l'uso dei giochi" in classe.

B.- Directrices temáticas para el uso de los Juegos	
1. Sorpresas matemáticas	10. Hazte un dibujo
2. Cuentos con cuentas	11. Utilización de colores
3. Sistemas de numeración	12. Comenzar por lo fácil ayuda a resolver lo difícil
4. Criterios de divisibilidad	13. Piensa al revés. Supongamos el problema resuelto
5. Inducción	14. Solitarios matemáticos
6. Contar sin contar	15. Partidos matemáticos
7. Deducción lógica	16. Analogías escondidas
8. Elemental, querido Watson	17. Falacias
9. Simetriá	18. Feliz idea

Tavola 2.9 - Ricostruzione delle idee-guida tematiche per l'uso dei giochi in aula di Guzmán (Guzmán 2004). Nel testo si presentano come paragrafi, con esempi e bibliografia della singola "direttrice" o idea-guida.

Lo stile di scrittura di Guzmán è caldo e coinvolgente, facendo sentire gli insegnanti parte di una comunità che ruota attorno alla matematica e capaci di decisioni autonome a partire da una prospettiva culturale che egli vuole sostenere. A essere provocati però sono ora loro, e i loro "rollos magistrales" (pappardelle magistrali potremmo tradurre..., come a dire senza ascoltare nessuno, avulsi dagli allievi che si ha tuttavia di fronte). Le scelte dei 18 temi proposti confermano il forte legame esistente tra matematica, gioco e insegnamento nel pensiero di Guzmán. Il primo tema, chiamato «Sorprese matematiche», è particolarmente caro all'autore: egli cita la celebre frase di Aristotele

> «Infatti gli uomini hanno cominciato a filosofare, ora come in origine, a causa della meraviglia»[105]

collegandolo all'*esperienza vissuta* – sua, degli ascoltatori e dei lettori – di istanti densi e che segnano in profondità, di meraviglia, di sorpresa e di mistero:

> Cualquiera de nosotros que explore un poco en el origen de nuestro interés por las matemáticas encontrará sin duda instantes de sorpresa y admiración ante ciertos hechos matemáticos que nos han llamado poderosamente la atención. Los hay a todos los niveles, elementales, menos elementales, simples, más sofisticados... En la enseñanza la motivación es el motor esencial. ¿Por qué no apoyarnos en los elementos más adecuados para ponerlo en marcha con energía? Incluso cuando se trata de hechos que no pueden ser explicados plenamente, éstos pueden presentar aspectos de misterio que motiva fuertemente el interés por saber más para desvelarlo plenamente. [ivi, p. 25]

Il matematico spagnolo propone alcuni fatti sorprendenti, tra cui molti teoremi: di Desargues, di Steiner, di Poncelet, di Cantor, dell'infinità dei numeri primi. La meraviglia può consistere nella proprietà affermata dal teorema e/o nella bellezza della sua dimostrazione. La scelta delle meraviglie è personale e si è convinti che ciascun matematico – ciascun insegnante – possa trovare le "sue" in base ai propri studi e alle proprie attitudini.

Il secondo tema è un gioco di parole nella lingua spagnola, *Cuentos con cuentas*[106] che sfrutta la radice etimologica comune del conto e del racconto. In particolare, l'autore propone racconti dedicati a singoli argomenti matematici come la sezione aurea e Fibonacci, il triangolo di Pascal, il numero pi greco, il teorema dei quattro colori, l'ellisse, la cicloide, il nastro di Möbius e altri. Ecco che la matematica ricreativa, è combinata non solo con la storia, ma anche con la narrazione; un narrare la matematica che è naturale, poiché tanti fatti matematici hanno una connotazione quasi romanzesca:

> Existen constelaciones de hechos matemáticos que se prestan para hacer de ellos una novela bien interessante. Me pregunto si el tiempo malgastado en muchos de nuestros rollos magistrales en los que tanto abundamos los profesores de matemáticas de todos los niveles no podría invertirse con gran provecho en contar pausadamente alguna de estas historias apasionantes del pensamiento humano. [ivi, p. 26]

Nei temi successivi si trovano i classici giochi sui sistemi di numerazione, sui criteri di divisibilità, sull'induzione, ma anche un altro tema denominato con un gioco di parole, *Contar sin contar*: sono racchiusi in questo tema quei problemi nei quali si possono trovare trucchi per contare senza contare! È il caso del

[105] Aristotele, *Metafisica*, A, 2, 982b, tr. it. Giovanni Reale 1993, Milano: Rusconi. Frase cara a Gadamer.
[106] *Cuentos con cuentas* è anche il titolo di un libretto di Guzmán del 1984 pubblicato da Labor (Barcellona).

principio dei cassetti (di Dirichlet), del teorema di Ramsey (grafi e colori) o della somma dei primi 100 numeri del piccolo Gauss. Segue il tema denominato «Deduzione logica» perché

> «è bene che gli studenti si esercitino nella deduzione, ma cercando allo stesso tempo di stimolare gli altri aspetti della matematica, l'intuizione spaziale, l'intuizione numerica, l'immaginazione, la fantasia, lo spirito d'avventura».

L'ottavo tema proposto ha un nome che richiama Sherlock Holmes: «Elementare, caro Watson». Vengono riportati qui problemi che possono risolti secondo le regole euristiche sopra riportate e non a caso un esempio è tratto dal classico *Mathematical discovery* (1962) di Polya. A seguire si trovano giochi sulle simmetrie e sui colori ma anche quesiti (in «Fare un disegno») dove un disegno, un diagramma, una qualche rappresentazione grafica adeguata, aiutano in modo straordinario a chiarire il problema, permettono di vedere meglio. Due temi sono tratti direttamente dai principi di euristica del primo schema: «Iniziare con il facile aiuta a risolvere il difficile» e «Pensa al contrario. Supponi il problema risolto». Particolare attenzione viene rivolta poi al tema dei «solitari matematici» (che, ricordiamo, Caillois escluderebbe dal gioco), di cui si vantano le proprietà «psicoterapeutiche»: il Tangram, il solitario della Bastiglia, il gioco del 15, la Soma, i polimini, il cubo di Rubik, il gioco della vita di Conway. Naturalmente un punto riguarda giochi matematici che prevedono partite tra due giocatori come Tris, Nim, Go, HEX e altri.

In «Analogie nascoste» sono inclusi alcuni esempi di giochi isomorfi, come un gioco di carte equivalente al quadrato magico 3 x 3 o il gioco icosiano (di Hamilton) equivalente alle torri di Hanoï (di Lucas). Nel tema «Fallacie» si ricorda il grande valore pedagogico degli errori (sottolineato da Lietzmann, e prima ancora da Ball 1892, cui Guzmán rinvia). L'ultimo tema si intitola «Idea felice» ed è un'idea particolarmente felice concludere proprio con questo tema, che non è certamente facile da definire, anche questa volta un'esperienza vissuta di folgorazione, di rivelazione:

> Un concepto nada fácil de definir. Para el experto es un método de trabajo lo que para el novicio resulta una feliz idea, una especie de revelación divina que surge como un relámpago en la oscuridad y nos deja ver claro el camino a seguir. [ivi, pp. 37-38]

Qui Guzmán invoca quello che potremmo chiamare una immedesimazione: rivivere idee felici del passato, come vengono narrate in alcune grandi raccolte di matematica ricreativa, come quella che Martin Gardner dedica proprio al "C'è l'ho!", può «aprire nel nostro spirito vie che fanno sorgere scintille simili in circostanze somiglianti».

2.2 Rivisitare i problemi ricreativi per giocarli a scuola: l'esempio del «Four Fours Problem» e del gioco «Rolling CUBES Pytagora»

> Dice Jack a suo fratello Harry:
> – So come mettere quattro 3 in modo tale che facciano esattamente 34; tu lo sai fare?
> La risposta è $33 + 3 \div 3 = 34$.
>
> adattamento, da Dilworth 1810, p. 184

Prima di provare a proporre alcuni lineamenti per un approccio pedagogico attraverso il gioco, che tragga ispirazione dalle riflessioni con cui ci si è confrontati nel primo paragrafo di questo Capitolo 2, ma avvalendosi anche delle conclusioni del Capitolo 1, si esamina in questo paragrafo un esempio di uso in classe di – meglio, di *insegnamento della matematica attraverso di* – un problema ricreativo davvero "per tutti", ossia un rompicapo che si rivolge al pubblico forse più vasto in assoluto, dai bambini delle prime classi della scuola primaria fino agli adulti di ogni età. Esso, infatti, parte dalle "quattro operazioni" dell'aritmetica elementare scolare, le quali si applicano più volte a uno stesso numero a *una sola cifra*, come ad esempio 3 nel caso della domanda in epigrafe, che un tale Jack rivolge al fratello Harry. Il problema consiste quindi nel disporre quattro cifre identiche in modo che, utilizzando le quattro operazioni, si ottenga un'espressione che abbia un certo risultato (eventualmente giustapponendo le cifre per formare numeri da due o più cifre, come il 33 nell'esempio proposto).

Questo esempio serve, in questo paragrafo, per esplorare come il lavoro sistematico ispirato da un problema ricreativo offra una vera e propria palestra di pensiero matematico. In questo caso è al centro l'idea di scomposizione e quindi il concetto di *uguaglianza*, così cruciale nella matematica di ieri e di oggi.

Si tratta di invogliare l'interlocutore, alunno o appassionato che sia, oppure semplicemente qualcuno in cerca di un passatempo, a "montare e smontare" numeri minori di 100 (quindi alla portata di tutti, i numeri a due cifre delle tabelline) usando come collante il *più*, il *meno*, il *per* e il *diviso*, oltre all'eventuale "accostamento" delle cifre che è la procedura basilare della numerazione scritta indo-araba. La definizione di Hermelink di problema ricreativo (si veda §2.1.1) si applica qui in un modo che sembra provocatorio verso la scuola stessa. Alla noia delle operazioni – il linguaggio di tutti i giorni, i giorni di scuola sempre uguali fino alla nausea – si contrappone una ripetizione fuori dalla realtà che crea sconcerto e sorpresa insieme: usare quattro volte la stessa cifra, come nell'esempio la cifra 3; oppure proprio quattro volte la cifra 4, generalizzazione immediata! Allo sconcerto però subentra o si sovrappongono immediatamente sentimenti e moti umani che abbiamo esplorato ampiamente nel precedente §2.1: lo scherzo che provoca divertimento, la voglia competitiva di risolvere (*agon*); e soprattutto, il risolutore viene facilmente catturato in una vertigine di varianti e domande collegate sulla stessa scia.

Il problema da cui prende le mosse questo paragrafo è quello dei quattro "4" o, se si vuole, forzando la grammatica italiana (che non prevede plurali dei numerali cardinali come uno, due, tre, ... sei, ecc) il problema dei quattro "quattri", che traduce il nome in inglese con cui è universalmente noto, the *Four Fours problem*. Questo rompicapo, di cui allo stato attuale delle conoscenze storiche non abbiamo tracce antiche o medievali né in Europa né in altre latitudini, è stato oggetto di una abbondante letteratura, soprattutto a partire dalla sua inclusione nella raccolta di Rouse Ball. Ludus e paidia permettono di spiegare il fascino della domanda e l'accanimento risolutorio, che si manifesta nella letteratura disponibile ma che si riscontra anche con gli allievi oggi (si veda Parte II).

Questo rompicapo ne porta con sé una varietà enorme a esso collegati. Si tratta di un esempio di quanto accade difatti con ogni quesito di matematica ricreativa, qualcosa che quindi l'accomuna alla ricerca nella matematica "dotta e accademica", nella quale ogni questione ne porta con sé molte altre. Infatti, questa circostanza è alla radice della valenza pedagogica dei quesiti ricreativi, che si prestano a essere punti di partenza di una esplorazione sistematica di un intero "microuniverso", seguendo l'approccio proposto per la risoluzione dei problemi da Alexander Karp (si veda sopra, §2.1.2). Si esamina il lavoro con carta e penna, il lavoro con oggetti da gioco (dadi speciali, attività sostenuta dai dadi del gioco *Rolling CUBES Pytagora* di CreativaMente) e il lavoro con uno strumento informatico, un programma scritto in linguaggio Python. Prima di iniziare, si presenta brevemente la storia di questo rompicapo, con le fonti secondarie a disposizione.

2.2.1 Piccola storia del Problema dei quattro "quattri"

> W. W. Rouse Ball. Four fours. Some arithmetical puzzles. MG 6 (No. 98) (May 1912) 289-290. "An arithmetical amusement, said to have been first propounded in 1881, ..." [This would seem to refer to «Knowledge», above.] Studies various forms of the problem. Says it occurs in his MRE -- see above. MRE 6th ed., 1914, p. 14, cites this article.
>
> [Singmaster 2004, p. 72]

Ecco la storia singolare dell'introduzione del problema dei quattro "quattri" (da chi e dove è stato proposto per la prima volta) e della sua fortuna: soluzioni, contributi e pubblicazione in raccolte più o meno celebri, a stampa o digitali. Come visto nel §1.1.2, in questo caso conviene fare affidamento alla raccolta online *Sources in recreational mathematics – An annotated bibliography* di David Singmaster, che dedica a questo Problema la sezione *7.I. Four fours etc*, con una sottosezione *7.I.1. Largest number using four ones, etc* della terza parte della sua raccolta (*Arithmetic & Number-theoretic recreations*, 269 pagine) per un totale di poco più di sette pagine (Singmaster 2004, pp. 70-78, si veda Appendice A.1).

Singmaster registra in primo luogo due problemi contenuti nella aritmetica di Thomas Dilworth (1780) *The Schoolmaster's Assistant, Being a Compendium of Arithmetic both Practical and Theoretical* (prima edizione del 1743), in una sezione intitolata "A short Collection of pleasant and diverting Questions":

Problem 5: "Let 12 be set down in four Figures and let each Figure be the same."

> Problem 9. "Says Jack to his brother Harry, I can place four threes in such manner that they shall just make 34; can you do so too?" [Dilworth 1810, p. 184]

Dilworth, un chierico anglicano, fu prolifico autore di libri di testo, fra cui il suo compendio di aritmetica scolare proposto come il migliore "assistente del maestro", redatto in forma di dialogo come il capostipite delle aritmetiche in inglese, *The Grounde of Artes* di Robert Recorde. John Denniss ricorda che si tratta di uno dei libri semplici, brevi e a buon mercato che sostituirono il classico di Recorde ed ebbero un gran successo editoriale: il libro di Dilworth, caratterizzato dalla presenza di numerosi esercizi a differenza di altre opere, fra cui quella dello stesso Recorde, ebbe più di 49 edizioni in Gran Bretagna e molte più ancora negli Stati Uniti[107]). Dilworth ha inventato questo quesito, oppure ha raccolto – come aveva fatto Bachet per primo e tanti dopo di lui – un rompicapo che circolava oralmente in Inghilterra? Comunque, il capostipite di questo ambito di rompicapi ricreativi appare in un contesto didattico e il quesito è formulato sotto forma di un dialogo.

Di seguito Singmaster elenca 17 raccolte firmate o anonime che includono problemi analoghi, sempre con numeri specifici (quali 12 e 34 nei problemi di Dilworth; arriva poi a quella che egli ritiene – sulla scia di Rouse Ball – la prima comparsa di un problema di carattere generale, nel 1881, che è inoltre riferito alla cifra 4 con la quale questo problema si è affermato nella letteratura di matematica ricreativa:

> Express an integer using four 4s, etc. Cupidus Scientiae, 1881, seems to be the first to ask for solutions to a lot of the integers, rather than a few specific examples. The next examples of the general form are Cunningham & Wiggins (1905), Pearson (1907), Ball (1911), Ball (1912). Dawson (1916) is the first to ask for four R's, where R is indeterminate, e.g. 3 = (R + R + R)/R. I have included examples where a set of numbers and operations is given and one has to obtain a given value. This overlaps a bit with 7.I.1, where the object is to find the maximum possible value, and with 7.AC.3-6, where one uses all nine or ten of the digits and I have included problems of inserting signs into 12 ... 9 to make 100 in 7.AC.3. [Singmaster 2004, p. 70]

Si tratta di una domanda comparsa sotto il titolo "Four fours: singular numerical relation" in un numero del 1881 della rivista «Knowledge: an Illustrated Magazine of Scienze, Plainly worded- Exactly described» (nell'anno della sua fondazione), proposta da un anonimo e che ebbe poi varie risposte nel corso dell'anno seguente. «Knowledge» fu fondata e diretta da Richard A. Proctor (1837-1888), un astronomo inglese che è uno dei primi celebri scrittori di divulgazione scientifica[108],

> to counter what he saw as the increasingly inaccessibility of scientific research. Proctor had made a career out of science popularization that refused to condescend to its audience and «Knowledge» was intended to participate in the debate over access to scientific knowledge. As a 2d weekly, with advertisements, «Knowledge» was able to undercut the more established 4d «Nature». [...] Although the two journals appeared similar, each represented a different attitude to science. Whereas «Nature»

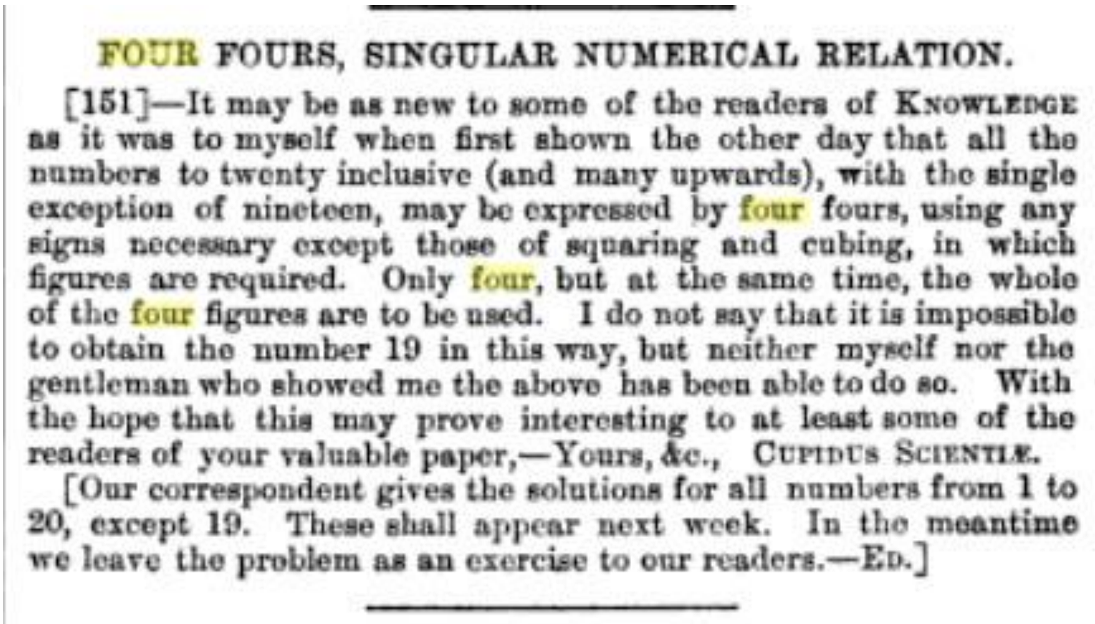
---

107 Denniss 2009, p. 457. Molto più successo ancora, ricorda Denniss, ebbe un libro pubblicato pochi anni dopo da Francis Walkingame, *The tutor's assistant* (1751), che ebbe 246 edizioni nell'arco di più di centotrent'anni: «The reason for the book's popularity is not immediately obvious. Its explanations are brief toe the point of inadequacy and, unlike Recorde's, are non help to anyone working alone. [...] One attraction of Walkingame'sbook must have been that it was compact and cheap [...] It is thought that Wilkingame modelled his book on Dilworth's, recasting his dialogue into a more straightforward didatic presentation». (ivi, p. 458)

108 La rivista sopravvisse al fondatore fino al 1918. Si veda anche https://www.lindahall.org/richard-proctor/

was supported by the scientific establishment, «Knowledge»'s more vibrant feature was its extensive correspondence columns. [Brake, Demoor 2009, *ad vocem*, pp. 335-336]

Si tratta di un quesito ricreativo che Singmaster attribuisce allo stesso Proctor, ideale per coinvolgere i lettori in una visione della scienza che si spingeva oltre la scienza "seria e accreditata" per così dire, in un tono leggero come riportato nella Figura 2.17.



FOUR FOURS, SINGULAR NUMERICAL RELATION.

[151]—It may be as new to some of the readers of KNOWLEDGE as it was to myself when first shown the other day that all the numbers to twenty inclusive (and many upwards), with the single exception of nineteen, may be expressed by four fours, using any signs necessary except those of squaring and cubing, in which figures are required. Only four, but at the same time, the whole of the four figures are to be used. I do not say that it is impossible to obtain the number 19 in this way, but neither myself nor the gentleman who showed me the above has been able to do so. With the hope that this may prove interesting to at least some of the readers of your valuable paper,—Yours, &c., CUPIDUS SCIENTIÆ.

[Our correspondent gives the solutions for all numbers from 1 to 20, except 19. These shall appear next week. In the meantime we leave the problem as an exercise to our readers.—ED.]

Figura 2.17 - La nota comparsa sul numero della rivista *Knowledge: an Illustrated Magazine of Scienze* del 1881, a firma di CUPIDUS SCIENTIAE, probabilmente lo pseudonimo di Richard A. Proctor

Può risultare nuovo ad alcuni lettori [...] come è risultato a me quando per la prima volta, l'altro giorno, mi è stato mostrato che tutti i numeri fino a 20 incluso (e anche molti altri), con la sola eccezione di 19, si possono esprimere con quattro 4, usando qualsiasi segno necessario tranne le elevazioni al quadrato e al cubo [Estratto tradotto dalla nota in Figura 2.17, traduzione mia]

Nella nota non si escludeva la possibilità che qualcun altro potesse portare una soluzione al problema anche per il numero 19 e, infatti, arrivarono soluzioni dai lettori, che però non rispettavano in pieno le richieste. Una soluzione faceva uso del simbolo del fattoriale

$$19 = 4! - 4 - 4 \div 4,$$

un'altra della notazione decimale senza lo zero, ovvero del numero 0.4 scritto come $.4$:

$$19 = (4 + 4 - .4) \div .4$$

Nell'edizione del 1911 di *Mathematical Recreations and Essays*, W.W. Rouse Ball parla del rompicapo dei quattro "4", sostenendo che, ampliando le operazioni possibili al fattoriale e alle radici quadrate, e utilizzando anche i numeri decimali, è possibile arrivare fino a 170. Solo un anno dopo, Ball pubblica un articolo sulla «Mathematical Gazette» intitolato *Four fours. Some Arithmetical Puzzles*, dove parla chiaramente di "An arithmetical amusement, said to have been first propounded in 1881" (Ball 1912). Qui mostra di aver lavorato sodo sul problema e dichiara di aver avuto l'aiuto dell'amico Oscar

Eckenstein (1859-1921): assumendo come lecite le giustapposizioni delle cifre (ad esempio 44), l'utilizzo di radici quadrate, decimali, potenze intere, parentesi, fattoriali e addirittura subfattoriali arrivano a costruire fino al numero 873[109]. Lo scrittore e divulgatore matematico britannico Alex Bellos (n. 1969) in una sua raccolta di giochi e problemi (Bellos 2011) afferma che nientemeno che il fisico matematico Paul Dirac (1902-1984) si interessò e risolse il problema dei quattro "quattri" per tutti i numeri fino all'infinito:

> La soluzione di Dirac, in realtà, era per il problema dei «quattro 2», che infuriava a Cambridge all'epoca, ma la sua soluzione funziona anche per i quattro quattro. Se sono ammessi i logaritmi, qualsiasi numero *n* si può esprimere come:
>
> $$log_{\frac{\sqrt{4}}{4}}\left(log_4\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{4}}}\right)$$ [110]
>
> dove *n* è il numero di segni di radice quadrata che compaiono nella formula. [Bellos 2011, p. 134]

Ci sono stati numerosi altri tentativi di generalizzazione della risoluzione del problema con tutti i numeri possibili, su cui non ci si sofferma in questa sede[111].

2.2.2 L'esplorazione didattica del Problema dei quattro "4": il numero bersaglio

Si vuole rivolgere l'attenzione ora all'esplorazione di questo rompicapo anche in vista della sua applicazione didattica[112]. Come ogni quesito di matematica ricreativa, esso apre e porta con sé una varietà enorme di altri rompicapo collegati. È quanto accade anche nella ricerca matematica, nella matematica "dotta e accademica", nella quale ogni questione ne porta con sé molte altre.

Di seguito si propone un possibile percorso di esplorazione di domande e nuovi rompicapo che possono nascere a partire dai quattro "quattro" variando man mano le condizioni, come mostrato nell'esempio delle possibili varianti del «Nasty order game» di Kirkby (nella seconda parte del §2.1.5).

Si comincia lavorando con una categoria di quesiti ricreativi dal nome emblematico "il numero bersaglio", in cui la richiesta è quella di ottenere un certo numero (il bersaglio, come nel caso del *Goal* del

---

109 Nell'edizione del 1914 di *Mathematical Recreations and Essays*, Ball arriva fino al numero 877 e menziona anche i numeri "limite" per problemi analoghi come i quattro "9" e i quattro "3". Nelle edizioni successive aumenterà la casistica di problemi analoghi (quattro "1", quattro "2", e così via), ma neanche nelle edizioni riviste da Coxeter troviamo ulteriori passi in avanti, sopra alla soglia dell'877. Coxeter, curatore dell'ultima edizione di Ball, pubblicò una breve nota sul lavoro di Ball sul problema dei tre quattro (Coxeter 1952).

110 La dimostrazione è piuttosto semplice per chi ha dimestichezza con logaritmi ed esponenziali e può essere un ottimo esercizio di ingegno per studenti delle scuole superiori. È sufficiente partire dalle due uguaglianze $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \log_4 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ e $n = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e sostituire sfruttando le proprietà dei logaritmi. Naturalmente non potendo usare cifre diverse da 4, la base $\frac{1}{2}$ del logaritmo verrà scritta come $\frac{\sqrt{4}}{4}$.

111 Si vedano i post sui blog dei seguenti autori: David A. Wheeler (n. 1965) https://dwheeler.com/fourfours/; Paul Bourke http://paulbourke.net/fun/4444/; e Cossaboom 2020 (che riprende l'esclamazione del film *Toy story* (John Lasseter, 1995): «To infinity and beyond!»).

112 Tutti gli esempi riportati in questo paragrafo sono stati progettati per il *Con-corso nazionale Matematica per tutti* (si veda Parte II, §3.3.1 e §3.4.2) e sono inclusi nel *Materiale di ARITMETICA* ad uso dei docenti partecipanti.

gioco *Equations* visto nel §2.1.5) a partire da alcune cifre date e utilizzando solamente le quattro operazioni aritmetiche. A differenza delle varie modifiche nelle condizioni iniziali sopra riportate da Ball e altri cultori di matematica ricreativa

- non si concede la possibilità di utilizzare alcun tipo di operazione come elevamento a potenza, estrazione di radice, non si possono usare numeri decimali, fattoriali e parentesi
- si aggiunge la limitazione di non poter usare la giustapposizione di cifre costruendo numeri di due o più cifre (ad es: con due 4 non si può scrivere 44).

In realtà, si comprende bene il motivo di tale scelta: si tratta di partire dal problema nella sua versione più semplice, più "elementare" (le cifre a disposizione sono considerate numeri – senza giustapposizione – e si possono usare solo le quattro operazioni aritmetiche) per arrivare a problemi "superiori", più complessi con un numero di cifre da utilizzare maggiore e con la possibilità di utilizzare la giustapposizione delle cifre. Si vuole rimanere in un contesto di matematiche elementari mantenendo il problema alla portata di tutti e senza aggiungere troppe variabili come fattoriali, numeri non interi, potenze, radici o parentesi. Su queste ultime si tornerà più avanti in quanto la possibilità di utilizzare le parentesi è una complicazione in termini di variabili in gioco, ma è anche una grande semplificazione al fine di trovare soluzioni al problema dato.

Inoltre, non ci si avventura nelle vertigini dell'infinito, ma ci si mantiene nel calcolabile, sia per l'esplorazione delle possibilità di trasformarlo in un gioco matematico, sia per l'introduzione della programmazione al computer.

È evidente, dunque, che la difficoltà di questa tipologia di quesiti cresce all'aumentare del numero di cifre da utilizzare. Si parte con quattro cifre (naturalmente si potrebbe lavorare anche solo con tre cifre, ma quella è un'altra storia, il "gioco dei tre numeri"[113]) e si arriva fino all'utilizzo di sei cifre con un numero bersaglio che può essere un numero di una o due cifre.

Quattro cifre anche diverse (Four Digits Problem[114])

Il primo passaggio naturale è quello di ampliare il ventaglio di possibilità a cifre anche diverse tra loro. Si propone un esempio in cui si concede anche l'utilizzo delle parentesi che, naturalmente, rendono più semplice il raggiungimento del numero bersaglio, offrendo un maggior numero di combinazioni. Ove possibile si cerca una soluzione senza parentesi rimanendo alle condizioni del problema originale. In questo caso:

---

[113] Si tratta qui spesso di 3 numeri e non di 3 cifre in quanto è prevista la presenza anche di numeri a due cifre. Si veda i post di Gianfranco Bo, nel sito *Base cinque*: http://utenti.quipo.it/base5/scuola/gioco3numeri.htm

[114] Altro problema con una ricca storia! Si rimanda nuovamente a Singmaster 2004: sezione *7.I. Four fours etc*, con una sottosezione *7.I.1. Largest number using four ones, etc*

ESEMPIO 1. Utilizzando i numeri dati, i segni delle quattro operazioni ed eventualmente le parentesi, si deve ottenere il numero bersaglio. L'ordine assegnato è un suggerimento e una garanzia di successo: potete comunque trovare il numero bersaglio usando i numeri in ordine diverso, ma in tal caso non vi garantiamo che sia possibile!

Ottenete 44 usando tre 6 e un 2.

Una soluzione possibile è: $44 = 6 \times 6 + 6 + 2$

Un aspetto matematico da evidenziare è il fatto che sotto queste condizioni – come nel problema dei quattro quattro – il numero di operazioni utilizzabili è obbligatoriamente tre, ovvero una in meno delle cifre/numeri a disposizione.

Un numero di cifre maggiore di 4[115]

È naturale domandarsi cosa accada all'aumentare delle cifre, anche se naturalmente non si può esagerare perché altrimenti il problema diventa particolarmente complesso in quanto aumenta insieme al numero delle cifre anche il numero di operazioni utilizzabili.
Con le stesse condizioni di prima si potrebbe avere ad esempio la richiesta seguente:

ESEMPIO 2. Ottenete 4 usando i numeri 3, 5, 2, 1, 0

E una soluzione possibile è: $4 = 5 - 3 + 2 \times 1 + 0$

Un'altra, con l'utilizzo della parentesi: $4 = (3 + 5) \div 2 \times 1 - 0$

Giustapposizione delle cifre

Si potrebbe ammettere la giustapposizione delle cifre formando numeri di due o più cifre (ad es: 3 e 4 che formano il 34).

Esempio 3. Ottenete 271 usando sei 5.

Una soluzione che usa la giustapposizione è: $271 = 55 \times 5 + 5 \div 5 - 5$

Usando la giustapposizione delle cifre naturalmente decade la relazione tra il numero di cifre e il numero di operazioni utilizzabili: infatti, in questo caso sono state usate solo quattro operazioni anziché le cinque possibili e previste secondo le condizioni precedenti.

Numero fisso di operazioni

Risulta a questo punto naturale alzare il tiro: se, ammettendo la giustapposizione delle cifre, indicassimo un numero fisso di operazioni da utilizzare? In questo caso sarebbe determinato univocamente il numero di giustapposizioni.

ESEMPIO 4. Ad esempio, si fissa a due il numero di operazioni da utilizzare e si chiede di ottenere 6 usando le cifre 1, 3, 4, 5, 5. In questo caso le giustapposizioni sono obbligatoriamente due, in quanto per usare solo due operazioni devo avere solo tre numeri. Una possibile soluzione è dunque:

$$6 = 45 \div 15 + 3$$

[115] Di nuovo escludiamo per scelta il caso di un numero di cifre inferiore a quattro.

Si potrebbe immaginare di usare due giustapposizioni anche per ottenere un numero di tre cifre (ad es: 135), ma il numero bersaglio in questo caso risulta troppo piccolo per essere raggiunto.

Tipo di operazioni fissato

E se oltre al numero si fissasse anche il tipo di operazioni da utilizzare (ad esempio, le quattro operazioni da utilizzare sono $+,\ +,\ -,\ \times$)? A questo punto occorre fermarsi un istante prima di presentare un esempio perché, man mano che le cose si complicano, diventa importante capire quale strategia è possibile seguire per trovare una soluzione. Naturalmente si tratta di procedere per tentativi ragionati, ma – come direbbe Su – ci vuole molta *confidence in struggle*. Si può semplificare il problema fissando l'ordine in cui devono comparire le cifre da utilizzare.

ESEMPIO 5. Ottenete 1 usando in quest'ordine le cifre 3, 7, 2, 4, 1, 0, 2 e le operazioni $+, -, \times, \div$.

Si capisce subito che devono esserci due giustapposizioni, probabilmente due numeri di due cifre. A questo punto la parte difficile diventa capire quali siano i numeri di due cifre. Un'idea potrebbe essere quella di ragionare a partire dalla collocazione del segno di divisione e procediamo da sinistra verso destra:

i primi due posti non darebbero risultati interi $(3 \div 7, 7 \div 2, 37 \div 2)$

al terzo posto potrebbe avere senso solo se preceduto dal numero 72 $(72 \div 4)$

al quarto posto potrebbe avere senso in due modi $(4 \div 1, 24 \div 1)$

il quinto posto lo escludiamo perché non si può dividere per zero

al sesto e ultimo posto potrebbe avere senso in due modi $(0 \div 2, 10 \div 2)$

Si è escluso il caso di un numero di tre cifre perché si ritiene che possa essere troppo grande per poi dare come risultato 1 combinato con gli altri.

A questo punto una strategia possibile è quella di concentrarsi sulle opzioni dove il segno di divisione è preceduto da numeri di due cifre, ovvero nell'ordine $72 \div 4, 24 \div 1, 10 \div 2$

Ricordando che ci deve essere un altro numero di due cifre per poter utilizzare esattamente quattro segni di operazione, si calcola il risultato di $72 \div 4$ ottenendo 18. Ora si devono usare gli altri segni di operazione e le altre cifre per ottenere 1, ma allora si tratta semplicemente di sottrarre 17! Non potendo però procedere inserendo direttamente -17, si procede per tentativi sul segno di operazione da inserire tra 3 e 72, che può essere solamente $+$ o $-$ perché con il $\times$ si otterrebbe un numero troppo grande. Inserendo $+$ si ottiene 21 e vengono da sé gli altri due segni e il numero di due cifre mancante: $3 + 72 \div 4 - 10 \times 2 = 1$

Naturalmente, a questo punto si potrebbe provare a partire da una delle altre due opzioni precedentemente menzionate $(24 \div 1, 10 \div 2)$.

Non si può escludere, in questo esempio come in altri, che esistano altre soluzioni e soprattutto altre strategie di tentativi ragionati che permettano di arrivare a questa o ad altre soluzioni, ma per questo lavoro è sufficiente averne trovata una e soprattutto comprendere che conoscere l'ordine delle cifre da utilizzare nell'uguaglianza è un grande vantaggio.

Senza fissare l'ordine delle cifre da utilizzare c'è senza dubbio una più ampia gamma di soluzioni ma scegliere la collocazione delle cifre è decisamente più impegnativo e a volte può risultare più legato al caso che a una strategia particolarmente ingegnosa, ma si tornerà su questo più avanti (nel §2.2.4, dedicato all'attività sostenuta dai dadi del gioco *Rolling CUBES Pytagora*).

2.2.3 Costruire un'uguaglianza "qualsiasi": un simulatore con il linguaggio di programmazione Python

Si esaminano ora altre due modalità di gioco. Si tratta di proporre sfide-quesiti senza numero bersaglio o con un numero bersaglio scelto con lanci di dadi (inserendo l'*alea*):

(a) il numero bersaglio di una o due cifre viene scelto in maniera casuale all'inizio e poi "solita" richiesta di ottenere il numero bersaglio date *n* cifre e *m* operazioni

(b) nessun numero bersaglio, ma solamente *n* cifre, *m* operazioni, il segno "=" e la richiesta di costruire un'uguaglianza "qualsiasi" utilizzando tutte le cifre e le operazioni a disposizione

Costruire le sfide non è particolarmente difficile: si tratta di scegliere cifre e operazioni in modo casuale, si possono tirare dei dadi, estrarre a sorte da fogli di carta con tutte le cifre e le operazioni. Tuttavia, verificare se esiste o meno una soluzione al problema generato, prima di proporlo agli alunni, è altra cosa: la questione si complica parecchio! Per superare queste difficoltà si è pensato di realizzare un programma con il linguaggio Python[116] che permettesse di verificare l'esistenza o meno di soluzioni con le cifre date e con il numero bersaglio scelto in una sfida del tipo (a). Interviene quindi un approccio molto diverso da quello dell'"idea felice": l'inserimento del computer però permette di esplorare altri risvolti di un problema ricreativo, leggero e oltretutto formulato in modo estremamente elementare.

Un programma per le sfide di tipo (a)[117]

È stato quindi realizzato per prima cosa un programma che permutasse tutte le stringhe di 6 cifre date insieme a 4 segni di operazione scelti casualmente tra i quattro possibili con eventuali ripetizioni. In input o random veniva fornito il numero di bersaglio di 2 cifre da ottenere. Il programma valuta caso per caso se la stringa fosse sensata dal punto di vista matematico e se il valore numerico corrispondesse al numero bersaglio. Nel caso di presenza della cifra 0 sono state escluse le possibilità di:

- eseguire operazioni banali, ovvero non si può moltiplicare per zero e non si può dividere lo zero;
- giustapporre la cifra zero a sinistra di un'altra cifra, ovvero non si può scrivere `04` oppure `007`.

Naturalmente la divisione per zero viene automaticamente scartata nella validazione dal punto di vista matematico e dunque non c'è bisogno di aggiungere altre condizioni. Si è scelto di fissare a 4 le operazioni da usare con le 6 cifre date per portare all'utilizzo di un numero di due cifre, ma naturalmente

---

116 La realizzazione dei programmi con Python è stata possibile grazie alla supervisione del prof. Marco Liverani, conosciuto durante il primo anno di Dottorato attraverso i corsi di Ottimizzazione combinatoria e Calcolabilità e teoria degli automi. La fase di progettazione ha visto la partecipazione attiva del collega insegnante Giovanni Casa.

117 In Appendice A.2.a il codice del programma Bersaglio.py

nel lavoro e nel programma si può fissare anche a 5 il numero di operazioni, obbligando a utilizzare tutte le cifre come numeri. Per testare il programma sono state scelte delle combinazioni di cifre e operazioni che avessero una soluzione certa.

ESEMPIO 6a. Un quesito testato "senza zeri"

Ottenete 10 utilizzando le cifre 1, 2, 2, 4, 6, 9 e le operazioni $+, -, \times, \div$.

La soluzione garantita prima di avviare la simulazione con il programma era:

$$2 \times 6 + 14 \div 2 - 9 = 10$$

Il programma ha individuato questa soluzione (e tutte le sue permutazioni scambiando addendi, fattori, ecc...) insieme ad altre due possibili (sempre con tutte le loro permutazioni):

$$9 \times 6 \div 2 - 21 + 4 = 10$$

$$6 \times 12 \div 9 + 4 - 2 = 10$$

Nel ragionare con carta e penna probabilmente le soluzioni più accessibili risultano la prima (quella da cui si è partiti) e la seconda poiché in entrambe compare una divisione di un numero pari per 2, ovvero rispettivamente $14 \div 2$ e $6 \div 2$, mentre nella terza c'è una divisione "fastidiosa", ovvero $6 \times 12 \div 9$ che dà un risultato intero poiché il 12 è moltiplicato per 6 e dunque si può procedere a fare prima la moltiplicazione ottenendo 72 e poi la divisione per 9 ottenendo 8. In ogni caso una strategia per affrontare un problema simile può essere proprio quella di partire dalla collocazione del segno d'operazione più difficile e via via provare ad inserire tutti gli altri, procedendo per tentativi ragionati. Certamente nella prima soluzione dopo aver creato $14 \div 2$ che dà come risultato 7, si cercherà di ottenere un "$+ 3$" dal resto e allora la moltiplicazione non può che essere 2×6, perché altrimenti si otterrebbe un numero troppo grande, e di conseguenza l'ultimo tassello è -9: come per magia è comparso il $+3$ cercato da un $+ 2 \times 6 - 9$.

Testare il programma considerando nelle cifre disponibili anche "zeri" significa solamente verificare che siano rispettate le condizioni inserite e che dunque nei risultati non ci siano operazioni banali come $0 \times \mathrm{n}$ o $0 \div \mathrm{n}$ e non compaiano numeri con "zeri a sinistra"!

ESEMPIO 6b. Un quesito testato "con zeri"

Ottenete 36 utilizzando le cifre 0, 0, 1, 2, 3, 4 e le operazioni $+, +, +, \times$.

La soluzione garantita prima di avviare la simulazione con il programma era:

$$30 \times 1 + 4 + 2 + 0 = 10$$

Anche qui il programma ha individuato questa soluzione (e tutte le sue permutazioni scambiando addendi, fattori, ecc...).

Le altre possibili considerano due addendi "0" erano, ad esempio:

$$0 + 0 + 1 \times 2 + 34 = 36$$

oppure anziché 30×1 considerano 3×10.

Naturalmente poi c'è la moltiplicazione per 1 che si può spostare a piacimento sui numeri diversi da zero e le unità 2 e 4 che possono star "da sole" o all'interno rispettivamente del 32 o del 34.

Una volta superati i test[118], si è potuto utilizzare il programma anche per verificare la presenza di soluzioni - o di altre soluzioni qualora se ne fosse trovata qualcuna - di un problema qualsiasi.

---

[118] Superati i test anche delle combinazioni impossibili come ad esempio «Ottenete 85 utilizzando le cifre 0, 0, 1, 1, 2, 2 e le operazioni +, +, +, ×», si è potuto utilizzare il programma anche per verificare la presenza di soluzioni - o di altre soluzioni qualora se ne fosse trovata qualcuna - di un problema qualsiasi.

Un programma per le sfide di tipo (b)[119]

Successivamente è stato realizzato un programma che fosse in grado di simulare anche il problema di tipo (b), dove la richiesta è quella di costruire un'uguaglianza "qualsiasi" utilizzando tutte le cifre e le operazioni a disposizione, collocando dunque il segno "=" a proprio piacimento in quanto non è dato un numero bersaglio fissato e non è neanche detto che uno dei due termini dell'uguaglianza debba essere un numero e non un'espressione aritmetica. Nel nuovo programma viene dunque permutato anche il segno "=" nella stringa di cifre e di operazioni e naturalmente vengono rifiutate le collocazioni "impossibili" del segno "=", ovvero se si trova prima o dopo un segno di operazione oppure come primo o ultimo termine della stringa. Anche qui il programma viene testato con una combinazione di cifre e operazione che ha una soluzione certa: il test viene fatto con 6 cifre e 4 operazioni, perché il tempo di esecuzione è già piuttosto lungo (circa 20') e all'aumentare delle cifre ovviamente aumenta anche il tempo di esecuzione. Verrà poi testato anche con un numero di cifre superiore, in particolare con 8 cifre e 4 operazioni per motivi che si comprenderanno meglio nel §2.2.4.

ESEMPIO 7. Un esempio con 6 cifre e 4 operazioni:

Costruite un'uguaglianza utilizzando le cifre 1, 2, 2, 3, 7, 9 e le operazioni $+, -, \times, \times$.

La soluzione garantita prima di avviare la simulazione con il programma era:

$$7 \times 2 + 3 = 9 \times 2 - 1$$

Come si può vedere, è scomparso il numero bersaglio ma ci sono due espressioni equivalenti che danno entrambe 17 come risultato. In questo caso le prime operazioni da definire sono le due moltiplicazioni: poiché ci sono da collocare 6 cifre, 4 operazioni e il segno "=" sicuramente si avranno solamente numeri di 1 cifra e dunque occorre pescare tra le tabelline! Si sceglie di fissare 7×2 e di vedere quali possano essere gli altri elementi per costruire l'uguaglianza. Poiché occorre collocare il numero 9 ci sono due strade possibili:

(a) si moltiplica il 9 per un numero, presumibilmente per 2

(b) il 9 non viene moltiplicato per nessun numero

Seguendo la strada (a) si ottiene l'uguaglianza da cui si era partiti, dove si bilanciano i prodotti 7×2 e 9×2 rispettivamente aggiungendo 3 e sottraendo 1.

Seguendo invece la strada (b) si deve capire quale sia l'altra moltiplicazione da collocare:

una scelta semplice è inserire una moltiplicazione per 1, senza dunque modificare le quantità a disposizione, ovvero 7×2 e 9. Così si può sottrarre 3 alla prima e aggiungere 2 alla seconda e ottenere $7 \times 2 \times 1 - 3 = 9 + 2$, dove la moltiplicazione per 1 può essere collocata a piacimento.

un'altra opzione è invece quella di inserire la moltiplicazione 3×2 e usarla sottraendola a 7×2 oppure addizionandola a 9. Così si può ottenere, ad es, $7 \times 2 - 3 \times 2 + 1 = 9$, che ricorda la forma a "numero bersaglio" dei giochi precedenti.

La scelta iniziale era quella di fissare la prima moltiplicazione come 7×2, ma naturalmente si può immaginare anche un'altra strada: se si sceglie di fissare, infatti, la moltiplicazione 7×3, che dà come risultato 21, risulta abbastanza semplicemente eguagliarla con la moltiplicazione 9×2, che dà come risultato 18 e poi bilanciare con il resto delle cifre e delle operazioni disponibili ottenendo:

[119] In Appendice A.2.b il codice del programma Rolling.py

$7 \times 3 - 1 = 9 \times 2 + 2.$

Tutte le soluzioni proposte sono state calcolate dal programma con Python, considerando anche tutte le varie permutazioni scambiando addendi, fattori e posizioni a destra e a sinistra del segno "=".

A questo punto risulta naturale domandarsi: è possibile offrire a uno studente una modalità di lavoro più agevole, più stimolante, più coinvolgente, insomma più "giocosa", affinché possa procedere per tentativi ragionati nella risoluzione di problemi simili senza la fatica di dover scrivere ogni volta le varie opzioni possibili, e soprattutto senza mollare al primo fallimento? La risposta è stata trovata nel gioco *Rolling CUBES Pytagora*[120], a cui è dedicato il prossimo sottoparagrafo.

2.2.4 Rolling CUBES Pytagora

Rolling CUBES Pytagora è un gioco in scatola o gioco da tavolo (senza tabellone) che Emanuele Pessi ha ideato e brevettato nel 2017 (Figura 2.18).

Lo scopo del gioco è costruire uguaglianze aritmetiche corrette, dopo un lancio di dadi-cifra e dadi-operazione, utilizzando tutti i dadi o anche solo alcuni, eventualmente giustapponendo le cifre per creare numeri a due o più cifre: ad esempio $5 + 7 - 12 = 0$, oppure $6 \times 3 - 5 = 26 \div 2$. Le regole e le varie modalità di gioco saranno presentate nel §3.3.1.

Ora ci occupiamo dei risvolti didattici di questo materiale aritmetico in scatola attorno al concetto di uguaglianza e ai numeri naturali, oltre che sull'uso delle cifre in collegamento ai vocaboli numerali. Il gioco si colloca nel filone ricreativo dei *Four Fours problem*. Si mostrano alcune possibili modalità di lavoro a scuola con questo gioco, nell'ottica dello sviluppo dell'iniziativa matematica di cui parlava Kordemsky (si veda §2.1.2) e del "fare matematica", nel senso di Guzmán.

[120] Uno dei primi giochi del Con-corso Matematica per tutti di cui si parlerà nella parte II. Di seguito il link al sito ufficiale: https://www.creativamente.eu/prodotto/rolling-cubes-pytagora/

Figura 2.18 - Il gioco *Rolling CUBES Pytagora*: commercializzato dall'azienda CreativaMente. Nella scatola sono presenti, oltre al manuale di istruzioni 13 dadi a sei facce, di cui 8 dadi cifra (4 di colore blu con le cifre pari e 4 di colore verde con le cifre dispari), 4 dadi operazione di colore rosso e 1 dado arancione per il simbolo "="

In questo paragrafo si descrivono alcuni aspetti didattici del gioco, alcuni immediati e altri che hanno avuto bisogno di più tempo per essere scoperti.

Nel seguito, come consueto, nelle uguaglianze aritmetiche si chiama *primo membro* l'espressione o il numero che si trova a sinistra del segno "=", mentre tutto ciò che si trova a destra del segno "=" si chiama *secondo membro.*

Analisi degli aspetti didattici

Questo gioco da tavolo rende possibile "prendere in mano l'aritmetica" e giocare con la bilancia "immaginaria" a due piatti che devono avere lo stesso peso! I dadi si usano prima per scegliere a caso gli elementi dell'uguaglianza (cifre e simboli delle operazioni oltre al simbolo =); in una seconda fase diventano i mattoni fisici che costruiscono l'uguaglianza, per tentativi.

Certamente ci si può immergere nelle sfide di cui abbiamo parlato finora soltanto con carta e penna: si trascrivono su un foglio o sul quaderno i numeri e i segni delle operazioni usciti nel lancio dei dadi e si cerca di rispondere senza usare i dadi. Quando si apre la scatola di *Rolling CUBES Pytagora*, il lavoro con carta e penna può essere un passaggio utile per comprendere la richiesta del gioco.

Confrontiamo ora cosa succede quando gli alunni usano i dadi come mattoni dell'uguaglianza che si va cercando (ad esempio, hanno di fronte due cubetti con la cifra "5", rispetto ad avere annotate sul quaderno due volte lo scarabocchio "5" tra quelle disponibili per comporre un'uguaglianza). Vi sono aspetti di varia natura, inerenti al gioco ma anche all'aspetto fisico, materiale (geometrico anche, vi è un ordine relativo alla posizione dei dadi allineati):

1. il coinvolgimento corporeo (la mano che tocca e sposta sul piano dove si dispongono i dadi-mattoncini) scatena il desiderio di montare e smontare di cui parlano Jousse e Mary Everest Boole (Mazzitelli, Millán Gasca 2021), che è alla base dei «manipulatives» progettati da Dienes
2. subentra la dinamica del giocare con qualcosa, quell'essere giocato dal gioco di cui hanno parlato Gadamer e Buytendijk. Quest'ultimo, non solo parla dell'elemento di sorpresa del lancio del dado, ma anche di un alternarsi di tensione e rilassamento il cui modello paradigmatico è quello della palla
3. con il lavoro sul quaderno gli studenti potrebbero avere maggior difficoltà nel riconoscere che una cifra disponibile può essere utilizzata un determinato numero di volte (nel caso specifico due volte)
4. con il lavoro sul quaderno è meno immediato – e dunque più difficile – vedere come un 38 possa diventare un 83 semplicemente scambiando di posto i dadi cifra che lo compongono, o anche spostare un $+1$ dall'altra parte dell'uguale semplicemente muovendo il dado operazione e il dado cifra corrispondenti e scoprire immediatamente che quando si compie un'azione del genere si diminuisce di 1 uno dei membri dell'uguaglianza e si aumenta di 1 l'altro
5. con i dadi si può così procedere per tentativi ragionati o meno, superando la possibile difficoltà iniziale della capacità nel calcolo che spesso blocca chi si cimenta in un gioco aritmetico come questo.
6. A differenza di quanto accade solo con carta e penna è più frequente la costruzione di uguaglianze errate semplicemente muovendo e spostando i dadi dal primo al secondo membro, vi è quindi una maggior leggerezza che fa parte del percorso e non si deve aver paura di intraprendere delle strade che non si sa dove andranno a finire:
   - un errore può essere cancellato con un semplice movimento sul piano di gioco
   - in ogni uguaglianza errata che si costruisce c'è un nuovo problema da affrontare, una nuova domanda a cui provare a rispondere.
7. il lavoro con la parità e la disparità del primo e del secondo membro dell'uguaglianza, è facilitato dai colori differenti dei dadi con numeri pari (blu) e dispari (verdi).

Questi aspetti favoriscono lo sviluppo dell'iniziativa matematica, come si mostrerà in qualche esempio, prima ancora delle ricadute sulle conoscenze e abilità aritmetiche elementari con i numeri naturali e sull'idea di uguaglianza.

Un risvolto didattico inaspettato e un'avventura di scoperta: numeri naturali pari e dispari

Nelle formazioni con docenti di ogni grado scolastico si è sperimentato quanto non sia assolutamente comune considerare la parità e la disparità come un elemento importante per costruire un'uguaglianza aritmetica a partire dalle condizioni iniziali del gioco.

Si ricordi come si comporta la parità dei numeri con le quattro operazioni.

Nell'addizione o nella sottrazione di due numeri dispari, un numero dispari e uno pari e – ultimo ma anche più ovvio – due numeri pari:

- con due numeri dispari si ottiene un numero pari,
- con un pari e un dispari si ottiene un dispari
- con due pari sempre un numero pari.

La situazione si può generalizzare a più addendi.

Nelle moltiplicazioni e divisioni:

- nella moltiplicazione è sufficiente un fattore pari per dare come risultato un numero pari, mentre nelle divisioni con resto zero è un po' più complesso:
- dividendo e divisore dispari corrispondono sempre a un quoziente dispari;
- dividendo pari e divisore dispari corrispondono sempre a un quoziente pari;
- dividendo e divisore dispari possono corrispondere sia a un quoziente dispari sia a uno pari (occorre fare il calcolo)
- dividendo dispari e divisore pari ovviamente non possono dare risultato intero.

Si consideri ora la situazione mostrata nella Figura 2.19, dove il primo membro dà come risultato 24 e il secondo membro dà come risultato 23. Sono molto vicini, la differenza tra i due membri è solo 1, ma la differenza più importante è che il primo membro corrisponde a un numero pari mentre il secondo membro a un numero dispari.

Figura 2.19 – Una situazione del gioco *Rolling CUBES Pytagora* con il primo membro dà come risultato un numero pari e il secondo che dà come risultato un numero dispari

Per ottenere un'uguaglianza corretta è necessario "rimettere in equilibrio" la parità, ad esempio, rendendo pari il secondo membro scambiando la cifra 1 con la cifra 2 nel 21, come mostrato in Figura 2.20.

Figura 2.20 – L'uguaglianza precedente (Figura 2.19) modificata con il 12 al posto del 21 nel secondo membro

A questo punto arrivare alla soluzione "è un attimo", in quanto la differenza tra i due membri è pari a 8, con il primo membro sempre pari a 24 e il secondo che è diventato 32. Spostando i due dadi $+4$ al primo membro il gioco è fatto come mostrato in Figura 2.21.

Figura 2.21 – L'uguaglianza corretta ottenuta con lo spostamento del $+4$ al primo membro

---

Come usare il gioco in classe: si gioca!

In classe, questo gioco può prestarsi a costruire un percorso di matematica ricreativa, che sfuma la componente competitiva (agon), di alea (dadi) e di ilinx, senza però sopprimerle in alcun modo, poiché esse sono la base del valore ricreativo, spingono l'ingegno e l'impegno. Si tratta tuttavia di allenare gli alunni per metterli in condizioni di competere in condizioni quasi di pari opportunità, affinando l'ingegno mentre ci si pongono anche domande e sorgono riflessioni estranee – tranne eccezioni, ma comunque non centrali e non incoraggiate esplicitamente – all'uso extrascolastico del gioco.

Un primo approccio al gioco potrebbe avvenire lavorando solamente con le operazioni di addizione e sottrazione, ovvero "truccando" il lancio dei dadi operazione in modo da non far uscire le operazioni di moltiplicazione e divisione. Tale scelta è dovuta principalmente a due motivi:

1) semplificare i calcoli e limitare le variabili in gioco (si potrebbe decidere anche di utilizzare solamente l'addizione o la sottrazione)

2) rafforzare l'abilità nel gestire l'equilibrio di una "bilancia aritmetica immaginaria": ciò costituisce un vantaggio quando si tratterà di usare altre operazioni insieme a queste, poiché si collocheranno sempre all'interno dell'equilibrio che "sommare e sottrarre" permettono di mantenere.

Si può anche decidere lavorare in maniera graduale iniziando con "piccole operazioni" e uguaglianze con numeri piccoli, per poi piano piano procedere nell'«esplosione di uguaglianze» (Tavola 2.10).

L'esplosione di uguaglianze

La più semplice ed emblematica delle uguaglianze $2 + 2 = 4$ può essere scritta in forma più "stravagante" (Figura 2.22): l'"esplosione" consiste nel sostituire a un numero l'operazione o l'espressione che lo dà come risultato.

Figura 2.22 – L'uguaglianza $2 + 2 = 4$ scritta solamente in forma più "stravagante"

In questo caso si è partiti da $2 + 2 = 9 - 5$, senza dunque aver mai avuto la possibilità di scrivere 4, poiché non si aveva a disposizione la cifra 4. Il passaggio successivo è stato quello di sostituire a uno dei due addendi uguali del primo membro un'operazione: $6 \div 3$ al posto di 2. Ma anche così avanzavano ancora diverse cifre: la cifra 2 appena sostituita, un'altra cifra 6, una cifra 1 e l'operazione $-$.

Allora è arrivata l'illuminazione (l'idea felice o rivelazione!) che ha dato vita all'uguaglianza in Figura 2.22: al posto di $6 \div 3$ è stato messo $66 \div 2 - 31$.

L'esplosione è dunque consistita nel trasformare un semplice $2 + 2 = 4$, con sole 3 cifre e un'operazione, nell'uguaglianza $66 \div 2 - 31 + 2 = 9 - 5$, utilizzando tutti i dadi a disposizione e dunque altre 5 cifre e 3 operazioni rispetto all'uguaglianza iniziale!

Il gioco spinge a cercare di usare tutti i 13 dadi, comunque adattandosi ai simboli disponibili.

Ad esempio, se si trovano più dadi con la stessa cifra n si può pensare di avere in mano, in una diversa forma, il numero 0 visto come $n - n$.

Tavola 2.10 - Un esempio di «esplosione di uguaglianze»

Si procede costruendo via via uguaglianze sempre più lunghe come nell'esempio seguente.

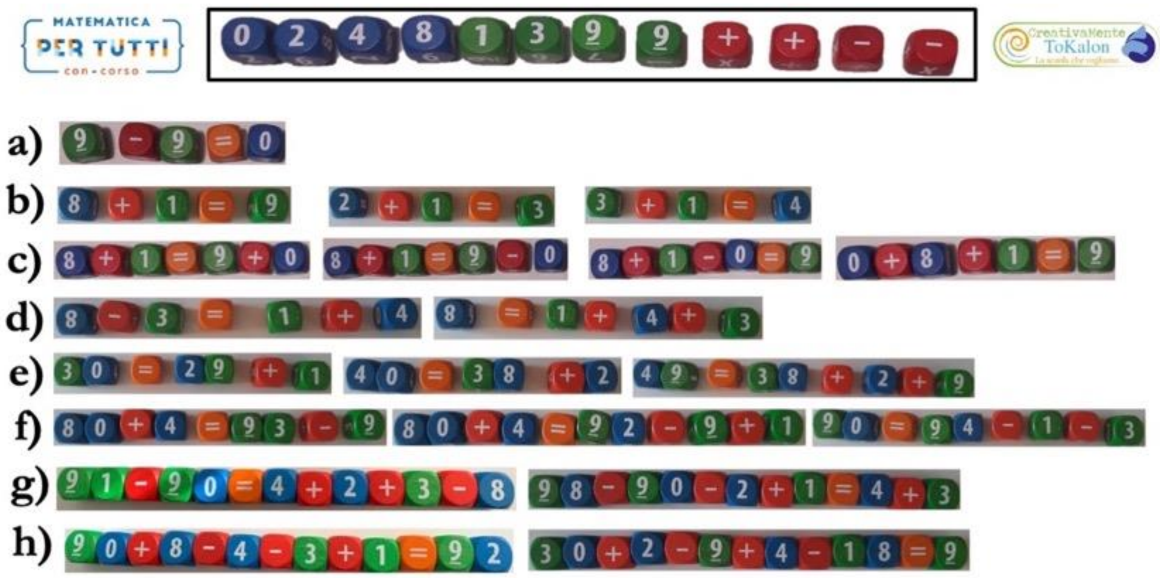


Figura 2.23 – Un lancio di *Rolling CUBES Pytagora* con solo addizioni e sottrazioni: gradualmente si arriva ad utilizzare tutte le cifre e le operazioni a disposizione.

ESEMPIO 8. (Figura 2.23) Nella riga **c)** l'uso dello zero come addendo o sottraendo in modo da non cambiare il risultato e poi pian piano l'esplosione fino ad arrivare alla riga **g)** dove si trovano due uguaglianze con tutti i dadi a disposizione. La "ciliegina sulla torta" è la riga **h)** dove la richiesta è utilizzare tutti i dadi per ottenere un'uguaglianza con un numero di una o due cifre al secondo membro, ovvero con un numero bersaglio non assegnato. La prima soluzione è probabilmente più semplice da costruire in quanto si basa su due numeri con la stessa decina, 90 e *92,* mentre è meno immediata la seconda soluzione con al secondo membro il numero 9. In generale, con coppie di cifre uguali si possono costruire semplici sottrazioni e addizioni "senza riporto" giustapponendo la decina comune: ad esempio, avendo a disposizione due volte la cifra 9, l'operazione $5-4$ può diventare $95-94$. E naturalmente se le cifre ripetute fossero quattro "4" (per rimanere in tema con il paragrafo precedente!), si potrebbe trasformare una semplice sottrazione come $5-1$ in $445-441$.

Prima di inserire le altre operazioni si possono creare/scoprire altri problemi. Un esempio è costituito dai problemi in cui viene richiesto di realizzare un'uguaglianza corretta a partire da una sbagliata data: questo può tradursi in una strategia per ottenere un'uguaglianza con tutti i dadi a disposizione (se ne porta un esempio in Appendice A.3), ma si può anche rendere più specifica la richiesta, indicando quali sono i dadi che si possono spostare e quali no.

ESEMPIO 9.

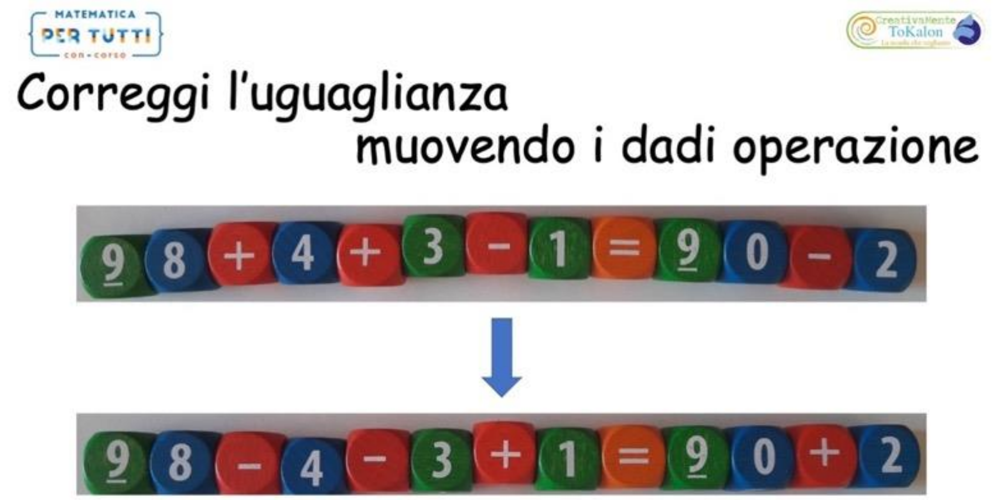


Figura 2.24 – Da un'uguaglianza errata a una corretta spostando solamente i dadi operazione

Quando si lavora modificando i segni delle operazioni, nel caso siano presenti solo $+$ e $-$, si tratta di comprendere cosa significa mettere un'addizione al posto di una sottrazione e viceversa. Se, ad esempio, al posto di sommare 4 a 98 si deve sottrarre 4, allora si tratta di capire come cambia il risultato dell'operazione: il numero che prima era 102 è diventato 94 e la differenza tra i due numeri-risultato è pari a 8 che corrisponde al doppio del numero 4. Si scopre che, in generale, se si scambia il $-$ con il $+$ in un'operazione del tipo $a - n$, ottenendo $a + n$, vuol dire che il risultato è superiore al precedente di $2n$; viceversa, se si scambia il $+$ con il $-$ si ottiene un numero-risultato più piccolo del precedente di $2n$.

In questo esempio si ha nella situazione di partenza un'uguaglianza errata: il risultato del primo membro è pari a 104, mentre il risultato del secondo membro è pari a 88. La differenza fra i due membri è dunque di 16: se si cambia l'operazione al secondo membro si ottiene 92 e dunque la differenza diventa di 12. Allora, poiché il primo membro si può vedere come $98 + 6$, la soluzione è proprio modificare i dadi del $+ 6$ in $- 6$ e portare dunque a zero la differenza fra i due membri.

Esempio 10. Più difficile è la situazione quando si possono spostare solamente le cifre, come nel caso mostrato in Figura 2.25, anche se è più facile trovare più di una soluzione.

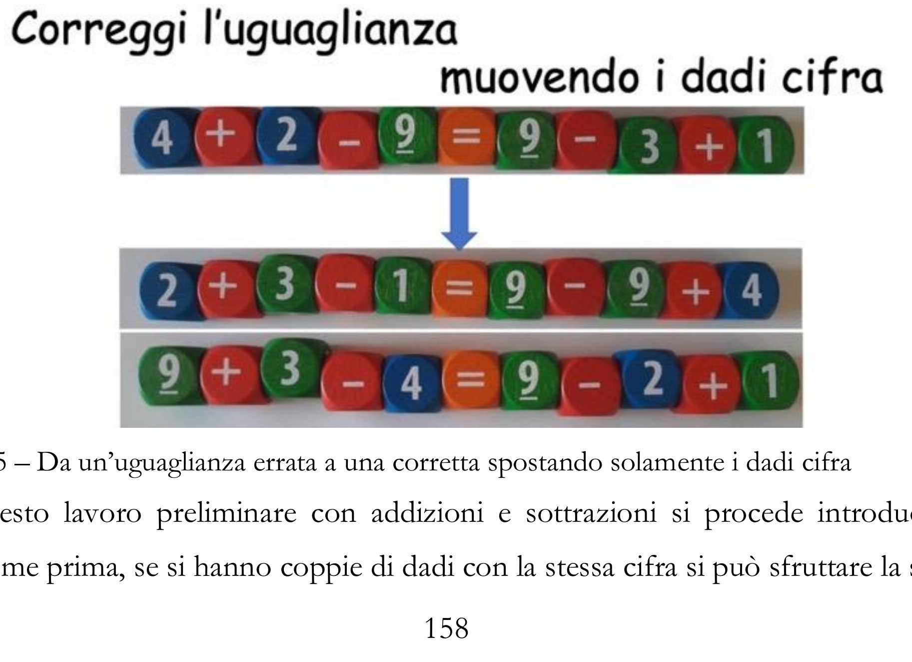


Figura 2.25 – Da un'uguaglianza errata a una corretta spostando solamente i dadi cifra

Dopo questo lavoro preliminare con addizioni e sottrazioni si procede introducendo le altre operazioni e, come prima, se si hanno coppie di dadi con la stessa cifra si può sfruttare la situazione.

ESEMPIO 11. I quattro “4”

Si potrebbero comporre:

a) $44 - 44$, ovvero 0

b) $443 - 441$, ovvero 2 (ovviamente varrebbe anche con altre cifre diverse da 3 e 1);

c) $44 \div 44$, ovvero 1

d) $4 \times 4 \div 4 \div 4$ o $4 \times 4 - 4 \times 4$ e ottenere rispettivamente 1 e 0

Quando si aggiungono le operazioni moltiplicazione e divisione il gioco è completo. Si possono proporre anche più domande a partire dalle stesse condizioni iniziali, come nel quesito in Figura 2.26. Inoltre, si può chiedere di utilizzare almeno una volta le centinaia; oppure di aggiungere un dado a scelta oltre ai 13 a disposizione e costruire un’uguaglianza con 14 dadi!

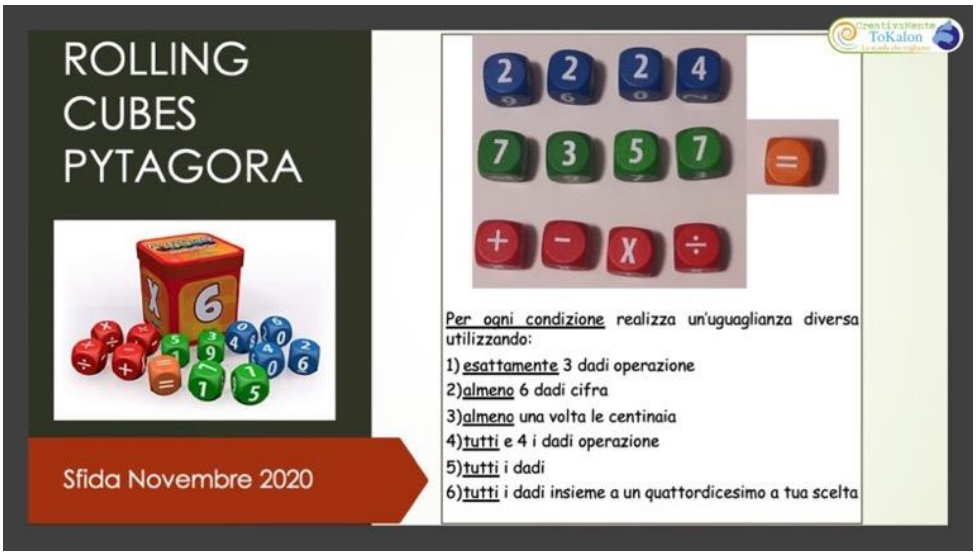


Figura 2.26 – Un esempio di sfida intorno al gioco *Rolling CUBES Pytagora*, pubblicata nel *Con-corso Matematica per tutti*, novembre 2020

Dopo un po’ di allenamento si può dunque giocare sul serio lanciando i dadi senza decidere nulla in anticipo!

Esempio 12. Un’indagine incoraggiata da una condizione difficile: solamente operazioni di moltiplicazione e di divisione, per realizzare un’uguaglianza con tutti i 13 dadi disponibili!

Figura 2.27 – Un lancio di *Rolling CUBES Pytagora* con solo moltiplicazioni e divisioni, avvenuto nel corso della videolezione realizzata per il progetto Con-corso Matematica per tutti.

La sfida è stata particolarmente impegnativa: due docenti (il sottoscritto e Daniele Scopetti) hanno dedicato un intero pomeriggio alla ricerca di "tutte" le possibili combinazioni. Non è stata trovata un'uguaglianza con tutti i 13 dadi, ma sono state fatte molte scoperte. Sono stati scoperti i numeri "nascosti" all'interno dei dadi a disposizione: ad esempio, i numeri 17 e 19 (Figura 2.28).

Figura 2.28 – 17 e 19: due numeri "nascosti" all'interno dei dadi di un lancio di *Rolling CUBES Pytagora*

Sono state trovate uguaglianze con 12 dadi: una "semplice" (Figura 2.29) e due più "ricercate" individuate con un lavoro meticoloso sulle scomposizioni in fattori dei numeri di tre cifre (Figura 2.30).

Figura 2.29 – Un'uguaglianza con 12 dadi sui 13 a disposizione (manca una cifra 8)

Figura 2.30 – Due uguaglianze con 12 dadi sui 13 a disposizione, utilizzando le centinaia (manca un ÷)

A un certo punto è emerso un "Correggi l'uguaglianza" (Figura 2.31) che si risolveva solamente scambiando di posto le cifre dei numeri di due cifre! Un'uguaglianza errata, poiché il primo membro dava come risultato 445, mentre il secondo 424, ma con soli tre scambi di posto si è arrivati all'uguaglianza, che attraverso le scomposizioni in fattori indicate sotto si vede meglio.

Figura 2.31 – Una piccola scoperta nel lancio con sole moltiplicazioni e divisioni

Un’altra scoperta è stata poi quella di costruire uguaglianze aggiungendo un quattordicesimo dado a scelta non casuale, come nelle due soluzioni mostrate in Figura 2.32. Nella prima soluzione si è scelto di aggiungere un segno di operazione: dietro questa scelta c’è l’idea di avere in entrambi membri dell’uguaglianza un “$\times 8$" e un “$\div 5$” che porta guardare all’interno dell’uguaglianza l’unico vero calcolo da compiere per verificarla, ovvero 9×4, che ovviamente è uguale al 36 presente al secondo membro. Nella seconda soluzione, scegliendo di aggungere come quattordicesimo dado la cifra 8, si è lavorato sull’idea del $\times 58 \div 58$ che non altera il risultato e dunque in questo caso i calcoli da compiere poi sono stati due $96 \div 4$ e 8×3 che danno entrambi come risultato 24.

Figura 2.32 – Due soluzioni del lancio con solo $\times$ e $\div$, utilizzando un quattordicesimo dado

Come succede a chi si confronta interamente con un problema ricreativo, quando non si trova la soluzione e non si è in grado di dimostrare che non esista (che poi equivale a trovare la soluzione), non si riesce a levarsi dalla testa il pensiero di quel problema e della soluzione non trovata. Così è accaduto anche ai due docenti di cui sopra e quando è stato realizzato con Python il programma Rolling.py menzionato nel §2.2.2: la mente è tornata subito a quel problema irrisolto e si è simulato proprio quel lancio per verificare che effettivamente non ci fossero soluzioni utilizzando tutti i 13 dadi. Dopo alcune ore (il programma non è computazionalmente molto veloce) ecco comparire la soluzione inaspettata: $8 \times 9 \div 84 = 6 \times 5 \div 35$.

Il primo e il secondo membro non danno come risultato numeri interi, ecco il motivo per cui non era stata individuata la soluzione: si era cercato solo nel mondo dei numeri interi, trascurando la possibilità di avere membri dell’uguaglianza che avessero come risultato numeri razionali. Scomponendo opportunamente l’uguaglianza-soluzione individuata dal programma si può vedere come effettivamente i due membri dell’uguaglianza siano entrambi rappresentazioni diverse ma equivalente del numero razionale $\frac{6}{7}$. Il secondo membro si vede immediatamente che corrisponde a $\frac{6}{7}$ semplificando il 5 con il 35, mentre per il primo membro si tratta di semplificare il 12 nascosto nelle due scomposizioni del 72 e dell’84 per ottenere $\frac{6}{7}$, ovvero $72 \div 84 = (6 \times \cancel{12}) \div (7 \times \cancel{12})$.

L’aspetto molto interessante di questo esempio è naturalmente l’aver trovato una soluzione che altrimenti non era stata individuata, ma soprattutto è significativo il fatto che questa scoperta ha illuminato una strada che non era stata percorsa e che può costituire un suggerimento utile per sfide future, ovvero la ricerca di uguaglianze con membri corrispondenti anche a risultati non interi.

È ragionevole, infine, domandarsi perché non si inseriscano anche le parentesi in questo gioco, ma in realtà la risposta è immediata: non si usano perché il gioco diventerebbe più facile ma non più semplice! Con le parentesi, infatti, è più facile trovare soluzioni, perché si ha una ulteriore risorsa di variazione ed è molto più facile ottenere i numeri che vogliamo; d’altra parte, esse costituiscono anche una complicazione perché sono una “variabile” in più da considerare, e certamente possono appesantire lo sviluppo di un ragionamento. Da un punto di vista principalmente didattico rischiano di “creare dipendenza”: se è possibile usarle si è portati a farlo e dunque a rinunciare alla sfida completa del gioco che richiede di lavorare solamente rispettando le priorità delle operazioni.

In ogni caso, soprattutto quando a scuola si inizia a lavorare con le parentesi, si può lavorare dando l’indicazione di utilizzare una volta le parentesi o anche esattamente due volte. Inserire le parentesi può rivelarsi utile proprio nel caso di errore sulle precedenze delle operazioni per valorizzare un tentativo compiuto e allo stesso tempo mettere in evidenza la questione per lasciare il segno, per insegnare a chi ha commesso quell’errore frutto di una distrazione o – peggio – di un fraintendimento.

ESEMPIO 13. (Figura 2.33) Rispettando le priorità delle operazioni l’uguaglianza non risulta corretta, in quanto nel primo membro $2 + 3 \times 2$ fa 8, che è diverso dal risultato del secondo membro, che è $65 \div 5$, cioè 10. L’uso delle parentesi potrebbe sostenere un’intuizione del giocatore-alunno che era in effetti giusta, ma nel gioco *Rolling CUBES Pytagora* non ci sono dadi parentesi. Poiché il gioco è un punto di partenza apprendere, si decide di inserire una coppia di parentesi lasciando uno spazio e/o eventualmente delimitando questo spazio con una matita o una penna.

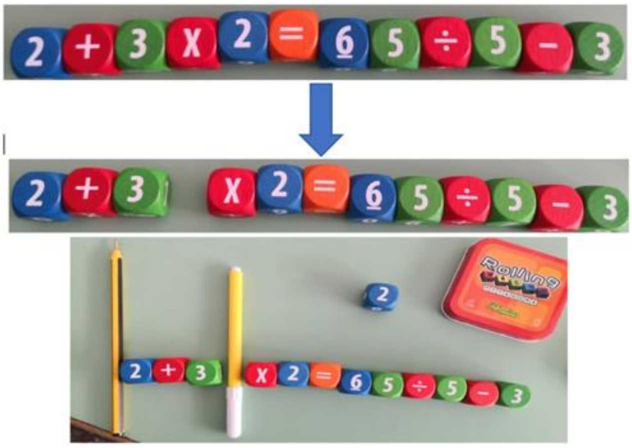


Figura 2.33 – Da un errore sulla priorità delle operazioni all’utilizzo delle parentesi “immaginarie” nel gioco *Rolling CUBES Pytagora*

Si può lavorare con le parentesi per correggere uguaglianze sbagliate e naturalmente si può utilizzare anche più di una coppia di parentesi.

ESEMPIO 14. (Figura 2.34) Si parte da un’uguaglianza errata: senza inserire le parentesi, infatti, si avrebbe $2 = 18 + \frac{1}{5}$. Si procede a inserire le parentesi opportune prima delimitando con due spazi vuoti $39 + 1$ che diventa così 40 e poi aggiungendo una seconda coppia di parentesi rappresentata da due penne per costruire $60 - (39 + 1)$, ovvero *20*. In questo modo l’uguaglianza è diventata corretta e l’errore iniziale era proprio quello di considerare l’esistenza di queste due parentesi che invece andavano inserite per non avere un’uguaglianza tra un numero intero e uno razionale non intero come visto all’inizio.

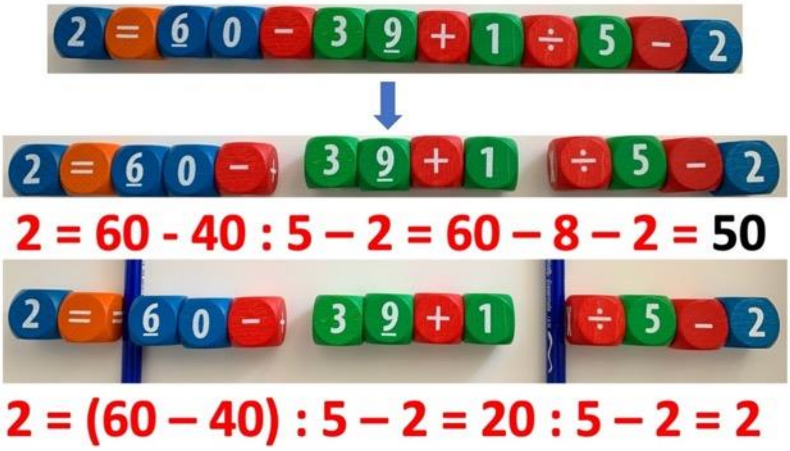


Figura 2.34 – Un'uguaglianza errata che diventa corretta utilizzando due coppie di parentesi: la prima è rappresentata da una coppia di spazi vuoti e la seconda da una coppia di penne

2.3 La matematica può essere «ricreativa» per tutti

Si è partiti in questa Parte I della tesi dalla matematica *ricreativa*: «che ha lo scopo di ricreare, che crea di nuovo, rinvigorisce quasi dando nuova vita», scrive il *Vocabolario della lingua italiana Treccani*, mostrando quanto una parola che è considerata sinonimo di passatempo leggero e passeggero, di bagatella, può invece invitare a un cambiamento inteso come nuova linfa, re-incontro, re-interpretazione di un'eredità.

La vocazione formativa della matematica

Quando si parla di insegnamento "della matematica" esattamente a cosa ci si riferisce? Ci si riferisce alla spiegazione/trasmissione di tutti gli argomenti previsti in ogni paese dalle regolamentazioni, che siano esse curricula, indicazioni nazionali, linee guida o i classici programmi o piani di studi? Si parla di insegnare le espressioni, i polinomi, il teorema di Pitagora, le equazioni, la retta nel piano cartesiano...? Senza entrare nella discussione di quali contenuti matematici, appare cruciale recuperare il valore di una matematica dal volto umano, di una matematica che si insegna per la crescita dell'essere umano: «Mathematics for human flourishing» come ha scritto Francis Su. L'approccio che si vuole delineare non si muove, di conseguenza, nella direzione di affrontare i "contenuti del programma", o meglio non si vogliono proporre giochi o problemi ricreativi che fungano semplicemente da introduzione a singoli contenuti della disciplina, anche se naturalmente potrà accadere spesso che siano coinvolti diversi argomenti che fanno parte dei curricula.

Potrebbe sembrare come un sottrarre del tempo agli obiettivi didattici e contenuti previsti, eppure si ritiene che quest'approccio non sia solo importante ma anche necessario per insegnare a *fare matematica*, cioè a vivere un'esperienza di fatica concreta come un'escursione in montagna, dove non è importante solo il punto di arrivo, la meta, ma anche il cammino, il percorso svolto da ciascuno, personalmente o in gruppo. E come si declina l'esperienza del fare matematica? Nel §2.1.2 si è proposto il concetto di *iniziativa matematica* secondo il russo Kordemsky e se ne ritrovano tutte le caratteristiche (creatività, curiosità, perseveranza, fiducia nella lotta) tra le virtù e i desideri umani fondamentali individuati da Su come unico e vero scopo del fare matematica:

> I claim that the proper practice of mathematics cultivates virtues that help people flourish. These virtues serve you well no matter what profession you choose or where your life takes you. And the movement toward virtue is aroused by basic human desires – the universal longings that we all have – which fundamentally motivate everything we do. These desires can be channeled into the pursuit of mathematics; the resulting virtues can enable you to flourish.
>
> Consider this analogy: if doing mathematics is like navigating a sailboat, then human desires are the winds that power the sails, and virtues are the qualities of character that sailing builds – mindfulness, attention, and harmony with the wind. Of course, sailing is useful in getting us from point A to point B, but that is not the only reason to sail. And there are technical skills that must be mastered to sail well, but we don't learn sailing to become better at tying knots. Similarly, math skills are valuable, but they cannot serve as goals. The skills society needs from math may change, but the virtues needed from math will not. [Su 2020, pp. 10-11]

L'approccio attraverso il gioco non solo favorisce l'esperienza del fare matematica, ma si ritiene cruciale affinché l'insegnamento dei docenti e conseguentemente l'apprendimento degli studenti arrivino alle virtù e ai desideri umani fondamentali che aiutano le persone a *flourishing*.

È significativa a tal proposito l'analogia sopra riportata da Su del fare matematica visto come navigare in barca a vela, dove i desideri umani sarebbero i venti che alimentano le vele e le virtù sarebbero le qualità che il navigare richiede. Lo scopo del navigare in barca a vela è solo quello di andare da un punto A a un punto B? Lo sarebbe forse se si stesse parlando di un traghetto che è l'unico mezzo che congiunge un'isola (A) alla terraferma (B), ma nel caso della barca a vela è evidente che c'è dell'altro per decidere di mettersi in mare, qualcosa che a fare con l'esperienza di *ilinx* descritta da Caillois tra le categorie fondamentali del gioco (si veda §1.2.3). Non solo: Su aggiunge che «ci sono competenze tecniche che devono essere padroneggiate per navigare bene, ma è ovvio che non s'impara a navigare per diventare più bravi a fare i nodi!» Così le «math skills» sono preziose, ma non possono essere il «goal», anche perché possono cambiare come le tecniche per fare i nodi, mentre le virtù che la matematica permette di coltivare sono immutabili, sono sempre quelle da secoli come la storia ci dimostra.

Una visione profonda di ciò che significa "attraverso il gioco"

Si può veramente insegnare la matematica attraverso il gioco per tutti, in un contesto come quello della scuola secondaria obbligatoria? Rispondere affermando che il gioco è un'opportunità per favorire la motivazione allo studio è insufficiente, anche perché alle a volte si incontrano alcune difficoltà iniziali specialmente con gli studenti più grandi. Nel §1.1.2 si è vista la vastità del patrimonio di giochi matematici e problemi ricreativi arrivati fino a noi, studiati e sviluppati da matematici professionisti ma anche da appassionati dilettanti; nel §1.3 si è cercato di mostrare la stretta relazione che intercorre tra matematica e gioco, e come si sia arrivati alla consapevolezza che, per certi aspetti, la matematica è – anche – gioco; nel §2.1 si è riportato il contributo di matematici e studiosi di diversi paesi che hanno speso parte del loro lavoro comunicando l'importanza di un insegnamento-apprendimento della matematica attraverso il gioco; nel §2.2 si è descritto il lavoro che può nascere intorno a un singolo quesito. Abbiamo citato – in epigrafe all'introduzione della tesi – l'esortazione di Martin Gardner (1914-2010) a inserire problemi, indovinelli e giochi della matematica ricreativa a scuola. Si tratta di un punto di vista assai condiviso oggi, sia fra cultori di matematica ricreativa sia fra insegnanti di matematica e studiosi di didattica della matematica, proposto dalla scuola dell'infanzia alle scuole secondarie superiori e oltre. Tuttavia, giochi e divertimenti matematici sono considerati per lo più, quanto meno in Italia[121], come una mera strategia didattica in classe, neppure centrale, contrapposti in una dialettica con la matematica "seria" dove la bilancia pende tutta nella direzione di quest'ultima: indovinelli e giochi matematici appaiono essenzialmente per suscitare l'interesse per la matematica scolastica oppure attutirne l'impatto di paura e angoscia, quasi un piccolo escamotage o inganno o una pausa bonaria per ammorbidire il ritmo incalzante e il rigore di spiegazioni e compiti, teoria ed esercizi.

Oltre all'introduzione o "aggiunta" di quesiti ricreativi e giochi matematici nel normale programma di studio scolastico si pone la questione più ambiziosa di cercare di *trasformare* la matematica scolastica, grazie a un approccio giocoso, ricreativo, "fuori dagli schemi" di serietà, freddezza e compostezza comuni alle scuole di ieri e di oggi: si tratta di fare matematica altra, a scuola (rendendola coinvolgente, dando un ruolo cruciale all'iniziativa dell'alunno e al confronto fra alunni e con l'insegnante, creando un'atmosfera allegra, in cui predomina il sorprendente, in cui ci si diverte), e di vedere la matematica in un altro modo (non come un deposito fossilizzato di definizioni, classificazioni e procedure). Il patrimonio della matematica ricreativa allora non solo ci offre una imponente raccolta di materiali, ma anche prospettive epistemologiche e antropologiche sulla matematica, sull'incontro degli alunni e delle alunne con essa e sull'apprendimento della matematica di bambini e ragazzi. Certamente vi sono altre strategie per la trasformazione della matematica a scuola, quali l'approccio narrativo, la finestra aperta sulla vita quotidiana o sulle applicazioni della matematica, lo spazio ai contatti della matematica con le arti o con la filosofia, l'attenzione alla storia della matematica. Questa tesi è impostata sulla centralità di un approccio basato sul gioco, ispirato dal patrimonio della matematica ricreativa.

La triangolazione *matematica - matematica ricreativa - gioco* esplorata in questa Parte I della tesi porta a individuare potenzialità pedagogico-didattiche dell'approccio ricreativo alla matematica elementare in tre diverse direzioni, le quali sono intrinsecamente collegate fra di loro:

1. potenzialità nell'apprendimento: i quesiti ricreativi mobilitano nei ragazzi specifiche capacità di apprendimento in termini di *mimesi* (immedesimazione, partecipazione) e di *agon* (competizione), che abbiamo collegato al termine *ludus*: questo tipo di energia vitale si esprime come *iniziativa* matematica

[121] Eccezione a livello internazionale

2. potenzialità in termini di *coinvolgimento* e di *entusiasmo* (piacere, divertimento, ebbrezza o *ilinx*, gioia, apprezzamento), che abbiamo collegato alla *paidia*, attinenti particolarmente all'età giovanile
3. potenzialità di far vivere *gli aspetti creativi della prassi matematica* in esempi alla portata di tutti: "a way of making serious mathematics understandable or palatable" [Singmaster 1994, p. 1568].

Un approccio pedagogico alla matematica attraverso il gioco prende allora in considerazione entrambe le tensioni che attraversano il gioco: il *ludus* e la *paidia* di Caillois (di cui si è parlato nel §1.2.3). Si gioca in matematica da una parte per risolvere problemi, superare sfide regolate, sfruttando e sviluppando abilità mentali, scaltrezza, calcolo, pazienza, perseveranza, capacità di cambiare i punti di vista (*ludus*), dall'altra si gioca per divertimento, per la gioia della sorpresa, della novità, sviluppando capacità d'improvvisazione, fantasia, creatività in un clima allegro, a volte euforico, dove il riso non è un segnale negativo, ma è l'elemento che conferma il successo dell'attività (*paidia*).

Come si è visto, due sono le componenti fondamentali che ritroviamo nel gioco e nell'approccio ricreativo alla didattica della matematica: *agon* (competizione/sfida) e *ilinx* (vertigine/ebbrezza). A queste si aggiungono alle volte l'*alea*, e anche la *mimicry*, che si insinua in ogni momento a scuola poiché è un impulso primordiale forte nell'adolescenza.

L'agon è la dimensione naturale della matematica che sorge dai problemi, da una domanda che richiede una risposta e dunque lancia una sfida a chi vuole accoglierla, sollecitando un comportamento "eroico". Così nel gioco è impossibile non pensare alla competizione sia con se stessi sia con altri, ma non va dimenticato che la vera competizione di chi gioca facendo matematica è quella dove ciascuno sente muovere dentro di sé le domande che quella data sfida suggerisce e le mette in gioco, senza condividerle con i suoi avversari, senza pronunciarle, a volte scrivendosele: si deve immaginare un'attività di gioco con la matematica come un'arena di cervelli e cuori in azione, in fermento, dove se i pensieri potessero parlare allora si sentirebbe una grande confusione, che si crea quando il lavoro avviene in gruppi che si trovano a parlare tra loro. Non a caso il verbo competere viene dal latino "cum-petere" che significa "domandare insieme": *n* cervelli e cuori che nello stesso momento "domandano insieme" per capire meglio quello che hanno di fronte, per arrivare alla soluzione dell'enigma, per vincere la partita. Così nell'approccio pedagogico che si vuole delineare le domande valgono più delle risposte, come sottolinea ancora Francis Su citando la docente di matematica Fawn Nguyen[122]:

> Critique the effectiveness of your lesson, not by what answers students give, but by what questions they ask [Su 2020, p. 26].

[122] Nel dicembre 2016, prima delle vacanze di Natale, Fawn Nguyen, docente di matematica a Oak View in California, scrive sul suo blog «these 20 things that I have done – or will/want to do – and suggest that you too may want to do some of these things as a human and as a teacher» e al ventesimo e ultimo posto propone la citazione ripresa da Su.

D'altra parte chi accoglie la sfida di un problema, di un gioco matematico, non può non sperimentare almeno una volta la vertigine caratteristica dell'ilinx, quell'ebbrezza che caratterizza l'approdo in un'altra dimensione, dove non c'è più la terra sotto i propri piedi e il giocatore ne è "felicemente spaventato", come se stesse salendo sulle montagne russe di un luna park: il biglietto per partecipare a questa attrazione ha il costo del proprio personale impegno fisico e mentale, occorre esserci con tutto noi stessi, lasciarsi interrogare dalla sfida lanciata e dare spazio a tutta la propria immaginazione accettando di cadere in burroni, inciampare in ostacoli, ma anche di volare ad altezze mai viste, di spostare macigni, di vedere ciò che non si vede.

Negli ultimi decenni, sulla scia del lavoro di George Polya, si è dedicata una crescente attenzione alla risoluzione dei problemi, che apre la strada a una visione euristica della matematica, incentrata sulla creatività e sull'iniziativa e quindi di sicuro impatto nell'educazione. Ciò ha portato naturalmente a recuperare i problemi della matematica ricreativa, che offrono un gran numero di esempi per allenarsi alla risoluzione dei problemi. Questo aspetto, anticipato nel lavoro di Schuh, è al centro del contributo di Kordemsky, che è emerso nella sua centralità e attualità in questa tesi, come in quello di Guzmán. Vale la pena ricordare che il loro discorso si può estendere fino all'inizio dell'università: il testo universitario statunitense *Problem solving through recreational mathematics* (1980) di Bonnie Averbach e Orin Chein è un esempio di un libro di testo concepito a partire dal patrimonio della matematica ricreativa.

Mathematics for the multitudes, mathematics for all: la matematica ci riguarda

A un docente di scuola secondaria potrebbero sembrare affermazioni retoriche e comunque irrealizzabili nel contesto scolastico attuale, ma quanto si vuole affermare si concretizza in un'espressione che poi ha dato il nome al progetto di cui si parla nella Parte II: *Matematica per tutti*. Le riflessioni sul significato del gioco nella condizione umana, da Pascal ai fondamentali contributi esaminati nel §1.2 fanno da sfondo al coro di voci del §2.1 cui si è cercato di dare ascolto combinato sull'insegnare e sull'apprendere le matematiche elementari nella scuola secondaria anche attraverso il gioco.

Si insegna la matematica durante tutto il periodo della scuola obbligatoria e si prosegue anche successivamente nei trienni dei licei, degli istituti tecnici e professionali, ma per quanto ultimamente sia di moda la parola "competenza" si pensa che questa disciplina non sia per tutti, che sia in fondo giusto che la selezione avvenga attraverso le insufficienze in matematica (si pensi al grande numero di debiti in matematica assegnati nel primo biennio della scuola secondaria di secondo grado) e non certo, ad esempio, in discipline come Storia o Arte e immagine. Si ha dunque spesso un'idea di una matematica come una disciplina difficile, probabilmente *la più difficile* di tutte e in quest'ottica è normale che molti studenti facciano fatica a comprenderne i contenuti. D'altra parte, comprendere un concetto matematico o una dimostrazione non è semplice e immediato, ma lo è ancora meno cercare di farlo comprendere a qualcun altro. Attenzione quindi a non spostare la questione solamente su come è fatto questo "qualcun altro" che deve comprendere, quali difficoltà ha, quale predisposizione, quale atteggiamento nutre nei confronti della matematica; così si arriva presto a parlare di *essere portato* o *non essere portato per la matematica*, per poi trovarsi in breve tempo le classi piene di studenti certificati con i sempre più diffusi disturbi di apprendimento.

Il punto di partenza di una matematica per tutti sono gli adulti che hanno il faticoso compito di far comprendere la matematica. Si pensi alla parola *portato* menzionata poc'anzi. E chi (non) ti ha *portato*? Un (non) maestro! E vale per la musica, per l'arte, per le lingue, per lo sport... L'insegnamento è una relazione e per ogni discepolo occorrono dei maestri! Per ognuno di noi c'è stato qualcuno che l'ha portato o non l'ha portato alla matematica! La responsabilità di portare o meno è dei docenti, ma non vanno dimenticati i genitori che con affermazioni quali "sei come mamma/papà, non sei portato..." possono favorire un allontanamento del proprio figlio dalla matematica, possono favorire l'interruzione o addirittura la distruzione di un rapporto con questa disciplina. Naturalmente un genitore, un parente prossimo può anche essere un aiuto invitando a non aver paura di sbagliare, ad accettare la sfida della matematica, sostenendo il tentativo del docente che deve provarle tutte per portare i suoi studenti a comprendere gli aspetti elementari di questa disciplina. Così, c'è chi diverrà Einstein e chi semplicemente avrà fatto dei passi importanti nell'uso della sua ragione e della sua capacità d'osservazione: come quando si impara a suonare uno strumento non si diventerà per forza dei grandi musicisti, o quando si dipinge non si diventerà Van Gogh, ma, attraverso l'opportunità di lavorare e imparare con dei maestri nei quali riporre la propria fiducia, si potrà entrare dentro la musica, dentro la pittura, e allora sì che qualcuno potrà affermare "guarda quello com'è stato portato ALLA musica, ALLA pittura, ALLA MATEMATICA!"

Per ricoprire il suo ruolo di "portatore" un docente non ha bisogno di effetti speciali o fuochi d'artificio, non deve diventare un "animatore" riducendo la matematica a qualcosa di divertente (nel senso negativo del termine di "diversione", di deviazione dalla strada maestra), costruito a tavolino per coinvolgere gli studenti. A nulla serve lamentarsi del fatto che gli studenti oggi siano distratti – o più distratti di ieri – se poi non li si sfida su qualcosa di veramente attraente in contenuti che abbia anzitutto fascino per un docente e poi conseguentemente anche per loro. *Distratto* è, infatti, il contrario di *attratto*! Se non si parla agli studenti di qualcosa che si ama, che vale la pena incontrare e conoscere, che apre alla scoperta di sé stessi e del mondo, se le lezioni non hanno un contenuto attraente per il docente, come potranno attrarre gli alunni *distratti*? Davvero si pensa che uno smartphone possa essere più attraente di una lezione? Gli studenti vogliono essere sfidati ma questa sfida non può essere lanciata attraverso test, formule inverse o procedure ripetitive e noiose e a poco serve mostrare loro quotidianamente quanto i contenuti insegnati possano servire nella vita di tutti i giorni. È necessario saper compiere una scelta oculata di problemi da risolvere, questioni sfidanti, giochi matematici da proporre in classe, senza trascurare però la consapevolezza della portata di questa disciplina, espressa brillantemente da Platone:

> Nessuna disciplina formativa ha una efficacia così grande come la scienza dei numeri; ma la cosa più importante è che essa sveglia chi per natura è sonnolento e tardo di intelletto e lo rende pronto ad apprendere, di buona memoria e perspicace, facendolo progredire per arte divina oltre le sue capacità naturali. [Platone, *Le leggi, Libro V,* 747b]

Secondo quanto afferma Platone non si tratta di lavorare con una disciplina che risulta difficile per chi ha difficoltà, ma al contrario la matematica costituisce un canale privilegiato per svegliare *chi per natura è sonnolento e tardo di intelletto*, addirittura per farlo *progredire oltre le sue capacità naturali*! Prima di pensare a strumenti compensativi e dispensativi, è possibile guardare alla matematica come una porta d'ingresso, di cui va scoperta la chiave che però è diversa per ogni studente (e docente). Purtroppo, l'esistenza di questa varietà di chiavi conduce spesso i docenti ad abbandonare la ricerca di quella giusta e conseguentemente gli studenti considerano la matematica come un muro, un ostacolo insuperabile.

Un approccio pedagogico alla matematica attraverso il gioco contribuisce alla ricerca di queste chiavi diverse per ciascuno e permette di lavorare con tutti, prendendo in considerazione le diverse storie personali: infatti, ciascuno studente dagli 11 ai 15 anni (ma lo stesso vale anche per gli studenti più grandi e per i docenti) ha creato nel tempo un suo rapporto con la matematica. Escludendo chi ha maturato un rapporto felice e adeguato, magari anche all'insegna della ricerca delle virtù e dei desideri umani di Su, si possono immaginare diverse situazioni che spesso "segnano" talmente tanto chi ne è stato protagonista che si tende a considerarle come immutabili, ma in realtà non è mai troppo tardi per scoprire la bellezza del fare matematica per tutti. Si ripropone nel seguito un piccolo elenco – forse non esaustivo ma quantomeno indicativo – dei possibili profili di coloro che non hanno fatto esperienza di una matematica per tutti e al contrario credono che la matematica sia solo per alcuni (liberamente ispirato ancora a Su e all'esperienza di docente di chi scrive):

1. i demoralizzati, che sono stati feriti dalle parole che qualcuno ha detto sulle loro abilità matematiche. Sono quelli che ormai sono convinti di "non essere portati" e pensano alla matematica come un'esperienza strettamente collegata all'ingegno personale, al talento innato che si ha oppure no.
2. coloro per cui l'incantesimo non è mai cominciato oppure si è spezzato per qualche motivo. Tra questi ci sono sia quelli che hanno avuto un solo piccolo o grande fallimento nel proprio percorso, sia quelli che hanno sempre avuto difficoltà nella risoluzione di esercizi e problemi. Per entrambi il motivo dell'incantesimo interrotto o mai cominciato può essere la mancanza di risorse adeguate ma anche semplicemente una matematica presentata sempre come un insieme di regole e meccanismi rigidi entro i quali occorre muoversi senza commettere errori. La matematica per loro è diventata o è sempre stata noiosa; a volte nutrono nei confronti di essa un sentimento di indifferenza o in altri casi di fastidio.
3. coloro che, per storia personale, non hanno avuto la possibilità di ottenere un'istruzione matematica, eppure sono sempre stati curiosi di capire come funzionava. A tal proposito si riporta un episodio accaduto nell'esperienza di insegnamento di chi scrive: nell'a.s. 2008-2009 uno studente

italoamericano del terzo anno di un Liceo Artistico era da poco in Italia e trascorreva tutte le lezioni a disegnare, quando un giorno si avvicina a lui il docente di matematica e gli chiede «Cosa disegni?». Alla domanda lo studente rimane sorpreso dall'interesse di un docente per quello che stava facendo, poiché in genere veniva solamente ripreso con espressioni come «Stai attento!», «Smettila di disegnare!» e simili, che riportano alla mente la questione distratto/attratto sopra menzionata. E così risponde nel dettaglio descrivendo le sue "opere", ma poi prima di congedare il docente gli pone una domanda particolarmente significativa: «Prof, ma lei cosa insegna?». Non si trattava di una domanda banale, perché naturalmente, nonostante fosse un tipo umano piuttosto stravagante, sapeva perfettamente quale materia insegnasse quel docente, ma gli stava domandando qualcosa di più profondo: era intatta – e forse più viva di molti altri suoi compagni – la sua curiosità di capire cos'era quella matematica di cui continuava a sentire parlare ma alla quale non era mai stato veramente introdotto

4. coloro che pensano alla matematica come un'esperienza individuale che non ha nulla a che fare con l'aspetto relazionale e che dunque è per sua natura alienante. Si tratta di coloro che affermano fieri: «Io ho capito», «io so come risolverlo». In questo caso la matematica consiste nel risolvere da soli esercizi e problemi assegnati, rinunciando a qualunque tipo di relazione con altri per non alterare la propria performance. Si può anche essere molto bravi nella risoluzione dei quesiti, ma si perde la componente relazionale della matematica che consiste nella conversazione e nel confronto tra pari, nella discussione argomentata delle strategie utilizzate, nella soddisfazione o meno di aver trovato una strada diversa da quella di un altro compagno o del docente stesso. Spesso tra questi si nascondono anche tanti che hanno una visione rigida e schematica della matematica come un insieme di regole, tecniche e procedure che loro padroneggiano perfettamente, ma appena "si cambia il posto a un oggetto" vanno nel pallone perché non hanno ancora compreso cosa significhi fare matematica, tanto meno sanno come possa essere "per tutti" perché loro sono i più bravi, quelli che risolvono tutti gli esercizi assegnati dal docente, quelli che "non hanno problemi" perché in realtà non hanno mai ricevuto problemi *veri* dai loro insegnanti.
5. i matematici, infine, probabilmente il gruppo più esiguo, che studiano la disciplina ad alto livello sviluppando, dimostrando e confutando teorie e magari proponendo nuovi concetti, ma non credono che la matematica possa essere accessibile a tutti, in quanto per loro la matematica coincide con il ristretto ambito personale di ricerca. Tutto ciò non impedisce loro di incidere nel proprio lavoro e nella matematica in generale, proponendo teorie a volte magnifiche, che potranno essere apprese e insegnate da qualcun altro, ma rimane in loro l'idea sbagliata che *tutta* la matematica sia solo per una ristretta cerchia di "eletti" che possono accedere ai suoi misteri.

Ripartendo proprio da quest'ultima fotografia dei matematici esperti, professionisti che non vedono o non sono interessati alla possibilità di una matematica per tutti, è necessario sottolineare che quello che si vuole proporre qui non è l'approccio per tutta la matematica, poiché è evidente come, quanto più essa si complica, tanto più è difficile insegnarla e apprenderla. È questo il motivo per il quale nel titolo di questa tesi si trova l'aggettivo "elementari" accanto a matematiche, che si è visto emergere, nel §1.1 e di nuovo nel §2.2.1, strettamente legato allo sviluppo della matematica ricreativa[123]. Non esiste una vera e propria definizione, si tratta della matematica scolastica, precedente al calcolo infinitesimale. L'aggettivo «elementari» sta infatti ad indicare, come riportato dal Dizionario Treccani online, «che forma, o concerne, i primi rudimenti di una scienza, di un'arte, di uno studio, soprattutto in quanto si presupponga un ulteriore sviluppo e approfondimento».

L'indagine sui filoni della matematica ricreativa, a cavallo fra matematiche elementari e matematica dotta, ha mostrato che si tratta di un argomento che non può essere trattato o meno a scuola soltanto seguendo i gusti e delle attitudini del singolo insegnante. Giochi, indovinelli e ogni genere di risultato o problema con sapore di gioco possono essere visti come una matematica d'intrattenimento, che può essere vissuta come passatempo (si pensi, ad esempio, a una rivista di enigmistica da leggersi sotto l'ombrellone d'estate) o come occasione per svagarsi o per distrarsi, anche alla luce delle numerose pubblicazioni e riviste dedicate a giochi matematici o problemi ricreativi.

Di fronte a un gioco o a un problema ricreativo un insegnante può sicuramente fare riferimento allo schema di allenamento all'euristica proposto da Guzmán (Tavola 2.8) sulla falsa riga dell'approccio di Polya. All'utilizzo nella programmazione curriculare si può affiancare la proposta dei giochi e dei problemi ricreativi anche in altri momenti: classi aperte, laboratori, recupero, potenziamento, intervallo. Si può scegliere di utilizzare un solo gioco o problema ricreativo alla volta o diversi giochi contemporaneamente, facendo ruotare i gruppi o i giochi da un tavolo all'altro dopo un tempo stabilito. Se però si sceglie di utilizzare il gioco in classe nell'orario curriculare, occorre che il lavoro sia sistematico, con una cadenza prestabilita – anche mensile se non si vuole "esagerare" – che non deve avere l'effetto di un'attività estemporanea: il gioco non può essere ridotto a un fuoco d'artificio che, per quanto spettacolare, è destinato a spegnersi presto.

Idee-guida per iniziare a introdurre un approccio attraverso il gioco a scuola

Quale via potrebbe seguire un insegnante prima di avventurarsi in un approccio alla matematica attraverso il gioco? Si propongono qui alcuni atteggiamenti o idee-guida, valide per portare timidamente la matematica ricreativa in classe, ma anche e soprattutto per iniziare a lavorare operativamente su un approccio pedagogico alle matematiche elementari attraverso il gioco, che si ponga di fronte sia ai

123 Si ricordi la *History of Mathematics* di Smith. In Italia si fa riferimento ai contenuti presentati *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi* (Berzolari et al, 1930-1951). In realtà, all'interno delle matematiche elementari si collocano anche temi che vanno oltre quello che si considera appropriato nella scuola dell'obbligo oppure entro i 15 anni, anche a seconda del profilo di scuole frequentato.

programmi, ovvero a quel concentrato di prassi e consuetudini che hanno accompagnato lo sviluppo della scuola dell'obbligo europea, sia a ciò che è davvero la finalità umana della presenza della matematica scuola. Si vuole introdurre un approccio che da una parte si nutra della profondità storico-culturale dell'eredità della matematica ricreativa, fino alla sua declinazione attuale anche con il contributo di studiosi sulle frontiere della ricerca; dall'altra consideri il contesto sociale e culturale odierno, il rischio di ridurre la matematica a una materia puramente tecnica esiliandola definitivamente dalla sua eredità umanistica, con il risultato di aumentare l'antipatia, l'astio, e la concreta difficoltà di comprenderla.

Si è visto che il gioco può essere associato in questo ad aspetti come la narrazione, l'esperienza corporea oppure la storia della matematica.

L'elenco proposto in Tavola 2.11 può essere letto come una "check list": si tratta di indicazioni che riguardano anche il singolo alunno o alunna e la classe, che, attraverso il proprio insegnante, può essere accompagnata e guidata a immergersi in una matematica vista come gioco. Questa lista è stata costruita anche alla luce della sperimentazione di cui si parlerà nella seconda parte.

1.	Non è tutto oro quel che luccica
2.	Chi sa il gioco, l'insegni
3.	Giocare insegna a giocare
4.	Giocare è una cosa seria, ma non c'è gioco senza divertimento
5.	La creatività è contagiosa, trasmettila!
6.	Sbagliando s'impara
7.	Chi la dura, la vince
8.	Chi vuole assai, non domandi poco
9.	Non si vede solo con gli occhi
10.	Chi cerca trova
11.	Chi ha trovato un fungo, cerca tutt'intorno per scoprirne degli altri
12.	Un bel gioco non si esaurisce mai
13.	Fare e disfare, è tutto un lavorare
14.	L'importante è partecipare
15.	A ogni uccello il suo canto
16.	L'unione fa la forza
17.	Lo scopo del gioco non è mai il vero scopo

Tavola 2.11 – Per un approccio pedagogico alle matematiche elementari attraverso il gioco

Nel seguito si argomenta brevemente ciascun elemento della lista che è numerata, ma non segue un ordine rigido, poiché ogni atteggiamento individuato è ugualmente importante affinché il gioco non rimanga soltanto un passatempo o un riempitivo all'interno della proposta didattica prevista per gli studenti dagli 11 ai 15 anni.

Non è tutto oro quel che luccica: è un avvertimento per l'insegnante che non deve accontentarsi della prima impressione che ha su un gioco o su un problema ricreativo, ma deve approfondirne la conoscenza, anche in funzione della classe a cui lo proporrà, pensando a quali potranno esserne i punti di forza e allo stesso tempo i limiti. Senza dimenticare che l'obiettivo di un lavoro attraverso il gioco non è quello di intrattenere con un singolo fuoco d'artificio che, com'è iniziato, presto o tardi si spegne, ma bensì quello di offrire un'occasione privilegiata per capire cosa vuol dire fare matematica. Il proverbio vale anche per lo studente che dopo la prima impressione deve vedere se il luccichio si ripresenta ogni volta oppure no, se era stato solo l'entusiasmo di fronte a una novità oppure se è davvero "oro".

Chi sa il gioco, l'insegni: esiste un proverbio che dice «chi sa il gioco, non l'insegni» e si riferisce al fatto che se un giocatore vuole vincere non deve rivelare agli altri quello che ha imparato (i segreti e i trucchi del mestiere). L'affermazione qui proposta è appositamente senza il «non», in quanto si vuole mettere in evidenza il fatto che un insegnante deve conoscere il gioco, deve saper giocare prima di proporlo ai suoi studenti. Non è necessario che l'insegnante sia – o dimostri di essere – anche il giocatore più bravo o più rapido, l'importante è che conosca bene il gioco, scavandone i punti di forza e i limiti, anche in funzione della classe a cui lo proporrà. L'affermazione vale anche per gli studenti che hanno imparato un gioco e che possono diventare maestri per i propri compagni.

Giocare insegna a giocare: senza voler smentire l'affermazione precedente, si tratta di imparare dall'esperienza, sia dal punto di vista dell'insegnante sia dal punto di vista degli studenti. Sicuramente vale lo stesso per una lezione di matematica "tradizionale", ma nell'approccio attraverso il gioco è frequente per l'insegnante scoprire dei particolari durante l'attività ricreativa, guardando gli studenti al lavoro, rilevando le loro reazioni e i loro comportamenti, scoprendo altri aspetti del gioco che si sono palesati giocando secondo le sensibilità diverse di chi ha affrontato la sfida. Lo studente affronta ogni volta una sfida diversa, una partita nuova, a differenza dei blocchi di esercizi "fotocopia" che vengono proposti come applicazione di una teoria spiegata: giocando impara a imparare dall'esperienza delle partite precedenti, se si tratta dello stesso gioco, o dei problemi ricreativi già affrontati, se si tratta di un problema nuovo. Non si riparte da zero ogni volta, non perché il gioco sia sempre uguale o il problema ricreativo sia molto simile a un altro già risolto, bensì dopo ogni partita giocata, dopo ogni sfida affrontata si affinano il ragionamento e l'osservazione, si affina cioè l'approccio del fare matematica.

Giocare è una cosa seria, ma non c'è gioco senza divertimento: si è parlato molto del binomio impossibile serio-divertente, ma, come visto, dagli antropologi a chi si è occupato di didattica, è imprescindibile riconoscere la serietà del gioco perché possa essere una reale occasione di insegnamento nel contesto scolastico. Un gioco obbedisce a delle regole e la sfida che viene lanciata va accolta seguendole, rispettando i tempi e le condizioni assegnate. D'altra parte, se si gioca e non c'è spazio per il divertimento, o meglio se il gioco non genera divertimento in chi vi partecipa, manca una componente essenziale affinché l'attività raggiunga gli obiettivi desiderati di coinvolgimento e di costruzione di un atteggiamento positivo e curioso nei confronti del fare matematica.

La creatività è contagiosa, trasmettila!: Se gli studenti vedranno il proprio insegnante esercitare la propria creatività allora sarà più semplice per loro essere creativi. La creatività si esprime spesso in una prima fase di gioco libero, ma occorre non perderla anche quando sono state definite le regole. È necessario rendere trasparente il fatto che il primo giocatore è l'insegnante che propone il gioco e che in prima persona ha messo in moto tutta la sua creatività per affrontarlo e conseguentemente per proporlo alla sua classe. Si tratta a volte di recitare una parte, ad esempio quando si propone un problema ricreativo di cui si è vista la soluzione: non è necessario per chi insegna immedesimarsi sempre nei propri studenti cercando di risolvere il problema che si proporrà loro, ma è necessario che gli studenti credano che i propri insegnanti non si sono sottratti alla sfida o che l'hanno creata proprio loro, come è accaduto nell'esperienza descritta nella parte II.

Sbagliando s'impara: è un proverbio che non si collega solamente al gioco, ma vale in assoluto nel fare matematica. Senza dubbio nel gioco a scuola è favorita la libertà nello sbagliare, si è meno condizionati rispetto a quando si deve risolvere un esercizio "ordinario". Un detto attribuito a Confucio dice: «L'uomo che fa molto sbaglia molto, l'uomo che fa poco sbaglia poco, l'uomo che non fa niente non sbaglia mai». Si tratta di lavorare nella direzione del fare e dunque del giocare; in altre parole, si potrebbe dire «giocando s'impara a sbagliare». Il gioco risulta un'occasione privilegiata per scoprire l'importanza dell'errore nel fare matematica (si veda anche il §3.1.1).

Chi la dura, la vince: è un proverbio piuttosto noto. In questo contesto la vittoria può coincidere con la vittoria reale in un gioco, ma anche e soprattutto con la scoperta di una strategia risolutiva personale, frutto di quelle caratteristiche descritte da Su (si veda §1.3) di perseveranza, di pazienza, di fiducia nella lotta. Naturalmente vale anche il fatto che la prima vittoria è proprio quella di non arrendersi alla prima difficoltà. Il proverbio sembra esclusivamente rivolto agli studenti che affrontano un gioco o un problema ricreativo, ma, come per gli altri, riguarda anche gli insegnanti che hanno ancora una volta la grande responsabilità di testimoniare in prima persona uno spirito paziente e combattivo come quello che chiedono ai propri studenti.

Chi vuole assai non domandi poco: un elemento essenziale di un insegnamento delle matematiche elementari attraverso il gioco è la curiosità che è sempre in coppia con l'atteggiamento di domanda. Giocare è domandare, sempre ad ogni istante, per entrare sempre di più nella questione posta e per capire meglio quali siano le strategie possibili, quelle più efficienti, quelle più dispendiose, quelle insensate, e così via.

Non si vede solo con gli occhi: si torna alla creatività di cui si è parlato prima, il riferimento qui è alle immagini mentali o al fare affidamento su sensi diversi dalla vista, anche se il collegamento vero è alla famosa affermazione della volpe de *Il piccolo principe*: «non si vede bene che col cuore. L'essenziale è invisibile agli occhi». Nell'attività con giochi e problemi ricreativi è favorito il coinvolgimento dell'intera persona, con sentimenti e passioni: lo studente – ma anche il docente – può mettere in gioco tutto sé.

Chi cerca trova: la posizione del cercatore è essenziale come l'atteggiamento di domanda evidenziato prima. Ci sono due però aspetti importanti collegati: da una parte per trovare ciò che si cerca bisogna aver chiari la strategia e gli eventuali strumenti che si impiegheranno per raggiungere l'oggetto della propria ricerca (un esempio molto interessante è il gioco Set, si veda il §3.3.5); dall'altra si può trovare anche qualcosa che non si cercava e questa scoperta può illuminare il cammino della ricerca iniziale oppure può costituire l'occasione per intraprendere una nuova sfida, un nuovo gioco, un nuovo problema risolto o da risolvere.

Chi ha trovato un fungo, cerca tutt'intorno per scoprirne degli altri: è strettamente collegato con il proverbio precedente. La ricerca non finisce mai, come quando si è trovato qualcosa di prezioso come un fungo in un bosco e la sua scoperta invita il cacciatore di funghi a cercarne altri nelle immediate vicinanze, per riempire la propria cesta! In un gioco accade spesso, con un altro proverbio si potrebbe dire che «l'appetito vien mangiando», ma nel proverbio sopra citato c'è di più, si suggerisce un metodo d'indagine, un modus operandi affine a quello della ricerca matematica vera, che va conservato nell'attività generale di fare matematica a scuola e non.

Un bel gioco non si esaurisce mai: il riferimento non è alla durata o al tempo di gioco come nel caso del celebre proverbio «un bel gioco dura poco». Si tratta qui di ritornare all'oro luccicante dell'inizio: se il luccichio permane, si è di fronte a un gioco la cui bellezza non viene scalfita nel tempo. Ma c'è di più: un gioco bello dal punto di vista didattico porta con sé talmente tante piste di lavoro che non rimane mai lo stesso. Naturalmente va specificato che ci sono giochi matematici e problemi ricreativi che maggiormente si prestano a questo, ma fondamentalmente in tutti è possibile riconoscere questa "inesauribilità" che assume diverse forme: in alcuni può corrispondere al fatto che ogni partita è diversa anche se le regole rimangono le stesse; in altri può essere origine di nuovi giochi o problemi; in altri ancora può essere qualcosa di analogo a quel che accade con certi libri o film che non si smette mai di leggere o vedere, nonostante se ne conoscano le battute a memoria.

Fare e disfare, è tutto un lavorare: questo proverbio viene in genere interpretato secondo l'accezione negativa di un lavoro che non finisce mai, perché viene continuamente disfatto, corretto e rifatto. In questo contesto si collega all'idea di variare i tentativi e di modificare le strategie impiegate perché il lavoro risulti più fruttuoso, sia dal punto di vista della comprensione del gioco o del problema ricreativo affrontato, sia dal punto di vista della vittoria o della risoluzione del problema.

L'importante è partecipare: non c'è bisogno di spiegarlo, ma senza dubbio non è scontato che tutti partecipino e che si sentano coinvolti: anche se il gioco è bello è necessario che il docente si impegni a rendere l'esperienza coinvolgente, divertente e «ricreativa» per tutti. Spesso prevale l'interesse di pochi o soprattutto di quelli che trovano le soluzioni, mentre molti rischiano di sentirsi frustrati se non riescono e alcuni addirittura gettano la spugna. Così puntare sulla partecipazione vuol dire che, ove risultasse necessario, l'insegnante deve cercare di accompagnare gli studenti nel lavoro, sia offrendo personalmente il proprio aiuto valorizzando i passi intrapresi e fornendo indicazioni e suggerimenti per procedere nel cammino, sia favorendo lavori di confronto e discussione tra gli alunni in relazione alle strategie impiegate e alle soluzioni individuate.

A ogni uccello il suo canto: la partecipazione di tutti è importante quanto la valorizzazione del tentativo personale di ciascuno, secondo le proprie caratteristiche uniche e irripetibili. Si gioca scoprendo la strategia di Luca o di Giovanni, la soluzione di Elena o di Lucia, senza mai dimenticare che nella dimensione ricreativa ciascuno riscopre il valore della propria personale strada, trovando spesso degli aspetti di sé che prima non conosceva e che potranno entrare di diritto nel proprio modo di rapportarsi con la matematica.

L'unione fa la forza: un gioco da solo può essere bello, ma didatticamente lo è di più se condiviso con altri. In questo senso si suggerisce di lavorare in piccoli gruppi o squadre che giocano unite verso un comune obiettivo. La forza che viene fuori da un gioco di squadra non riguarda solamente un'eventuale episodica vittoria, ma la ricchezza di un confronto, dove ciascuno offre il proprio contributo e ogni idea personale è accolta come risorsa per tutti. Trovare una soluzione o una strategia vincente utile per la squadra lascia il segno più di una soddisfazione individuale. Per l'insegnante si crea così un clima di lavoro costruttivo, che favorisce il fare matematica anche in altri contenuti e modalità.

Lo scopo del gioco non è mai il vero scopo: si potrebbe dire che lo scopo è perseguire tutti gli atteggiamenti presentati nella Tavola 2.11 e argomentati sopra. Se però si volesse introdurre un motivo particolare ulteriore per un approccio alla matematica attraverso il gioco, allora potrebbe essere sinteticamente espresso da quest'affermazione che è stata alla base della sperimentazione di cui si parlerà nella parte II: «la matematica non riguarda solamente qualcosa che ti viene spiegato da qualcun altro, ma anche e soprattutto qualcosa che richiede di essere giocato e scoperto in prima persona».

Chi ha paura dei programmi?

Per qualcuno potrà essere ancora viva la domanda sull'adeguatezza di un approccio pedagogico attraverso il gioco ai contenuti che oggi si considerano condivisi a livello internazionale nella fascia di età dagli 11 ai 15 anni. In particolare, potrebbero sorgere questioni specifiche: «come proporre le equazioni?», «come collegare il teorema di Pitagora?», «come lavorare su questo che non mi piace o su quello che è sempre così difficile?» In sintesi: *in che modo quesiti ricreativi e giochi matematici sono d'aiuto al lavoro sul programma che non si ha mai tempo di portare a termine?*

Il progetto Con-corso Matematica per tutti è stato condotto proprio in quest'ottica. Si ritornerà quindi su questa questione in conclusione della tesi. Per ora, si conclude questa prima parte riportando una testimonianza di Martin Gardner, insieme biografica e intellettuale, contenuta nel suo ultimo intervento sulle colonne dello «Scientific American» nel 1998, dove oltre a un aneddoto, propone un esempio preciso della possibilità di affrontare i temi "seri" (la divisibilità, un tema che segna il passaggio dalle scuole primarie a quelle secondarie):

> The monthly magazine published by the National Council of Teachers of Mathematics, «Mathematics Teacher», often carries articles on recreational topics. Most teachers, however, continue to ignore such material. For 40 years I have done my best to convince educators that recreational math should be incorporated into the standard curriculum. It should be regularly introduced as a way to interest young students in the wonders of mathematics. So far, though, movement in this direction has been glacial.

I have often told a story from my own high school years that illustrates the dilemma. One day during math study period, after I'd finished my regular assignment, I took out a fresh sheet of paper and tried to solve a problem that had intrigued me: whether the first player in a game of ticktacktoe can always win, given the right strategy. When my teacher saw me scribbling, she snatched the sheet away from me and said, "Mr. Gardner, when you're in my class I expect you to work on mathematics and nothing else."

The ticktacktoe problem would make a wonderful classroom exercise. It is a superb way to introduce students to combinatorial mathematics, game theory, symmetry and probability. Moreover, the game is part of every student's experience: Who has not, as a child, played ticktacktoe? Yet I know few mathematics teachers who have included such games in their lessons.

According to the 1997 yearbook of the mathematics teachers' council, the latest trend in math education is called "the new new math" to distinguish it from "the new math," which flopped so disastrously several decades ago. The newest teaching system involves dividing classes into small groups of students and instructing the groups to solve problems through cooperative reasoning. "Interactive learning," as it is called, is substituted for lecturing. Although there are some positive aspects of the new new math, I was struck by the fact that the yearbook had nothing to say about the value of recreational mathematics, which lends itself so well to cooperative problem solving.

Let me propose to teachers the following experiment. Ask each group of students to think of any three-digit number—let's call it ABC. Then ask the students to enter the sequence of digits twice into their calculators, forming the number ABCABC. For example, if the students thought of the number 237, they'd punch in the number 237237. Tell the students that you have the psychic power to predict that if they divide ABCABC by 13 there will be no remainder. This will prove to be true. Now ask them to divide the result by 11. Again, there will be no remainder. Finally, ask them to divide by 7. Lo and behold, the original number ABC is now in the calculator's readout. The secret to the trick is simple: $ABCABC = ABC \cdot 1001 = ABC \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. (Like every other integer, 1,001 can be factored into a unique set of prime numbers.) I know of no better introduction to number theory and the properties of primes than asking students to explain why this trick always works. [Gardner 1998, pp. 68, 70]

Parte II - «Matematica per tutti»: un percorso per trasformare la matematica a scuola attraverso il gioco

Introduzione alla parte II

In questa seconda parte si presenta una sperimentazione didattica ispirata all'approccio pedagogico alle matematiche elementari che è stato descritto nel §2.3.

Si tratta di una sperimentazione realizzata su due piani, in quanto riguarda sia studenti di 11-15 anni (dalla secondaria di primo grado al primo anno della secondaria di secondo grado) sia i loro insegnanti. Per quanto riguarda gli allievi, la sperimentazione era incentrata sull'introduzione dell'approccio pedagogico attraverso il gioco in una parte delle loro lezioni di matematica a scuola; per quanto riguarda i loro insegnanti, la sperimentazione era incentrata sulla disposizione verso il cambiamento, sulla formazione ad hoc e sull'impatto sulla prassi e sui punti di vista, riguardo l'introduzione di un tale approccio nelle loro classi.

La sperimentazione fa parte di un progetto più ampio[124] condotto su scala nazionale, in un arco di tempo di tre anni scolastici (precisamente 2018-19, 2019-20 e 2020-21) e ha coinvolto in totale circa 450 classi (le classi sono conteggiate più volte se hanno partecipato in più di un anno scolastico) di scuola secondaria di primo grado (389) e del primo anno della scuola secondaria di secondo grado (54 di cui 51 nei primi due anni perché nel terzo anno, a causa della pandemia, non è stato possibile proporlo[125]).

Le classi partecipanti provenivano dal territorio nazionale italiano (sulla base delle adesioni spontanee seguite a una campagna di diffusione) e appartenevano alle tre classi della scuola secondaria di primo grado pubblica unica (statale e paritaria) e al primo anno della scuola secondaria di secondo grado (licei e istituti tecnici e professionali). Per ogni anno scolastico le attività con le classi coinvolgevano indicativamente i mesi da novembre a maggio.

La sperimentazione era circoscritta a tempi limitati predisposti – a discrezione dell'insegnante – all'interno delle ore disponibili nell'orario scolastico per le lezioni di matematica. Durante quei segmenti, agli allievi sono stati proposti una famiglia di giochi da tavola insieme a una serie di quesiti o problemi ricreativi riferiti ai micro-universi dei giochi scelti. Le attività con i giochi e/o con i quesiti erano inserite nella didattica ordinaria in modi scelti sempre dal singolo insegnante. Per gli alunni delle classi c'era anche la possibilità di partecipare per squadre (gruppi di 3 o 4 studenti) a una competizione nazionale dal titolo "Matematica per tutti": partecipazione quindi non individuale ma collettiva come gruppo, includendo tutti gli alunni, anche quelli con certificazioni DSA o quelli cui era riconosciuto il sostegno. Per gli insegnanti si trattava di guidare la partecipazione al concorso della propria classe e di partecipare a un corso di formazione: anche da qui è nato il gioco di parole *Con-corso.*

124 Sono stati coinvolti insegnanti e studenti anche di scuola primaria (348 classi) e del secondo anno della scuola secondaria di secondo grado (25 classi).
125 Ha fatto eccezione una scuola di Rovereto (TN) che ha voluto comunque partecipare con tre classi.

La sperimentazione è stata condotta secondo la metodologia del DBR (Designed Based Research). Nel capitolo 3 viene descritta la fase di progettazione dell'attività. Nel primo paragrafo si esamina la fase di ideazione; nel secondo paragrafo si descrive la struttura del concorso dal punto di vista dei tempi e dell'organizzazione; nel terzo paragrafo vengono presi in esame i giochi da tavola coinvolti; nel quarto paragrafo vengono discusse le idee guida della sperimentazione e si presentano alcuni esempi scelti della batteria di quesiti, problemi e sfide proposti considerando il gioco o il microuniverso ricreativo di riferimento.

L'analisi della sperimentazione è stata condotta secondo il metodo qualitativo ispirato ai suggerimenti di Max van Manen, studioso canadese di origine olandese specializzato in metodi di ricerca fenomenologica e pedagogia. Nel capitolo 4 viene presentata l'analisi dell'applicazione sul campo, corredata da una descrizione dell'evoluzione del Con-corso nelle tre edizioni.

I giochi da tavola utilizzati sono prodotti dall'azienda CreativaMente, di Concorezzo (MB), che ha contribuito alla logistica per quanto riguarda la distribuzione dei giochi alle scuole e agli insegnanti. Inoltre, la diffusione dell'iniziativa, la piattaforma di adesione e comunicazione con le scuole, la piattaforma di formazione per i docenti delle classi, la realizzazione dei quesiti, delle prove di selezione locale, delle fasi finali[126] sono state realizzate in collaborazione con l'Associazione ToKalon (Roma), ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale docente. La fase finale della prima edizione, nel 2019, è stata realizzata in partnership con Cinecittà World (Roma), con il patrocinio dell'Università degli studi di Roma Tre, di Roma Capitale e della Regione Lazio.

Per la progettazione (design) e realizzazione di questa sperimentazione ho coordinato un gruppo di docenti[127] delle scuole secondarie, laureati in Matematica, appartenenti alla Associazione ToKalon.

Considerazioni metodologiche

La ricerca-azione è una tendenza e una metodologia di largo corso nella ricerca educativa a cavallo del 2000 volta ad aumentare l'impatto e il trasferimento dei risultati della ricerca pedagogica e didattica a contesti educativi reali, a ottenere miglioramenti pratici a partire dalle ricerche teoriche nelle scienze dell'educazione. In anni recenti si è sviluppata negli Stati Uniti una metodologia che spinge ulteriormente

[126] La fase finale della prima edizione è l'unica che si è svolta in presenza a Roma presso il parco a tema Cinecittà World nel 2019. A causa della pandemia la fase finale è stata annullata nella seconda edizione del 2020 ed è stata realizzata a distanza nella terza edizione del 2021.

[127] I membri del Comitato didattico sono cambiati nel corso dei tre anni scolastici. Si riportano i nomi dei docenti di scuola secondaria di primo e secondo grado che sono stati presenti nel corso di tutte e tre le edizioni: Maria Cristina Migliucci, Daniele Scopetti, Giovanni Casa, Ivan Prado Longhi, Sara Rutigliano, Luca Fortunati, Grazia Cotroni, Matteo Molinari, Stefania Galizia, Michele d'Errico, Riccardo Gianni, Tiziano Raponi. Come detto, la sperimentazione ha riguardato anche la scuola primaria, che non è oggetto di questa tesi, ma poiché gran parte del lavoro è stato condiviso con i colleghi della primaria si riportano anche i nomi dei colleghi di scuola primaria che hanno sostenuto la realizzazione di questo progetto: Anna Mazzitelli, Giovanna Mora, Cecilia Sartini, Francesca Calabrese.

in una direzione "ingegneristica" in campo educativo, la cosiddetta DBR (Designed Based Research), che cerca di trasferire l'idea moderna di design in campo tecnico alla realtà scolastica; è stata in particolare applicata alla didattica delle scienze, nell'istruzione primaria e secondaria e in relazione all'uso delle nuove tecnologie (Anderson, Shattuck 2012). Action-research e DBR esprimono il desiderio degli studiosi di agire sulla realtà, sostenuto forse dalla mancanza di una connessione tra la ricerca educativa condotta da università, fondazioni e istituti di ricerca e la vita reale e quotidiana delle scuole: è spesso assente un collegamento fra la complessità dei contesti educativi reali e i casi di studio o i piccoli esperimenti e test condotti in contesti di variabilità limitata da condizioni sperimentali ad hoc. La separazione fra mondo della ricerca educativa e mondo degli insegnanti contrasta con le idee del fondatore della pedagogia sperimentale Wilhelm August Lay (1862-1926), che nel 1909 scriveva «ogni insegnante deve essere un pedagogista sperimentale». Il suo pensiero è descritto così da Costa (1980):

> Se le problematiche pedagogiche nascono in situazioni educative reali, anche i procedimenti pedagogici sperimentali non devono riprodurre situazioni in vitro, ma devono avvenire nel contesto delle situazioni scolastiche, con tutto il carico di interazioni sociali che esse comportano. «Gli esperimenti didattici e pedagogici, scrive Lay, debbono avere il più possibile il carattere dell'insegnamento stesso, e questo deve accadere in modo che tutte le condizioni che accompagnano l'insegnamento, e ne influenzano il risultato finale, vengano tenute in considerazione».

Il DBR in effetti, non parte da una metafora tecnologica, ma intende nelle sue origini quanto meno la parola design in senso proprio, in parte per distaccarsi dalla psicologia sperimentale. Nel 1992 Allan Collins, appartenente alla compagnia americana Bolt, Beranek & Newman Inc (dal 1995 Rytheon BBN) di Boston, pubblicò nel volume «New Directions in Educational Technology» un contributo intitolato *Toward a design science of education*. La sua azienda (fondata nel 1953 da due professori di fisica e di ingegneria di telecomunicazioni del MIT di Boston), attiva nelle consulenze relative a grandi progetti ingegneristici, aveva avviato una collaborazione con il Center for Technology in Education appena fondato dal Bank Street College, un noto istituto educativo di New York. Collins scriveva:

> We have had many technologies introduced in classrooms all over the world, but these innovations have provided remarkably little systematic knowledge or accumulated wisdom to guide the development of future innovations.[...] A major goal of the Center is to sythesize research on technological innovation, to develop a methodology for carrying out design experiments, to study different ways of using technology in classrooms and schools, and to begin to construct a systematic science o fhow to design educational environments so that new technologies can be introduced successfully.
>
> [...] But it cannot be an analytic science like physics or psychology; rather it must be a design science more like aeronautics or artificial intelligence. For example, in aeronautics the goal is to elucidate how different designs contribute to lift, drag, manouvrability, etc... Similarly, a desing science of education must determine how different designs of learning environments contribute to learning, cooperation, motivations, etc. [Collins 2002, p. 15]

Queste idee furono riprese da Ann L. Brown (docente presso l'University of California-Berkeley) nello stesso anno in un articolo citato nell'introduzione (Brown 1992) e che è considerato l'inizio della metodologia DBR. Il trasferimento del punto di vista dell'ingegneria fortemente pragmatico senza dubbio va incontro a molte difficoltà di chiarire aspetti umani ben lontani dalla "manovrabilità", potenza o altro di una macchina o dispositivo tecnico. Nel contempo, in Collins e Brown c'è la spinta a confrontarsi con contesti reali complessi o "sinergetici", come li chiama Brown, dove aspetti come la formazione degli insegnanti, la selezione dei contenuti, la valutazione, non possono essere trattati separatamente.

Si riconosce in questo approccio una parte delle motivazioni e delle costatazioni che sono alle origini del progetto *Con-corso Matematica per tutti*, seppure non se ne condivida in pieno la visione ingegneristica radicale. Tuttavia, molti aspetti del metodo DBR sono presenti in questa proposta: il suo carattere iterativo (tre tornate in cui si riesamina e si ri-orienta la progettazione) e una ambizione teorica, nel senso che il progetto si collega all'interno di una proposta teorica di ampio respiro:

> the design is conceived not just to meet local needs, but to advance a theoretical agenda, to uncover, explore, and confirm theoretical relationships [Barab, Squire 2004, p. 5)

All'interno di questo impianto sperimentale, nella sua fase di realizzazione è stata *osservata* – attraverso il metodo qualitativo in educazione secondo l'approccio fenomenologico proposto da Max Van Manen – l'esperienza vissuta delle classi, dei loro insegnanti e degli organizzatori stessi, coinvolti in un grande impianto in rete, con un intrico di comunicazioni interpersonali, in parte accessibili agli organizzatori (principalmente con gli insegnanti, ma anche con le classi e con i singoli alunni). L'osservazione da vicino è stata condotta attraverso i seguenti canali:

- comunicazioni attraverso la piattaforma informatica, i video e i materiali, e i riscontri arrivati per messaggio (posta elettronica, WhatsApp), sotto forma di disegni, foto o videoclip dei lavori realizzati in classe, oppure oralmente, telefonicamente, negli incontri in presenza e a distanza
- incontri periodici degli organizzatori per analizzare, riferire e condividere
- note personali del sottoscritto sull'intero dispositivo proposto (formazioni docenti, laboratori studenti, dialoghi dal vivo, mail, messaggi, conversazioni telefoniche), alla luce della posizione privilegiata di organizzatore e osservatore dei tanti aspetti del fenomeno
- raccolta e organizzazione di dati numerici sulla partecipazione e la distribuzione geografica dei partecipanti

Gli aneddoti sono stati al centro di molte di queste comunicazioni e analisi (Van Manen 1989).

Inoltre, è stato predisposto il seguente materiale (*raw data*) per integrare l'osservazione:

1. un questionario sintetico di quattro domande a risposta aperta («intervista strutturata», (Tavola I. 1) inviato nel mese di giugno 2020 al termine della terza edizione distribuito a 47 insegnanti scelti per aree geografiche, che avevano partecipato almeno a una delle tre edizioni. Hanno

risposto in 45 (quasi il 96%) docenti provenienti da 15 regioni diverse: 32 docenti di scuola secondaria di primo grado e 13 di scuola secondaria di secondo grado

2. interviste «conversazionali in profondità» ma «semistrutturate» (con una scaletta)[128] a:
    - organizzatori
    - «osservatori privilegiati»

Alcune interviste sono state videoregistrate, altre solamente audioregistrate e trascritte (Appendice G.2).

Le persone scelte per queste interviste sono state:

- i due organizzatori principali, ovvero i docenti Maria Cristina Migliucci (scuola secondaria di primo grado) e Daniele Scopetti (scuola secondaria di secondo grado), in rappresentanza dei due livelli scolastici oggetto di questa ricerca;
- altri «osservatori privilegiati», che in modo diverso si sono confrontati con il Con-corso; più precisamente sono stati intervistati nei mesi di settembre e ottobre 2021:
    - insegnanti partecipanti: Giovanni Casa e Gaia Naponiello, due docenti di scuola secondaria di primo grado, che hanno partecipato rispettivamente a tutte e tre le edizioni e solo alla prima. Entrambi i docenti sono già dottori di ricerca e hanno condotto corsi di didattica della Fisica e della Chimica presso il Dipartimento di Scienze della Formazione dell'Università degli studi di Roma Tre, dove anche il sottoscritto ha condotto il corso di Istituzioni di matematica del primo anno nell'a.a. 2019/20
    - Paola Magrone, una docente universitaria, che ha conosciuto Matematica per tutti attraverso il progetto Erasmus + ANFoMAM menzionato per l'ambito Geometria e per i giochi *Polyminix* e *La Boca* e fa parte del comitato didattico-scientifico del Con-corso dall'a.s. 2021/22
    - Emanuele Pessi, più volte menzionato in questa tesi, ideatore dei giochi e amministratore delegato dell'azienda CreativaMente
    - Fulvia Subania, la videomaker che ha realizzato le prime clip di promozione del Con-corso e le riprese e il montaggio dei primi video sui giochi e delle prime videolezioni relative ai diversi ambiti
    - Elena Gil Clemente, insegnante di Matematica alla scuola superiore a Saragozza, presidente e fondatrice dell'associazione SESDODWN (Sociedad de Estudios sobre el Síndrome de Down) che si occupa dell'apprendimento dei bambini e dei ragazzi con trisomia 21 o sindrome di Down. La sua associazione ha fatto parte del progetto Erasmus + ANFoMAM, attraverso il quale ha conosciuto i giochi geometrici di *Matematica per tutti*
    - Paola Pompilio, docente di scuola primaria che ha collaborato in passato nelle formazioni docenti dell'associazione ToKalon e che racconta di un'esperienza diversa con i giochi matematici

[128] «Conversazionali» in quanto si sono svolte attraverso una conversazione, «in profondità» perché sono stati indagati elementi dell'esperienza dell'intervistato non collegati direttamente con la ricerca ma utili a contestualizzare le risposte (si pensi a domande sull'esperienza di giocatore degli intervistati, indipendentemente dal rapporto con la didattica e con la matematica) e «semistrutturate» in quanto c'è una traccia costruita dall'intervistatore attraverso un lavoro di progettazione iniziale con domande studiate, utili a suscitare i discorsi attesi e domande inventate al momento, come conseguenza di sollecitazioni durante il discorso.

Si osservi che non è stato predisposta alcuna prova di valutazione in qualsiasi forma sul rendimento degli studenti e il loro apprendimento. L'intero dispositivo era basato sull'azione autonoma, coordinata e accompagnata, degli insegnanti delle classi che hanno liberamente aderito; ci si è affidati alla valutazione scolastica corrente degli insegnanti, e quindi questi dati ci sono arrivati in modo aggregato ed elaborato dagli insegnanti stessi. D'altra parte, anche la quotidianità della classe è stata esclusa dall'osservazione da vicino per la struttura stessa del dispositivo.

Si è preferito concentrarsi su quello che è accaduto negli adulti che si sono confrontati con questa proposta. Il dispositivo è, infatti, concepito avendo come destinatari primordiali gli insegnanti e soltanto attraverso di loro arriva agli alunni: non esiste una proposta diretta agli studenti che non passi da coloro che vedono in classe o a distanza tutte le mattine o quasi per nove mesi l'anno.

Non solo, il dispositivo è stato progettato in relazione a un approccio pedagogico attraverso il gioco, ed era quindi questo ciò che si intendeva osservare e valutare. Al centro dell'intera proposta sperimentale era il cambiamento in chi ha aderito al *Con-corso Matematica per tutti*: se è avvenuto, quando è avvenuto, come è avvenuto e in cosa è consistito, come si è espresso nella pratica docente e nell'ambiente in classe.

1. Perché hai scelto Matematica per tutti? E perché continueresti a scegliere di partecipare – e far partecipare i tuoi studenti – a Matematica per tutti?
2. Scrivi qui sotto la tua personale riflessione sull'esperienza con la proposta Matematica per tutti, tenendo conto dei punti suggeriti di seguito: a) sono stati coinvolti gli alunni con disabilità; b) gli alunni con bisogni educativi speciali (BES) hanno raggiunto risultati inaspettati; c) è stato possibile modificare la programmazione in un'ottica verticale e trasversale; d) è stata utile per trattare uno o più contenuti della tua programmazione; e) è migliorata la comunicazione fra docenti e alunni; f) gli stessi materiali/giochi sono stati usati in anni diversi, aumentando gradualmente la difficoltà e allargando l'orizzonte di conoscenza e di applicabilità; g) è stato possibile valorizzare l'errore e il tentativo di ciascuno studente; h) è cresciuta la cooperazione e il confronto delle strategie risolutive (la "conversazione matematica") tra gli alunni; i) è cresciuta la cooperazione e il confronto tra i docenti; j) è cambiato/è stato confermato il motivo per cui vale la pena utilizzare il gioco e l'approccio ricreativo nella didattica.
3. Se possibile e se non l'hai già raccontato rispondendo alla domanda precedente, riporta un episodio/aneddoto significativo per te e/o per i tuoi studenti relativamente all'esperienza di Matematica per tutti.
4. Tenendo presente che il fattore tempo costituisce quasi sempre una criticità, indica al più altre TRE DIFFICOLTA' che hai riscontrato nel proporre l'approccio ricreativo.
Ulteriori osservazioni

Tavola I. 1 – Il questionario somministrato ad alcuni docenti partecipanti a una o più edizioni del Con-corso

Capitolo 3 La progettazione

In questo capitolo si discute la fase di ideazione della sperimentazione didattica Con-corso "Matematica per tutti" (§3.1), si descrive l'iniziativa nella sua concezione dinamica e nella corrispondente struttura organizzativa (§3.2) e si discutono le tipologie di attività rivolte agli insegnanti e alle classi e le idee-guida nella creazione di tali attività, concludendo con la presentazione di alcuni esempi (§3.4). I giochi da tavola di CreativaMente utilizzati nel Concorso vengono descritti nel dettaglio nel §3.3.

3.1 Le origini della proposta Con-corso Matematica per tutti

Oltre al quadro concettuale sull'approccio pedagogico attraverso il gioco alla matematica a scuola presentato nella prima parte della tesi, il Con-corso Matematica per tutti come sperimentazione didattica ha avuto origine da una serie di circostanze e percorsi culturali incrociati, discussi in questo paragrafo, che hanno portato a delineare alcune idee guida per la creazione dei singoli quesiti e famiglie di quesiti, ma anche la struttura della proposta articolata sui due piani alunni-insegnanti, in chiave collaborativa e anche moderatamente competitiva e rivolta al tempo di scuola. Nel seguito si descrivono tre aspetti fondamentali: l'esperienza della Associazione ToKalon, in collaborazione con l'Università Roma Tre, nella formazione di docenti di matematica e sulla matematica nel sostegno; l'esperienza in contesti didattici con forte svantaggio socio-economico e con elevato rischio di dispersione scolastica, che ha condotto chi scrive ad avvicinarsi allo studio della matematica ricreativa e alla proposta dei rompicapo in classe; e, collegata ad entrambe le precedenti esperienze, la nascita di una partnership dell'Associazione ToKalon con l'azienda produttrice di giochi didattici CreativaMente.

3.1.1 L'esperienza di formazione docenti

La conduzione di una formazione docenti è spesso un'attività riservata a chi ha molti anni di esperienza sul campo e/o di ricerca e studio su contenuti e metodi della didattica delle discipline scolastiche. Conoscere la matematica ed essere consapevoli della varietà di metodi e strumenti che esistono per insegnarla sono sicuramente componenti essenziali di una formazione docenti, ma chi ha avuto l'opportunità di condurre un'iniziativa formativa ha scoperto presto che conoscenza e consapevolezza dei metodi e degli strumenti didattici spesso non sono sufficienti *per muovere nell'intimo*, perché un insegnante decida di mettere in discussione anche solo una piccola parte del suo modo di far didattica, di vedere la matematica, di guardare i suoi studenti. Perché tutto questo accada anche in minima parte, è essenziale anzitutto creare un clima di fiducia[129], lo stesso che richiede l'attività didattica in classe con gli

[129] Su questo tema si rimanda alla comunicazione tenutasi il 2 dicembre 2016 presso l'Università di Milano Bicocca, in occasione del "Convegno Didattica e saperi disciplinari", organizzato dalla SIRD (Società Italiana di Ricerca didattica): *Aspetti di motivazione e di consapevolezza nel potenziamento di matematica e didattica della matematica per formazione primaria, attraverso gli strumenti online di studio autonomo* [con Ana Millán Gasca]. La questione della fiducia è stata alla

studenti: se uno studente può avvicinarsi alla matematica con la serenità della fiducia nei confronti dell'insegnante, allora si lancerà per svolgere le attività che gli vengono proposte senza timore di commettere errori perché, in un clima di fiducia, l'errore, ciò che non va come previsto, serve da stimolo per provare nuove possibilità e continuare a fare ricerca.

D'altra parte, il termine "errore" (dal lat. *error -oris*, der. di *errare*) ha la stessa radice del verbo "errare", che significa anche vagare, "andare in giro senza una particolare destinazione". Errare, girare attorno al problema senza trovare una soluzione o trovandone una sbagliata, errata, appunto. Ma se si pensa che errando si possono visitare luoghi mai visti, fare nuove conoscenze e fare esperienze impreviste e gradevoli, l'accezione negativa della parola "errore" viene persa alla luce delle nuove possibilità e delle nuove strade aperte dall'averlo commesso.

È questo clima di fiducia che si è voluto "riprodurre" nei laboratori di formazione degli insegnanti realizzati da docenti in servizio in collaborazione con la Prof.ssa Ana Millán Gasca presso il Dipartimento di Formazione dell'Università degli studi Roma Tre e poi in alcune scuole italiane[130]. L'esperienza all'interno del Laboratorio di Matematica per la Formazione Primaria ha portato anche allo sviluppo di un'offerta di formazione e innovazione didattica rivolta ai docenti della scuola dell'infanzia, della scuola primaria, della scuola secondaria di primo e secondo grado nell'ambito dell'Associazione ToKalon, dall'a.s. 2019/2020 ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale docente.

Tutte le attività proposte sono state progettate partendo dal presupposto che il formatore ha fiducia nella capacità dei partecipanti di lavorare e dialogare su questioni matematiche, ma naturalmente è fondamentale anche il viceversa, ovvero che i partecipanti si fidino del formatore. Se le sfide che si propongono sono troppo lontane da ciò su cui si sta effettivamente lavorando in un'aula scolastica, i partecipanti possono sentire che la loro capacità matematica viene "misurata" e l'attività richiesta non risulta occasione per migliorare il proprio insegnamento. In un contesto come quello in cui viviamo, dove sono cresciute a vista d'occhio le proposte di formazione a distanza (webinar, videolezioni sincrone e asincrone), non c'è dubbio sulla crucialità della questione della fiducia: per alcune proposte formative si è scelto di rimandare l'inizio e attendere la possibilità di svolgere almeno le prime attività in presenza, proprio perché si potesse lavorare all'interno di questo clima di fiducia.

base anche del progetto europeo Erasmus + ANFoMAM (*Aprender de los Niños para Enseñar a los Maestros en el Área de Matemática*) realizzato in collaborazione con l'università degli studi di Roma Tre, le università spagnole di Saragozza (Unizar) e di Navarra (UniPuNa), l'Université Bordeaux e l'associazione spagnola Sesdown (il sito ufficiale del progetto https://www.unavarra.es/anfomam). Il progetto aveva come destinatari gli insegnanti di scuola primaria in servizio e in formazione, ma molto di quanto si è proposto ha valore anche per la scuola secondaria.

130 Alle esperienze di formazione con diverse scuole italiane si è aggiunta nel 2019-20 una formazione a distanza con una scuola italiana bilingue a Bogotà in Colombia: esperienza molto particolare perché tra l'altro svoltasi proprio in concomitanza con il diffondersi della pandemia da Covid-19 sia in Italia sia in Colombia.

Molti corsi di formazione proposti dall'associazione ToKalon hanno avuto come titolo "Matematica per osservare, Matematica per ragionare", riprendendo la celebre frase del premio Nobel per la Medicina Alexis Carrel: «poca osservazione e molto ragionamento conducono all'errore. Molta osservazione e poco ragionamento conducono alla verità» (Carrel 1953, p. 27). La linea portante è una visione "umanistica" della matematica come parte della cultura, una matematica a scuola che rappresenta un'opportunità straordinaria per sviluppare il potere della ragione e per educare la capacità di osservazione: una matematica anche come porta della cultura scientifica[131].

È proprio a partire da queste esperienze di formazione che ha avuto origine l'idea di una proposta come il *Con-corso Matematica per tutti*, con lo scopo dichiarato di sfatare il pregiudizio del "pallino della matematica": **la matematica è una disciplina per tutti** (si veda il §2.3), ed è possibile trovare per ogni allieva e ogni allievo una via nella matematica, che sarà un bagaglio importante di chi diventerà matematico, scienziato, oppure per chi farà qualsiasi altro mestiere o scelta di vita.

Nella prima locandina dell'edizione 2018/2019 si legge:

> *Manthanein* significa **comprendere e apprendere**: la matematica è un insieme di idee, concetti e metodi che sono alla base della nostra conoscenza e del nostro rapporto con il mondo attraverso il calcolo e la misura. Matematica è osservare, costruire, immaginare, sperimentare, ricercare, giocare, esperire, intuire, sentire, toccare, raccontare, scoprire, cercare, provare, confrontare, risolvere, sbagliare, parlare. Matematica è tutto questo – e anche di più… – per tutti!

La proposta punta sul lavoro di squadra, sulla collaborazione e sulla condivisione della strada che separa dal traguardo. Comprende anche una competizione nazionale, chiamata *Con-corso* anziché semplicemente concorso: quel trattino che separa le parole *con* e *corso*, è nato per mettere in evidenza che mentre «gareggiare vuol dire vincere o perdere, *con-correre* vuol dire imparare e divertirsi insieme[132]».

Da una parte si vuole offrire un'opportunità per gli studenti di scoprire la dimensione esperienziale della matematica attraverso il gioco; dall'altra un'opportunità per i docenti di aggiornamento e confronto sulle metodologie didattiche. I dettagli del percorso saranno illustrati nel §3.2.

Nei corsi realizzati con l'associazione ToKalon gli insegnanti in formazione sperimentano un percorso analogo a quello che ogni giorno dovrebbero fare i loro studenti, mettendosi in gioco in prima persona, per focalizzare meglio alcune difficoltà che gli studenti sono costretti ad affrontare (linguaggio, motivazioni, smarrimento, ecc.) e per ragionare sulle pratiche motivazionali.

Si è pensato di iniziare ogni nuova avventura formativa (con docenti) o didattica (con una nuova classe di studenti di scuola secondaria) con la richiesta delle prime tre parole che associamo alla

---

131 ISRAEL G., MILLAN GASCA A., 2012, *Pensare in matematica*, Bologna: Zanichelli. Si veda anche il sito web http://online.scuola.zanichelli.it/israel/ e il sito del Laboratorio di Roma Tre "Matematica per la formazione primaria": http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/index.html.

132 Si tratta dello slogan proposto dalla seconda edizione in poi per descrivere l'esperienza del Con-corso.

matematica: tra queste è possibile inserire un nome proprio di persona (magari il docente che ce l'ha fatta amare o purtroppo odiare, il fratello, il compagno di classe…), un sostantivo o anche un aggettivo. Singolare fu una studentessa che scelse come tre parole: BRUTTA, BRUTTA e BRUTTA. Il lavoro con i docenti – come con gli studenti più grandi – non può che partire da qui, dalla (ri)costruzione di un rapporto con la matematica che passa dalle prime tre parole che associamo mentalmente a questa disciplina.

Alle parole scelte dai docenti si aggiungono poi quelle che sono considerate parole-chiave per una didattica efficace della matematica: entusiasmo, coinvolgimento e divertimento, inclusione, esperienza corporea, conversazione e argomentazione, lavoro di gruppo, rapporto con l'errore.

Tornano alla mente indubbiamente le virtù del fare matematica scelte da Francis Su, già citato nel §1.3 e nel §2.3, (si veda l'Appendice C.1, dove viene riproposto l'elenco delle virtù, insieme ai desideri umani abbinati e la pagina del sito https://www.francissu.com/flourishing-discussion, dove si trovano alcune domande per una discussione-riflessione su ciascuna virtù) che sceglie nell'ordine: esplorazione, senso, gioco, bellezza, permanenza, verità, lotta, energia, giustizia, libertà, comunità, amore (fonte e fine di tutte le altre virtù).

La prima formazione prosegue con la presentazione della *stella di Loyd*, inventata dallo scacchista e inventore di enigmi matematici Samuel Loyd[133] e mostrata in Figura 3.1.

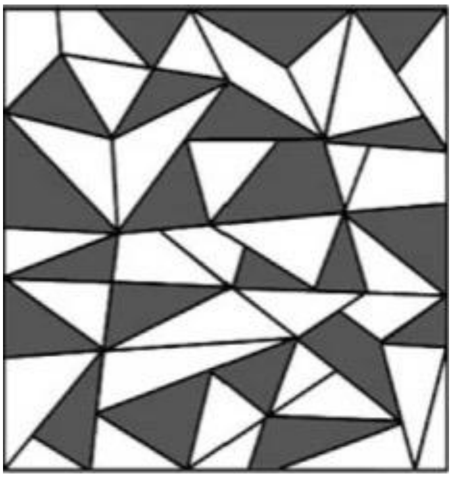


Figura 3.1 - La stella di Loyd

Si chiede di riconoscere nell'immagine una stella a cinque punte. Dopo qualche minuto di osservazione, alcuni cominciano a cercare la stella. Si chiede a questo punto di esplicitare su un foglio la strategia che è utilizzata o si sta utilizzando per cercarla. Questa attività illustra molte cose importanti, tra

[133] Loyd 1914, p. 318

cui il rapporto tra il vedere e il cercare e le diverse strategie che si possono mettere in atto per cercare qualcosa.

La stella è anche un vivido esempio di cosa voglia dire "vedere" la soluzione di un problema: una volta "vista" non la si dimentica più, e magicamente un groviglio di linee "senza senso" diventa una stella dentro un quadro di poligoni bianchi e grigi.

Dopo aver introdotto la stella si propongono altri quesiti sfidanti "rompighiaccio": *Conta i quadrati* e il *problema del tennis*.

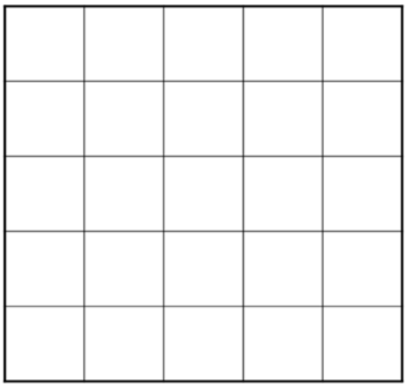


Figura 3.2 - *Conta i quadrati* di questa griglia

La scelta del quesito *Conta i quadrati* è legata alla bellezza della sua risoluzione non banale. Tutti vedono i 25 quadrati 1×1 all'interno della griglia, spesso vedono subito anche il "quadratone" 5×5 che li racchiude, ma sono meno le persone che si soffermano a osservare i numerosi altri quadrati presenti nella griglia. Succede sempre che qualcuno si soffermi prima degli altri ed esclami "Sono molti di più! Almeno 40... Dovrei contarli però..." La bellezza di questo problema è che, una volta che abbiamo compreso che i quadrati sono molti di più, possiamo trovare una strategia per calcolarli tutti che poi è generalizzabile a qualsiasi quadrato $n \times n$, anche 18×18.

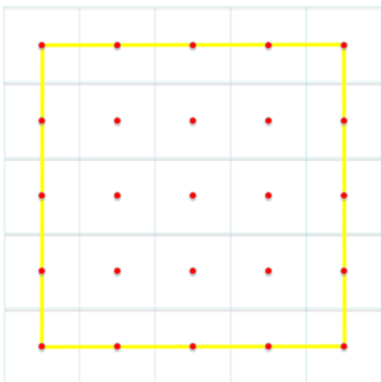


Figura 3.3 - I 25 quadrati 1×1 evidenziati con un pallino rosso al centro di ciascun quadrato

Si tratta perciò di scoprire che, oltre ai $5 \times 5 = 25$ quadrati 1×1 (rappresentati in Figura 3.3), ci sono:

$4 \times 4 = 16$ quadrati 2×2;

$3 \times 3 = 9$ quadrati 3×3;

$2 \times 2 = 4$ quadrati 4×4;

$1 \times 1 = 1$ quadrato 5×5 (il "quadratone" che in molti vedono subito dopo i 25)

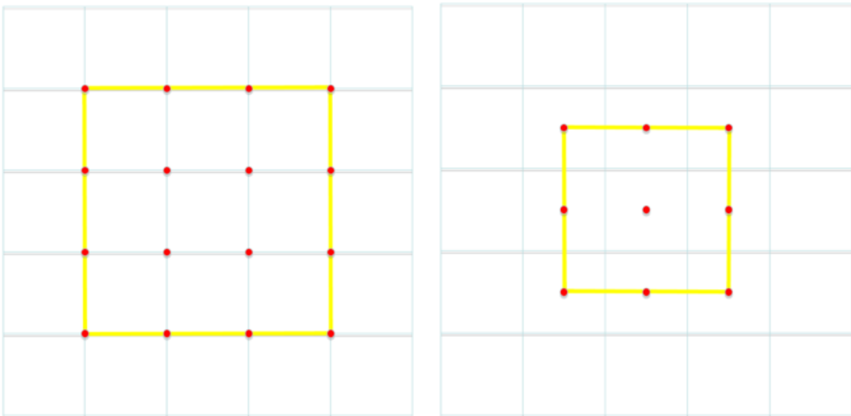


Figura 3.4 - I 16 quadrati 2×2 (a sinistra) e i 9 quadrati 3×3 (a destra) evidenziati con un pallino rosso al centro di ciascun quadrato

Figura 3.5 - I 4 quadrati 4×4 (a sinistra) e l'unico quadrato 5×5 (a destra) evidenziati con un pallino rosso al centro di ciascun quadrato

La bellezza di questa soluzione è che si tratta di sommare i primi 5 numeri quadrati per scoprire quanti sono i quadrati di questa griglia: $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$. E dunque in generale per una griglia $n \times n$ dovrò sommare i numeri quadrati da 1 a n^2. Volendo approfondire esiste anche la formula generale – da ricavare per induzione – della somma dei primi n numeri quadrati e dunque diventa assai semplice gestire griglie anche molto più grandi di quella data.

Il secondo quesito rompighiaccio è il *problema del tennis*. La scelta di questo quesito è legata al fatto che tutti quanti sappiamo risolverlo secondo un metodo, ma quando poi scopriamo la soluzione numerica che risponde alla domanda siamo portati a pensare che esista una strada più semplice e veloce di quella che abbiamo scelto noi. Il testo è il seguente:

> Al circolo del tennis si devono organizzare le partite di un torneo con 128 iscritti. Ogni partita è a eliminazione diretta, i vincenti si incontrano nuovamente in scontri diretti al secondo turno e così via fino alla finale. Quante partite si giocano in totale?
>
> Il ragionamento che viene da fare naturalmente è il seguente:
>
> Al primo turno giocano 128 giocatori in 64 partite
>
> Al secondo turno si giocano 32 partite
>
> Al terzo turno 16
>
> e così via fino alla finale sempre dividendo per 2.
>
> Il numero delle partite si trova:
>
> 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = **127**

Il problema NUOVO nasce quando scopriamo che la somma di tutte le partite è 127, ovvero esattamente $128 - 1$, una in meno rispetto al numero dei giocatori. Infatti, a ogni partita viene eliminato un giocatore, quindi il numero delle partite è uguale al numero dei giocatori che perdono un incontro, ovvero il numero di sconfitti. Poiché l'unico giocatore che non perde alcuna partita è il vincitore del torneo, le partite in tutto sono $128 - 1 = 127$.

Dopo aver rotto il ghiaccio e stupito il pubblico, si presentano e si discutono brevemente poi *i dieci comandamenti per un buon insegnante di matematica*[134] di George Polya e si chiede, infine, agli insegnanti di affrontare in prima persona semplici problemi di matematica, con un duplice scopo:

1. mettere in luce come si possono concepire e confrontare diverse strategie e quanto sia importante scoprire la propria strada. Affermava sempre George Polya: «La comprensione del problema non è sufficiente; è necessario anche desiderare di ottenere una soluzione. Non c'è alcuna probabilità di risolvere un problema, se non si vuole ardentemente conoscerne il risultato; tale ansia è per sé stessa una probabilità di successo. *Volere è potere*» (Polya 1945 tr. it. 2016, p. 216)
2. sottolineare l'importanza di trovare la propria strada anche se sbagliata. *Sbagliando s'impara* dice il famoso proverbio – ripreso anche nel §2.3 tra gli atteggiamenti fondamentali di un approccio

[134] 1. Abbi interesse per la tua materia. 2. Conosci la tua materia. 3. Cerca di leggere sul viso degli studenti; cerca di capire le loro aspettative e le loro difficoltà; mettiti al loro posto. 4. Tieni conto che il miglior modo per imparare qualsiasi cosa è di scoprirla da soli. 5. Dai ai tuoi studenti non soltanto informazioni, ma anche sapere-come, attitudini mentali, abitudine al lavoro metodico. 6. Fai loro imparare a congetturare. 7. Fai loro imparare a dimostrare. 8. Cerca quegli aspetti del problema in questione che possono essere utili per problemi futuri - cerca di mettere in evidenza lo schema generale che sta dietro la situazione concreta presente. 9. Non rivelare subito tutto il tuo segreto – fallo indovinare dagli studenti prima di dirlo - fa loro scoprire da soli quanto è possibile.
10. Suggeriscilo; non forzarlo. [Polya 1967 tr. it. 1971]

pedagogico attraverso il gioco – e si dovrebbe insegnarlo anche ai propri studenti. Piuttosto che concentrarsi solo sul risultato, è fondamentale scoprire e rischiare la varietà di strade giuste o sbagliate che potrebbero portare alla meta. Non si vuole certo affermare che andare da Roma a Milano passando da Bari sia uguale che prendere il treno diretto che passa per Firenze, ma non è detto che passare da Bari sia stato inutile: il confronto tra le diverse strade percorse, tra i diversi tempi impiegati, permette a tutti gli studenti di comprendere la bellezza del treno diretto che impiega solo 3 ore per arrivare alla meta. Chi può escludere che passando per Bari non sia possibile scoprire cose interessanti e addirittura decidere di fermarsi a Bari? È più importante, almeno all'inizio, imparare a salire sul treno piuttosto che preoccuparsi di andare nella giusta direzione: basti pensare a quanti studenti (e docenti) si fermano sulla banchina della stazione, osservano immobili i treni partire per la paura di salire sul treno-soluzione sbagliato.

Può sembrare azzardato il fatto di chiedere a un insegnante la risoluzione di un problema di matematica in prima persona o in piccoli gruppi. Ovviamente ogni provocazione ha i suoi rischi, ma questa scelta è stata ben meditata anche alla luce di una diffusa resistenza nel proporre problemi da parte dei docenti di scuola primaria, resistenza confermata durante varie attività formative. Anche in un contesto di adulti un problema agisce come un sasso gettato nello stagno: smuove le acque, introduce dinamismo dove prima era la quiete. Un problema suscita curiosità e desiderio di misurarsi in una sfida, diffidenza dinanzi a una soluzione che sembra irraggiungibile, paura di sbagliare, deludere e deludersi. Risolvere problemi, e in generale ragionare, può costare fatica, ma risulta necessario che un insegnante sia consapevole proprio di questa caratteristica della matematica affinché possa scoprirne la bellezza e tutte le virtù a essa associate, fino al punto che magari un giorno si troverà ad affermare che "insegnare matematica è una bellissima fatica[135]".

Formare insegnanti vuol dire allora lavorare sulla costruzione della fiducia, sulla risoluzione dei problemi e naturalmente su contenuti, metodi e strumenti della disciplina. Da sempre è stato riservato uno spazio all'aspetto ricreativo della matematica e all'utilizzo di giochi e rompicapo, ma l'incontro con i giochi educativi di CreativaMente ha cambiato decisamente lo spazio, il tempo e la qualità del lavoro dedicato a questi metodi e strumenti didattici in classe e dunque nella formazione, costituendo la principale innovazione della proposta Con-corso Matematica per tutti.

3.1.2 Un'esperienza in un contesto didattico con forte svantaggio socio-economico ed elevato rischio di dispersione scolastica

Per chi vuole fare il lavoro dell'insegnante, gli ultimi, gli alunni che fanno più fatica per motivi diversi, possono costituire una provocazione per fare meglio, per cercare un altro approccio, un'altra strada

[135] Slogan dell'associazione ToKalon

rispetto a quella che si era immaginata. È così che in contesti globalmente svantaggiati può essere una risorsa dedicare un po' di tempo a giocare con la matematica anche al di fuori dei contenuti in programma.

Nell'esperienza personale di chi scrive l'occasione si è manifestata nell'a.s. 2015/2016 in una prima classe di una scuola professionale della provincia di Roma, all'interno di un istituto di istruzione secondaria superiore che prevedeva anche l'indirizzo tecnico. La classe era costituita da venti studenti, di cui solo due erano in corso, entrambi con il sostegno riconosciuto, mentre tutti gli altri erano ripetenti di uno o due anni. Il sostegno era riconosciuto a uno degli allievi con un certificato in cui si diceva che la sua età mentale era paragonabile a quella di un bambino di 9 anni; mentre all'altro in quanto viveva in casa-famiglia (il padre era morto, la madre in carcere e lui era stato sfruttato per lo spaccio). Le lezioni si svolgevano dal lunedì al venerdì, 7 ore al giorno con un solo intervallo a metà mattinata. Questo gruppo classe aveva quattro ore di matematica a settimana, di cui una collocata alla settima ora e altre due consecutive nello stesso giorno. In una classe simile era difficile anche far stare gli studenti seduti sulle sedie e, in aggiunta, l'aula di lezione era collocata allo stesso piano del bar interno aperto tutto il giorno. In tali condizioni si tocca con mano la differenza profonda tra autorità e autorevolezza. L'autorità si impone e viene accettata o meno, a seconda dell'educazione ricevuta da chi si trova di fronte a essa: si pensi all'autorità del dirigente scolastico, così come a quella dell'insegnante a cui portare rispetto, rivolgersi chiedendo il permesso, ecc... Ma in situazioni simili l'autorità da sola non è sufficiente e ben presto si rischia di far la fine di un semplice "sorvegliante" dedito a fare in modo che nessuno si faccia del male o rechi dei danni sensibili agli altri compagni o alla scuola. Occorre un'autorevolezza che si conquista aspettando i tempi giusti. Questo perché non si può decidere di essere autorevoli da un momento all'altro, perché non è una decisione che dipende da noi: l'autorevolezza è una qualità che esiste quando la riconosciamo a qualcuno e quando qualcuno la riconosce a noi. Così gli studenti danno valore all'insegnante, in primo luogo se si sentono valorizzati a loro volta e, in secondo luogo, se riconoscono in lui conoscenza e competenza nella disciplina insegnata. Queste ultime non sono sempre caratteristiche mature nel docente alle prime armi, ma si tratta di essere adulti credibili agli occhi di chi guarda e alle orecchie di chi ascolta. Grazie proprio a questa credibilità, gli studenti si confrontano con i loro insegnanti, seguono le loro richieste e inizia quel percorso fondamentale di fiducia reciproca maestro-allievo che è la condizione fondamentale di un insegnamento-apprendimento della matematica in qualunque contesto didattico, a maggior ragione in uno con forte svantaggio socio-economico e con alto rischio di dispersione scolastica.

Così la sfida è cominciata utilizzando con gli studenti gli stessi materiali che venivano proposti alle insegnanti di scuola primaria nei corsi di formazione dell'Associazione ToKalon, tra cui alcuni problemi da risolvere tratti dalla gara matematica *Rally Matematico Transalpino*[136].

Successivamente è stato dato spazio a numerosi rompicapo (puzzles) della matematica ricreativa (attingendo al grande patrimonio di raccolte di cui si è parlato anche nel Capitolo 1) accogliendo la provocazione di Lucio Lombardo Radice:

> Domanda (molto seria, vi prego di credere, cari colleghi insegnanti): ma perché qualche volta, per controllare quello che i vostri allievi hanno imparato, non fate in classe un'ora di palestra di giochi intelligenti, invece di interrogare?" [Lombardo Radice 1979, p. 104]

I giochi proposti non erano sempre perfettamente inerenti ai contenuti previsti dal programma, che, d'altra parte, verteva tutto sull'algebra che pervade tutto il primo anno delle scuole superiori. L'attività veniva realizzata dividendo gli studenti in gruppi, anzi in delle vere e proprie squadre di tre o quattro elementi con un nome scelto da loro: quasi tutte le volte in cui era prevista lezione all'ultima ora, si giocava.

Le attività dei gruppi venivano valutate solo positivamente (con un voto da 7 in su) per i gruppi che lavoravano seriamente e soprattutto che risolvevano correttamente – a volte anche brillantemente – i quesiti proposti. Chi faceva poco non veniva valutato negativamente, eppure il non essere valutato positivamente era già una valutazione negativa, poiché i ragazzi comprendevano di non aver saputo approfittare dell'occasione offerta in una modalità più "leggera" della didattica ordinaria fatta di prove di verifica scritte e di interrogazioni orali. Comunque, fin da subito si è manifestato un rendimento diverso degli studenti, ed è emerso qualcosa di nuovo. Ad esempio, la squadra chiamata "I cervelloni", costituita da tre alunni tutti ripetenti per due volte il primo anno, risolveva da sola il triplo dei quesiti rispetto al resto della classe!

Organizzare un'attività diversa per ogni settimana è stata senza dubbio un'impresa complessa, ma allo stesso tempo è stata l'occasione per mettere alla prova un approccio didattico e gettare le basi per un progetto importante come il Con-corso Matematica per tutti. La totalità degli studenti della classe ha raggiunto alla fine dell'anno almeno la sufficienza in matematica e questo è accaduto passando anche da numerose gravi insufficienze principalmente nel primo periodo. Le valutazioni positive nelle attività ricreative – che costituivano un appuntamento settimanale – hanno portato diversi studenti a domandarsi se effettivamente non avessero potuto andar bene anche nella matematica "ordinaria" dei polinomi, delle

---

136 Il Rally Matematico Transalpino è un confronto fra classi, dalla terza elementare al secondo anno di scuola secondaria di secondo grado, nell'ambito della risoluzione di problemi di matematica. Nasce in Svizzera nel 1993 e si diffonde in Italia dal 1996 fino ad oggi, coinvolgendo altre nazioni come Belgio, Francia e Lussemburgo. Nel passato hanno partecipato anche Paesi come Israele e Argentina. Molto utile è il lavoro svolto sull'analisi delle strategie risolutive possibili per ogni problema proposto. Si riportano in sitografia i link ai materiali suddivisi per argomento.

espressioni algebriche, delle equazioni, e si sono messi a lavorare per provare a migliorare un rendimento in alcuni casi addirittura nullo nelle verifiche scritte e orali relative all'algebra del primo anno. A livello disciplinare è stato un successo vedere fare matematica alla classe "più temuta" della scuola, con sei sospensioni già a inizio novembre, collocata nell'aula più vicina all'ufficio di presidenza. Non è esagerato dire che si trattava di ragazzi e ragazze che faticavano a stare seduti nelle proprie sedie, ma sicuramente l'esperienza di quell'anno è stata un punto di non ritorno per chi scrive. Ci sono due episodi che più di tutti descrivono questo. Il primo riguarda un collega vicino alla pensione che un giorno al cambio dell'ora prima di entrare in quella classe esclama: «Mi farei tagliare un braccio adesso piuttosto che fare un'ora con quelli lì!». Era veramente una fatica insegnare in quella classe, non era affatto semplice riconoscerne ciò che la rendeva *bellissima*! C'è un'altra frase che chi insegna non può evitare di sentire almeno una volta l'anno da un collega (ma c'è anche chi la pronuncia in prima persona): «Comunque la prima[137] di quest'anno è peggio della prima dell'anno scorso». Il problema è chi la ripete tutti gli anni, perché può capitare pure un anno o due, ma al terzo o quarto anno consecutivo è d'obbligo una domanda su di sé e sul proprio operato. Dal punto di vista di chi scrive, da quel giorno non c'è anno scolastico che passi senza porsi la domanda «ma ho fatto tutto quello che potevo con quegli studenti, con quella classe lì?» Sicuramente la classe che si ha di fronte un anno è diversa da quella dell'anno precedente, ma questa diversità o è una sfida al proprio cambiamento[138] o è un'accusa con cui si rimprovera alla realtà di essere diversa dalla propria fantasia e la si usa come scusa per il proprio disimpegno.

Il secondo episodio riguarda uno degli ultimi giorni di scuola, per l'esattezza il 1 giugno: si tratta di un momento dell'anno scolastico in cui è veramente possibile pensare a dare spazio al gioco perché ormai i "giochi" – quelli dei voti, delle verifiche, delle interrogazioni – sono stati fatti e non c'è più nulla o quasi da spiegare. Così fu presa la decisione azzardata di portare in classe il gioco *Pytagora* nella sua prima versione con le pecorelle rappresentate sui tasselli di puzzle (Figura 3.6).

Figura 3.6 – La prima versione del gioco *Pytagora – Numbers in puzzle*, uscito nel 2003

[137] Si sostituisca pure «prima» con la classe che si vuole (seconda, terza...).
[138] Accogliendo la sfida del proprio cambiamento possono nascere esperienze inaspettate come quelle che hanno portato alla stesura di questa tesi.

Quel giorno sarebbe venuto anche il dirigente scolastico per osservare il lavoro dei docenti nel loro anno di prova (così erano chi scrive e il suo collega di sostegno) e dunque la scelta di portare un gioco era ancor più azzardata! Così si decise di dedicare solo la prima delle due ore al gioco, stravolgendo l'aula con un'isola di banchi al centro per giocare tutti intorno a un tavolo e poter costruire puzzle di uguaglianze aritmetiche anche piuttosto grandi come mostrato nella Figura 3.7.

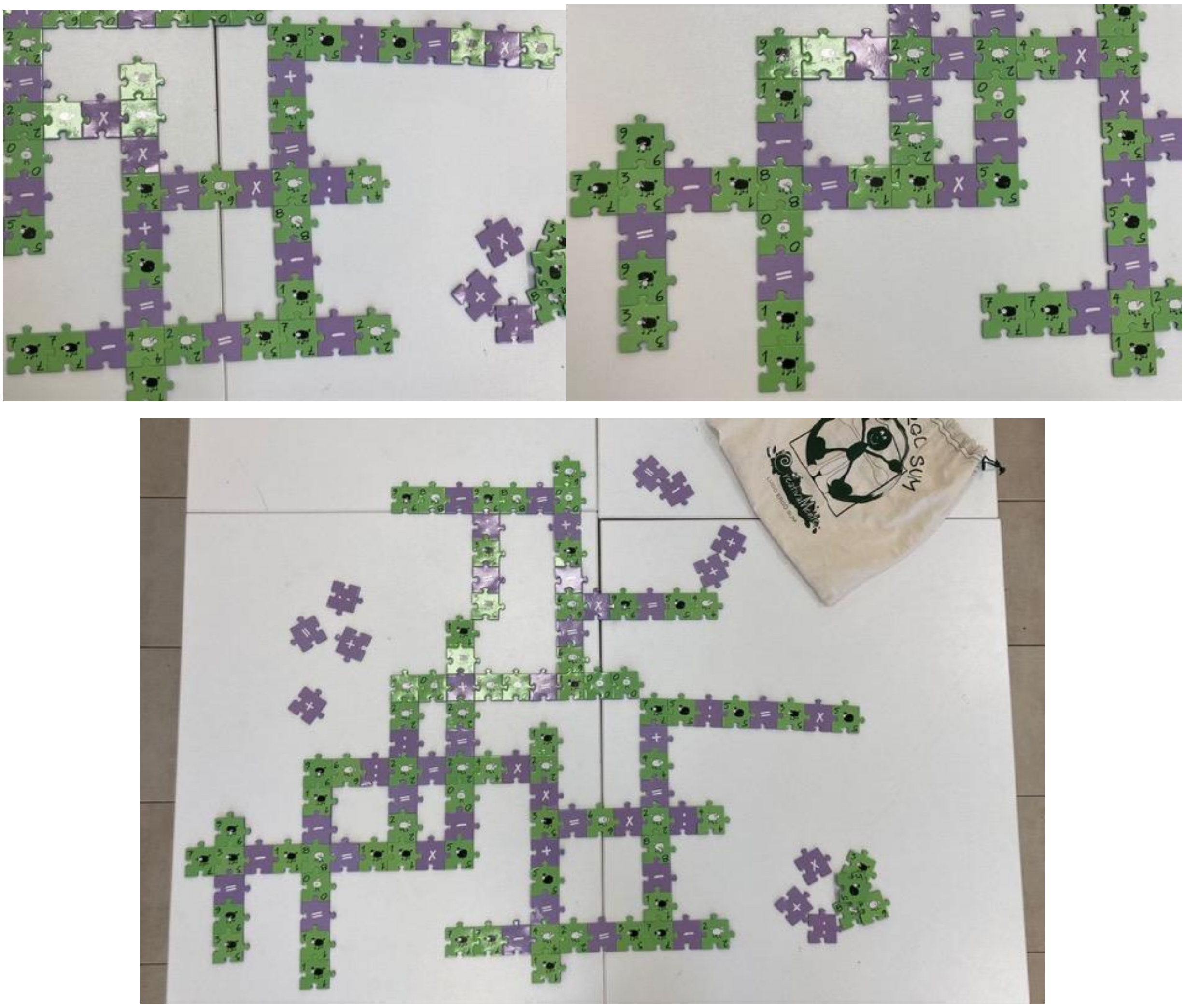


Figura 3.7 – Il tavolo da gioco (con alcuni zoom di dettaglio) della partita a *Pytagora* il 1 giugno 2016

Cinque minuti prima del cambio dell'ora gli studenti avevano messo un timer per finire la partita e mettere tutto in ordine per l'arrivo del dirigente nella seconda ora, ma stavano giocando così bene, così presi dall'attività (anche se con qualche imprecazione di troppo, che però in questo caso era un segno positivo del loro reale coinvolgimento) che alla fine, nonostante le resistenze del collega di sostegno, si decise di continuare a giocare anche all'arrivo del preside. Quel giorno è stato evidente che il gioco aveva un potenziale unico che metteva d'accordo tutti: certamente solo più avanti si sarebbe compreso in che modo sfruttarlo, ma intanto tutti – anche il dirigente – erano rimasti stupiti da come si fosse comportata e coinvolta durante il gioco proprio quella classe, la classe con cui nessuno avrebbe mai giocato perché troppo indisciplinata e per altri svariati motivi. Nelle attività ludiche realizzate durante l'anno, come detto, furono proposti principalmente problemi ricreativi, ma da quel giorno di giugno cominciò a farsi strada l'idea che potessero entrare in classe anche i giochi da tavolo, fra cui alcuni prodotti dall'azienda CreativaMente. Durante lo stesso anno scolastico, infatti, gli stessi giochi avevano cominciato a essere utilizzati – oltre alle formazioni per docenti già menzionate – in altre classi di scuola secondaria di primo e secondo grado, inizialmente per alleggerire un'ora che poteva essere più pesante, come l'ultima ora della settimana o della giornata, oppure a ridosso delle vacanze di Natale o alla fine dell'anno scolastico, quando si è presi dalle ultime interrogazioni e gli studenti che hanno finito le interrogazioni vengono a scuola a "riscaldare le sedie" o a giocare con lo smartphone. Era matura e concreta ormai l'ipotesi di un utilizzo del gioco all'interno dell'attività didattica curricolare, a partire dall'ambito aritmetico e algebrico e non solo come complemento.

3.1.3 L'incontro con i giochi di CreativaMente

L'incontro con Emanuele Pessi e con i giochi di CreativaMente è stato la scoperta della tessera mancante di un mosaico che non era mai stato completato: è certamente possibile insegnare una «matematica ricreativa per tutti» anche servendosi esclusivamente di problemi ricreativi anziché di giochi veri e propri, ma non c'è dubbio che l'esperienza costruttiva del fare matematica esca rafforzata dall'utilizzo di uno strumento-gioco concreto, un materiale fisico con cui confrontarsi: dadi, carte, tabelloni nel solco della grande tradizione dei giochi di società, ma anche blocchi solidi in legno, polimini di cartone.

I giochi di CreativaMente nascono anzitutto come giochi veri e propri e non come meri strumenti per la didattica e questo è stato sicuramente l'aspetto di maggior fascino all'inizio: si gioca sul serio e non come escamotage per apprendere questo o quel determinato concetto matematico. Più avanti si entrerà nel dettaglio di ciascun gioco, ma anzitutto va messo in evidenza che questi giochi richiamano l'aspetto frizzante e creativo della matematica: in essi convivono entrambi gli aspetti di *ludus* e *paidia* illustrati da Caillois e vengono sollecitate le due componenti fondamentali dell'*agon* e dell'*ilinx* (si vedano §1.2.3 e §2.3). Inoltre, va sottolineato il valore sociale di giochi simili, in un contesto come quello attuale, dove il fascino del digitale sembra aver preso il sopravvento su tutto, si tratta di giocare intorno a un tavolo (o a un banco scolastico) con dadi, carte e tabelloni.

Inizialmente il catalogo di CreativaMente era fornito di soli tre giochi afferenti all'ambito logico-matematico: *Pytagora - Numbers in Puzzle*, *Rolling CUBES Pytagora*, *Conta che ti passa - Il prato dei conigli*. E con questi giochi si è cominciato a giocare e a pensare alla prima edizione di Matematica per tutti

La prima sperimentazione dei giochi è avvenuta nelle classi dei docenti in servizio dell'associazione ToKalon e dei loro colleghi. L'esperienza con i giochi è cresciuta anche attraverso le proposte di formazione[139] per docenti di scuola primaria e secondaria, in cui è stato gradualmente lasciato sempre più spazio all'attività con i giochi fino alla realizzazione di intere lezioni dedicate al gioco. Gli insegnanti venivano invitati direttamente a giocare in piccoli gruppi con un numero di giochi fisici adeguato affinché tutti potessero farne esperienza in prima persona toccando con mano i materiali, confrontandosi con le regole e ragionando sulla potenzialità didattica di ogni singolo gioco.

Al termine della prima edizione di Matematica per tutti è stato chiaro che si sarebbe potuto lavorare insieme mettendo in comune il modo di fare scuola, l'esperienza di studio e ricerca degli insegnanti in servizio dell'associazione ToKalon e la capacità di progettare giochi educativi dell'azienda CreativaMente. È nato così il progetto CreativaMente ToKalon, la cui mission è affermare il valore formativo del gioco e diffonderne l'uso nella didattica, con la ferma convinzione che un approccio simile permetterà di muoversi verso una scuola migliore: «LA SCUOLA CHE VOGLIAMO», come recita il documento di presentazione redatto nel 2019 e aggiornato nel 2021[140]. Nel documento si trovano anche i riferimenti al valore antropologico del gioco con il *ludus* e la *paidia* e le categorie di *agon* e *ilinx* di Caillois. La sintesi dell'offerta proposta nel documento:

> CreativaMente ToKalon offre
>
> – <u>materiali</u> frutto di ricerca e sviluppo nel campo dei giochi educativi
>
> – un <u>percorso</u> ampiamente sperimentato, per inserire il gioco nell'attività didattica, rafforzandola in termini di coinvolgimento individuale e condivisione in classe
>
> – <u>corsi di formazione</u> rivolti ai docenti per introdurre all'approccio ricreativo e all'uso del gioco nella didattica

Da questa collaborazione stretta sono nate così le edizioni successive alla prima di Matematica per tutti, parte del lavoro esposto nel §2.2.4 intorno al gioco *Rolling CUBES Pytagora*, l'ideazione e la conseguente pubblicazione dei seguenti giochi:

- nel dicembre 2019 *Polyminix*[141]
- nel marzo 2020 la nuova versione di *Pytagora SMARTY Puzzle*[142]
- nell'ottobre 2021 il recentissimo *FUNB3RS*[143].

Inoltre, sono stati ri-editati e distribuiti in Italia i giochi *La Boca*[144] e *SET*[145].

---

139 In diverse scuole romane, in Sardegna a Palau e in Lombardia a Seveso, dall'a.s. 2013-14 al 2017-18.
140 A questo link si trova il documento di presentazione del progetto CreativaMente ToKalon (agg. luglio 2021): https://associazionetokalon.com/wp-content/uploads/2021/07/brochure_creativamente_tokalon_2021.pdf
141 Le autrici insieme a Emanuele Pessi sono due docenti rispettivamente di scuola primaria e secondaria di primo grado, Anna Mazzitelli e Maria Cristina Migliucci.
142 Uscito nel marzo 2020, ideato da Emanuele Pessi e Luigi Regoliosi.
143 Uscito nell'ottobre 2021, ideato da Emanuele Pessi, Luigi Regoliosi e Valentina Celi.
144 Uscito nel 2013 con la casa editrice Kosmos, ideato da Inka e Markus Brand. La nuova edizione italiana di CreativaMente è del febbraio 2019.
145 *SET* è un gioco progettato dall'americana Marsha Falco nel 1974 e pubblicato dall'azienda da lei fondata, Set Enterprises, nel 1991. CreativaMente lo distribuisce in Italia dal 2019.

Nell'a.s. 2021-22 è partito anche un altro progetto nazionale sperimentale, dal nome emblematico: "Italiano per tutti"[146].

3.2 Fra alunni e insegnanti: il design del Con-corso

3.2.1 La fase di avvio e di organizzazione, il lavoro di comunicazione e presentazione

Il Con-corso, come detto, non nasce da un giorno all'altro, ma ha alle spalle quanto descritto nel paragrafo precedente: in particolare, sono state molto importanti le esperienze di formazione docenti e le sperimentazioni in classe del team di docenti di matematica dell'associazione ToKalon in servizio presso scuole secondarie di primo e secondo grado. Avuta la conferma sul campo anche da parte di altri colleghi, si è deciso così di intraprendere quest'avventura, prendendo contatti con i diversi soggetti necessari per la realizzazione di un progetto così ambizioso su scala nazionale:

- l'azienda CreativaMente si è occupata della logistica per le spedizioni dei giochi in tutta Italia
- si è prenotato il parco a tema Cinecittà World di Roma per un evento di presentazione a inizio ottobre e per le due giornate della fase finale nel mese di aprile
- sono stati reclutati diversi docenti per il comitato didattico-scientifico, principalmente tra coloro che facevano parte dell'associazione ToKalon e che avevano partecipato o condotto formazioni docenti
- è stata chiesta e ottenuta la consulenza e la supervisione scientifica di alcuni professori universitari, tra cui la prof.ssa Millán Gasca a cui è stata affidata la carica di presidente del comitato didattico-scientifico
- è stato chiesto e ottenuto il patrocinio dell'università degli studi di Roma Tre, di Roma Capitale e della Regione Lazio
- è stata ingaggiata una videomaker professionista per realizzare alcune videoclip di presentazione e le videolezioni necessarie per la formazione
- è stata ingaggiata una grafica professionista per il logo e per la realizzazione dei materiali grafici necessari per la campagna di comunicazione
- è stato realizzato un sito ad hoc per il progetto con annessa la piattaforma dedicata per l'accesso a tutti i materiali formativi e alle prove di selezione locale
- è stata diffusa la notizia attraverso i canali social, le mailing list dell'associazione ToKalon e la testata giornalistica online Orizzonte Scuola

[146] Il progetto *Italiano per tutti* è guidato da docenti di lettere dell'associazione ToKalon e prevede anche un percorso di enigmistica realizzato con la collaborazione di un professionista del settore. Si rimanda al sito ufficiale per ulteriori dettagli: www.italianopertutti.it

Ciò che è mancato senza dubbio il primo anno è quanto si è potuto realizzare per la seconda edizione, ovvero una serie di iniziative formative in presenza – in quel caso fu un vero e proprio "tour formativo"[147] –, dove i docenti potessero fare esperienza diretta di quello che veniva proposto attraverso il Con-corso Matematica per tutti. Per la prima edizione si è riusciti comunque a realizzare una singola iniziativa formativa di sabato mattina (dalle 9 alle 13) dedicata ai docenti di Roma e del Lazio, con la partecipazione anche di qualche docente dalle regioni vicine e addirittura di una docente della provincia di Venezia. L'iniziativa chiamata "La matematica attraverso il gioco"[148] è stata realizzata in collaborazione con l'Università degli studi di Roma Tre e ha visto la partecipazione di 350 insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo e secondo grado. Dopo un momento plenario introduttivo guidato dalla prof.ssa Millán Gasca i partecipanti sono stati suddivisi in più aule, ciascuna dedicata a un gioco diverso e guidata da un docente del comitato. Secondo dei turni prestabiliti si sono spostati di aula in aula e hanno avuto la possibilità di sperimentare le attività con tutti i giochi della proposta di Matematica per tutti. Un breve momento conclusivo, di nuovo in sessione plenaria, è stato dedicato al calcolo mentale e ai dettagli della proposta del Con-corso. Nel tour formativo della seconda edizione le sessioni duravano da un minimo di 3 a un massimo di 4 ore a seconda della collocazione oraria possibile: in alcune città è stato possibile lavorare solo il pomeriggio dopo le 16:45, in altre invece anche il sabato mattina o nel pomeriggio dalle 15:00. La proposta era suddivisa in due momenti: un primo momento in sessione plenaria in cui venivano presentati i tratti fondamentali della proposta di Matematica per tutti anche alla luce della prima edizione e del progetto nascente sulla didattica attraverso il gioco. In questa prima parte venivano coinvolti i docenti partecipanti anche con un'attività sul calcolo mentale, tratta dai quesiti dell'ambito "Aritmetica". Da questa attività, come detto, è nato il gioco *FUNB3RS*. Nella seconda parte i partecipanti venivano suddivisi in gruppi di 20/30 a seconda degli spazi a disposizione e, ove possibile, la suddivisione avveniva per livelli scolastici. Si lavorava in piccoli gruppi di 3 o 4 docenti e veniva offerta la possibilità di giocare con tutti i giochi del Con-corso, sotto la guida e le indicazioni didattiche dei formatori membri del comitato didattico-scientifico.

Per la terza edizione non è stato possibile ripetere un'esperienza simile, neanche in una forma ridotta e si è dovuto ripiegare su attività di disseminazione con webinar gratuiti o formazioni online a pagamento dedicate a singoli giochi.

---

[147] Il tour formativo dell'a.s. 2019/20 coinvolse oltre 2500 docenti in 37 date nell'arco di soli due mesi (da ottobre a dicembre). Si trova il dettaglio di tutte le tappe qui: https://associazionetokalon.com/tour-formativo/

[148] Il 1 ottobre 2018 presso il Dipartimento di Scienze della Formazione dell'università degli studi di Roma Tre: https://associazionetokalon.com/corso/la-matematica-attraverso-il-gioco/

3.2.2 Un'opportunità di formazione per i docenti: da fruitori a co-ideatori dei contenuti

Il Con-corso Matematica per tutti è una proposta didattica che un docente può sperimentare con l'intera classe. Tutti i docenti partecipanti hanno la possibilità di usufruire di una proposta formativa specifica, attraverso documenti pdf e videolezioni in diretta e differita streaming sui contenuti seguenti:

- il valore didattico dei giochi
- quesiti ispirati ai giochi e legati alla matematica ricreativa suddivisi in tre grandi ambiti: Aritmetica (+ Algebra per gli studenti più grandi), Geometria e Rompicapo
- riflessioni sui tre ambiti proposti e su un ambito speciale dedicato al calcolo mentale
- attività svolte in classe e a distanza nei diversi livelli scolastici

I contenuti sopra indicati sono realizzati dal gruppo di docenti in servizio di ogni livello scolastico, che insieme ad alcuni docenti universitari costituiscono il Comitato didattico-scientifico del Con-corso, sotto la supervisione scientifica della prof.ssa Ana Millán Gasca. Ogni docente partecipante riceve le credenziali per accedere a una piattaforma, dove trova tutti i materiali sopra indicati insieme a una ricca bibliografia e sitografia dedicata ai giochi matematici e alla matematica ricreativa, sia in termini di raccolte di materiali utili per la didattica sia in termini di studi relativi all'approccio pedagogico attraverso il gioco.

La formazione si struttura anzitutto intorno all'utilizzo dei giochi nella didattica: a ogni classe iscritta viene, infatti, inviato un certo numero di scatole gioco e – dalla terza edizione – vengono forniti per alcuni giochi anche dei kit individuali. I kit, nati inizialmente per far fronte alle limitazioni imposte dalle norme per prevenire la diffusione della pandemia di Covid-19, si sono dimostrati in seguito un valore aggiunto per il lavoro in classe del docente che ha potuto sperimentare direttamente quanto proposto nella formazione. Il lavoro con i giochi è guidato attraverso i materiali proposti (con almeno una videolezione per ogni gioco e documenti pdf con suggerimenti e quesiti ispirati ai giochi) e si protrae per tutto l'anno scolastico indipendentemente dalla partecipazione degli studenti alla competizione abbinata al Con-corso.

Ai giochi sono associati tre grandi ambiti concettuali delle matematiche elementari individuati in Aritmetica (+Algebra), Geometria e Rompicapo. I primi due sono gli ambiti naturali in cui suddividere le matematiche elementari nella scuola secondaria, mentre il terzo è stato scelto per collocarvi in particolare i quesiti relativi al mondo ricreativo dei giochi con i fiammiferi. Così vengono proposte delle videolezioni per ciascuno dei tre ambiti e che riguardano principalmente i quesiti di ogni micro-universo ricreativo collegato. Nel §3.4 si tornerà sul dettaglio delle scelte compiute relativamente alle tipologie di quesiti proposti e si forniranno alcuni esempi di questi materiali.

Uno spazio particolare è dedicato poi al calcolo mentale: materiali pdf, due videolezioni di cui una con suggerimenti e strategie di calcolo e un'altra relativa all'utilizzo della calcolatrice come strumento per affinare il calcolo mentale[149].

Infine, intorno ai mesi di marzo e aprile, e comunque dopo aver svolto l'eventuale prova di selezione per coloro che partecipano alla competizione, si propone per ciascun grado scolastico un webinar, in cui vengono discusse criticamente le attività svolte in classe o a distanza come è capitato spesso negli ultimi anni a causa della pandemia. Il webinar ha lo scopo di condividere il lavoro di chi si è cimentato con i materiali del Con-corso e allo stesso tempo di dialogare con chi ha maturato dubbi, difficoltà, curiosità e magari vuole consigli per come lavorare secondo l'approccio attraverso il gioco.

Al termine dell'anno scolastico, come lavoro di restituzione finale della formazione, si chiede anzitutto di riflettere sugli spunti emersi nelle videolezioni e nel lavoro in classe con i propri studenti e di prendere visione di tutti i materiali a disposizione nella piattaforma riservata, comprese le risorse bibliografiche e sitografiche. Concretamente poi il lavoro si traduce nella stesura di due brevi elaborati:

- uno relativamente a una lezione a scelta tra Calcolo mentale e Aritmetica+Algebra;
- uno relativamente a una lezione a scelta tra Geometria e Rompicapo.

La consegna per questi elaborati è quella di creare un quesito/un problema/una breve attività, anche laboratoriale da proporre in classe nel proprio livello scolastico, spiegando i motivi della scelta, la modalità di attuazione in classe e indicando i materiali e le eventuali risorse bibliografiche e sitografiche utilizzate. Tale attività è volta, a livello individuale, a fare entrare in gioco la libera iniziativa dell'insegnante, a mettere a confronto i contenuti del corso con la prassi in classe e a incoraggiare la personale riflessione sul corso.

Per la redazione degli elaborati si suggerisce di raccontare brevemente il proprio intento e ciò che potrebbe avvenire [o è avvenuto] in classe, includendo stralci di dialogo avvenuto in classe, qualche foto, eventuali difficoltà, domande, spunti/momenti di interesse e di sorpresa.

La proposta formativa è in continua evoluzione in quanto, anno dopo anno, si approfondiscono molti aspetti giocando e lavorando in classe con gli studenti (e con i docenti nelle formazioni): come riportato tra gli atteggiamenti necessari per un approccio pedagogico attraverso il gioco nella Tavola 2.11, «giocare insegna a giocare» e dunque si scoprono anche particolari prima nascosti o non osservati. Infine, dalla terza edizione si è "raffreddata" la pista di lavoro collegata all'ambito denominato «Rompicapo», in parte per la situazione pandemica più volte menzionata, in parte per una voluta semplificazione della proposta che risultava troppo articolata. La scelta di lavorare solamente sugli ambiti «Aritmetica

[149] Dal lavoro proposto dalla prof.ssa Valentina Celi (INSPE de l'académie de Bordeaux, Université de Bordeaux) su calcolo, ragionamento e calcolatrice è nato poi il gioco *FUNB3RS* (uscito nel novembre 2021), che è andato ad arricchire l'offerta di giochi proposti nel Con-corso e di cui si parlerà nel §3.3.6.

(+Algebra)» e «Geometria» è stata una scelta di razionalizzazione dei materiali offerti, in quanto si è rilevata da parte dei docenti una certa difficoltà nel riuscire a fruire di tutti i contenuti caricati sulla piattaforma riservata. Anche la sezione «Calcolo mentale» è stata collocata dalla terza edizione tra i materiali extra a disposizione dei docenti, anche alla luce dell'uscita del nuovo gioco *FUNB3RS* proprio sul calcolo mentale.

3.2.3 Il lavoro in classe con gli studenti: cooperazione, inclusione e confronto

I docenti hanno la possibilità di cimentarsi insieme ai loro studenti con i giochi e i contenuti del Concorso, valutando, nei primi mesi di lavoro, se partecipare alla competizione nazionale legata ai giochi e ai quesiti a essi ispirati, ovvero al "concorso senza il trattino". La prova di selezione locale è prevista nella settimana del Pi Greco Day (14 marzo) e gli insegnanti devono comunicare il numero di squadre con cui parteciperanno alla prova, indicativamente tre settimane prima, ovvero l'ultima settimana di febbraio.

In questa prima fase, capite le regole del singolo gioco si prova a giocare, prendendo confidenza con i suoi vari aspetti e con la sua "magia", ciò che lo rende unico, divertente, irresistibile. Si prosegue – ove possibile – il lavoro in gruppi da tre o da quattro alunni, da una parte per preparare la classe in vista della possibile partecipazione alla competizione, ma anche e soprattutto per introdurre sistematicamente un approccio attraverso il gioco alle matematiche elementari durante l'attività curriculare, come ampiamente sottolineato nel Capitolo 2.

Ciascun gioco può essere utilizzato in varie modalità e a diversi livelli di profondità (base, intermedio, avanzato, in relazione alla difficoltà e al numero delle richieste e delle condizioni): naturalmente sarà l'insegnante a scegliere la soluzione più adeguata ai propri studenti. Se si ha la possibilità di farli lavorare individualmente o a coppie,[150] questa è certamente la modalità migliore per cominciare a giocare. Successivamente si può lavorare in collaborazione in gruppi da tre o quattro studenti (che potrebbero poi coincidere con le squadre per la competizione) e, infine, in competizione tra i diversi gruppi. In alcuni casi si può lavorare anche immaginando che l'intera classe corrisponda a una singola squadra in cui tutti i giocatori collaborano per cercare di ottenere il massimo punteggio possibile.

In tutte le modalità si sperimenterà il confronto tra pari, lavorando sulla conversazione matematica a livello di questioni come le strategie impiegate, gli eventuali modi di rappresentazione, e le soluzioni trovate visione matematica della realtà

Nel lavoro all'interno di ciascun gruppo-squadra è centrale la cooperazione e contestualmente l'inclusione di tutti. L'insegnante, infatti, cerca di costruire i gruppi in modo eterogeneo con lo scopo di far trovare a ciascuno il proprio spazio, di far loro superare l'imbarazzo di essere più o meno bravi, di

[150] Non sempre è possibile avere un numero significativo di kit, si pensi ai dadi di *Rolling CUBES Pytagora* o ai polimini di *Polyminix*.

favorire la scoperta di potenzialità alle volte nascoste: tutti si devono scoprire capaci e stimolati a mettersi in gioco anche in ambiti diversi. Nel documento di presentazione del progetto CreativaMente ToKalon si legge:

> Con-correre e competere: con-correre è "correre insieme" e competere (dal latino «con-petere») è convergere insieme verso una stessa meta. Nessun ruolo è stabilito, ognuno ha il suo spazio per mettere in gioco il suo talento e risultare "il più bravo" in un aspetto particolare. L'inclusione non è più quindi un obiettivo imposto, ma una conquista per tutti: ciascuno ha un talento da condividere, deve solo scoprirlo. […]
>
> Ogni gioco dispiega a poco a poco le sue potenzialità nascoste: è una porta che si apre verso vari concetti che sono oggetto di studio a scuola, e verso situazioni complesse che vanno oltre il gioco stesso. [...] All'utilizzo nella programmazione curriculare si può affiancare la proposta dei giochi anche in altri momenti: classi aperte, laboratori, recupero, potenziamento, intervallo.

Dopo aver cominciato il lavoro con più giochi diversi, si può decidere anche di lavorare a "isole", ciascuna dedicata a un singolo gioco, facendo ruotare i gruppi da un'isola all'altra dopo un tempo stabilito oppure definendo i gruppi che giocheranno a questo e a quell'altro gioco (ad esempio, i gruppi A e B giocano a *Rolling CUBES Pytagora*, i gruppi C e D a *Polyminix*, i gruppi E e F a *La Boca*). Analogamente si può lavorare sui quesiti, sulle sfide e sui problemi legati ai giochi e ai micro-universi ricreativi, anche se probabilmente in quel tipo di attività è più indicato che ogni gruppo lavori sulla stessa domanda, affinché sia collettivo – cioè coinvolga l'intera classe – il momento di confronto e di discussione delle strategie e delle soluzioni trovate.

Accanto alla valutazione ordinaria il docente può servirsi del gioco anche quale occasione privilegiata per dare valore al singolo, che corrisponde all'essenza stessa del valutare. È possibile valutare durante i momenti laboratoriali di gruppo e attraverso vere e proprie verifiche dedicate. Il gioco costituisce infatti un valido strumento per affiancare e completare la classica valutazione per prove strutturate; le sue peculiarità facilitano il docente nella valutazione formativa, delle capacità relazionali degli alunni, dei loro interessi sociali e delle competenze trasversali all'ambito considerato.

È necessario dare uno spazio e un intento preciso all'utilizzo del gioco (ogni settimana, ogni 15 giorni, ogni mese), da una parte per alimentare la curiosità e lo stupore suscitati al primo impatto e dall'altra per trasmettere l'idea che non si tratti di un intermezzo, ma di un'occasione diversa e privilegiata per imparare cosa vuol dire "fare matematica".

3.2.4 La competizione nazionale

Come detto, la sistematicità del lavoro con giochi, quesiti, problemi e sfide può essere naturalmente anche funzionale alla partecipazione della classe alla competizione nazionale abbinata al Con-corso. La competizione prevede due fasi distinte: una locale, per tutti, nelle singole scuole partecipanti, e un'altra a Roma, esclusivamente per le squadre finaliste.

Alla fase locale possono partecipare una o più squadre da 3 o 4 studenti ciascuna; la formazione delle squadre viene fatta in modo volontario, ovvero non tutti i membri della classe sono obbligati a partecipare. La selezione locale si svolge presso le singole scuole secondo le modalità indicate dal comitato didattico-scientifico del Con-corso. Gli allievi sono divisi in categorie a seconda del livello scolastico (Elementari, Medie, Superiori, recuperando le denominazioni della tradizione) e della classe frequentata: E2-E3 (II e III elementare), E4-E5 (IV e V Elementare), M1-M2 (I e II Media), M3-S1 (III Media e I Superiore), S2 (II Superiore)[151]. La prova locale viene svolta a squadre sotto la sorveglianza di docenti dell'istituto, che ne assicurano la regolarità.

La selezione locale ha previsto modalità e tempistiche diverse nell'arco delle tre edizioni. Durante la prima edizione la prova era suddivisa in due parti (da svolgersi in due tempi distinti, ma consecutivi):

1. la prima verteva sul calcolo mentale (solo testo della prova e una penna);
2. la seconda era invece strutturata con domande a risposta singola e multipla e un problema

I quesiti erano suddivisi in:

- aritmetica (+ algebra per la categoria M3-S1);
- geometria;
- rompicapo (inizialmente chiamata "giochi matematici");
- UN problema.

La durata della prova era di 20 minuti per la prima parte e di 70 minuti per la seconda.

Durante la seconda edizione si è deciso di far svolgere la prova sempre in due parti, da svolgersi però in due giorni diversi e dunque non per forza consecutive come l'anno precedente:

1. nel primo giorno Calcolo mentale e UN problema: le squadre iniziavano con il calcolo mentale e poi dovevano risolvere UN problema illustrando la strategia utilizzata.
2. nel secondo giorno Aritmetica (+ Algebra), Geometria e Rompicapo. Si trattava di domande a risposta multipla e a risposta singola.

La durata della prova di calcolo mentale era di 20 minuti per tutte le classi di scuola secondaria. Successivamente c'erano a disposizione 40 minuti per risolvere il problema previsto. La durata della prova del secondo giorno era invece di 60 minuti.

La terza edizione o «Special Edition» ha avuto una prova di selezione locale in formato decisamente ridotto: solamente quesiti collegati ai giochi *Rolling CUBES Pytagora* e *Polyminix*. La novità più significativa era però che non c'erano le squadre, ma l'intera classe costituiva la squadra. La durata della prova era di 60 minuti. Le domande erano a risposta multipla e a risposta aperta con la richiesta del caricamento della

[151] I gradi scolastici coinvolti e le categorie sono stati modificati negli anni, come si dirà più avanti nel §4.1.3.

foto per alcune domande su *Polyminix*. Fondamentali in questa tipologia di prova erano i dadi di *Rolling CUBES Pytagora* e i polimini. Era esclusa la scuola secondaria di secondo grado.

Per tutte e tre le edizioni i testi per la selezione locale sono stati inviati alle scuole almeno una settimana prima dei giorni previsti per la prova. La credibilità e la possibilità di successo di questa fase della competizione sono state affidate ai singoli docenti che ne hanno curato lo svolgimento. Alla loro discrezionalità è stata lasciata la valutazione, con conseguente decisione di comportamento, di tutte le eventuali circostanze non usuali o impreviste, per esempio la concessione di assistenza particolare a concorrenti portatori di handicap o non totalmente padroni della lingua italiana, o l'adozione di provvedimenti disciplinari per comportamenti scorretti.

La restituzione delle prove di selezione locale è avvenuta attraverso il caricamento delle risposte date dalle squadre su un apposito form, a cura dei singoli docenti di ogni classe. Durante le prime due edizioni è stato fornito anche un correttore della prova per le domande a risposta aperta.

I punteggi dei vari quesiti erano:

- pari a 0 per ogni risposta errata o non data;
- pari a un numero positivo variabile in funzione della difficoltà del singolo quesito risolto per ogni risposta corretta.

Per il problema è stata fornita una griglia di correzione con una serie di punteggi in funzione della correttezza e completezza della risposta fornita dalla squadra (se ne mostrerà un esempio nel §3.4.5).

La classifica della prova selettiva è stata pubblicata sul sito www.matematicapertutti.it e dopo la pubblicazione aveva inizio la preparazione alla fase finale. Il numero di squadre che possono accedere alla fase finale dipende dal numero degli iscritti al Con-corso e indicativamente corrisponde a non più di un 20% delle squadre partecipanti per ciascuna categoria. Inoltre, in accordo con il carattere inclusivo della proposta, la direzione del Con-corso ha garantito un posto alla fase finale di categoria per ogni Istituto che ha partecipato alla fase selettiva con almeno 3 classi iscritte della stessa categoria.

A questo punto tornano le differenze tra le tre edizioni.

Durante la prima edizione le squadre finaliste e i relativi docenti responsabili hanno confermato la propria partecipazione alla fase finale che si è svolta in due giorni consecutivi – un venerdì e un sabato – presso il parco a tema Cinecittà World (via di Castel Romano, Roma).

L'ingresso al parco per entrambi i giorni della fase finale era gratuito per ogni componente della squadra e per i loro docenti responsabili.

Nel pomeriggio del venerdì tutte le squadre ammesse si sono sfidate, divise nelle rispettive categorie, in prove dedicate ciascuna a un gioco diverso del Con-corso.

All'inizio della mattina del sabato sono state comunicate le quattro squadre che si sono poi sfidate nella prova finale (per ogni categoria). In tale prova è stato protagonista il calcolo mentale (con e senza calcolatrice).

Al termine delle finali ci si è riuniti sotto il palco di Cinecittà Street per la cerimonia di premiazione in cui sono stati comunicati anche i vincitori dei premi speciali (ad es: la squadra migliore per ciascuno dei giochi previsti).

La manifestazione è terminata nel primo pomeriggio del sabato. Tutte le squadre partecipanti hanno avuto naturalmente la possibilità di usufruire anche delle attrazioni del parco nel pomeriggio del venerdì e nella giornata di sabato, specialmente se non sono risultate qualificate per la finalissima.

La fase finale della seconda edizione avrebbe dovuto svolgersi ugualmente a Cinecittà World con una modifica per la finalissima: non era più protagonista solo il calcolo mentale, ma avevano uno spazio importante anche le sfide ispirate ai giochi previsti nel Con-corso. Purtroppo, la situazione pandemica ha costretto gli organizzatori ad annullare l'evento.

La fase finale della Special Edition si è svolta invece interamente online ed è consistita in una serie di sfide intorno ai giochi *Rolling CUBES Pytagora* e *Polyminix*. Ha visto la partecipazione di cinque intere classi, che si sono sfidate per un'ora in collegamento in diretta sul canale YouTube dell'Associazione ToKalon.

Si tornerà sulla competizione nelle tre edizioni del con-corso nel Capitolo 4 e si rimanda all'Appendice E.6 per i testi delle prove di selezione locale.

3.3 I giochi da tavola di Matematica per tutti

Per ogni gioco scelto sono stati realizzati una scheda pdf con consigli didattici, un breve video tutorial per spiegare come si gioca e una videolezione[152] su come utilizzarlo nella didattica. Nel seguito si vogliono presentare sinteticamente i giochi, descrivendo il contenuto delle scatole-gioco e dei kit, le regole usate per giocare (spesso differiscono da quelle ufficiali caricate in Appendice F) e alcune indicazioni per l'utilizzo a scuola.

Quasi mai verrà fatta menzione del tempo della partita o del singolo turno di gioco: nonostante sia un particolare piuttosto importante per giocare, si ritiene di lasciare autonomia all'insegnante rispetto ai tempi che verranno dettati dalla classe e dai singoli studenti con i quali verranno utilizzati i giochi. Naturalmente in ogni gioco si comprende che oltre un certo tempo non è adeguato aspettare, ma nei

152 Per *Rolling CUBES Pytagora* e *Polyminix* sono state realizzate due videolezioni, alla luce del grande materiale raccolto nelle sperimentazioni e nella ricerca didattica intorno a questi due giochi. Si prevedono già altre videolezioni, in particolare su *Rolling CUBES Pytagora*, per raccontare anche il lavoro documentato nel §2.2 intorno al programma realizzato con Python.

limiti della ragionevolezza si è convinti che ogni insegnante sia in grado di comprendere quando è il momento di smettere di attendere una mossa da parte di un proprio studente o di un piccolo gruppo.

Non fanno parte dell'elenco *Conta che ti passa* e *Sixstix*, due giochi che erano presenti rispettivamente solo nella prima e nella seconda edizione, mentre si è voluto inserire comunque il gioco *FUNB3RS*, che è stato introdotto solo nella quarta edizione (in corso nell'a.s. 2021/22), ma è frutto del lavoro sul calcolo mentale delle edizioni precedenti ed è stato ideato proprio da chi scrive questa tesi.

Non vengono qui menzionati i quesiti, le sfide e i problemi collegati ai singoli giochi, di cui si parlerà invece nel §3.4.

3.3.1 Rolling CUBES Pytagora

L'autore del gioco – uscito nel 2017 - è Emanuele Pessi e si è parlato del gioco già nel §2.2.4. Costituisce la versione tascabile del più articolato *Pytagora SMARTY Puzzle* (di cui si parlerà nel §3.3.3) ed è fornito in una scatola di latta o in un semplice sacchetto richiudibile nella versione kit più economica.

Figura 3.8 – *Rolling CUBES Pytagora*: la scatola di latta e la versione kit con il sacchetto richiudibile

Il contenuto del gioco consiste in 13 dadi in legno, di cui:

- 4 dadi verdi con i numeri dispari
- 4 dadi blu con i numeri pari
- 4 dadi rossi con i 4 operatori aritmetici
- 1 dado arancione con il simbolo dell'uguaglianza

Si lanciano i 13 dadi e si deve comporre un'uguaglianza aritmetica, cercando di ottenere il maggior punteggio possibile.

Per il calcolo del punteggio del gioco ogni dado vale 1 punto, con l'eccezione del simbolo "=" (che non vale alcun punto) e valgono le seguenti regole:

- quando una cifra viene usata come decina vale 2 punti anziché 1, come ad esempio il numero 1 nella uguaglianza $12 - 3 = 9$. Analogamente, quando usata come centinaia vale

3 punti, come migliaia 4 punti, e così via. Questa regola non vale quando si compongono delle uguaglianze con numeri identici a destra e a sinistra dell'uguale ($53 = 53$ vale 4 punti)

- il dado con la moltiplicazione "$\times$" vale 2 punti anziché 1 e quello con la divisione "$\div$" vale 3 punti. Questa regola non vale quando:
  - si moltiplica o si divide per 1 ($3 + 2 = 5 \times 1$ vale 6 punti)
  - si compongono delle uguaglianze con operazioni identiche a destra e a sinistra dell'uguale ($6 \times 12 = 6 \times 12$ vale 8 punti)
  - si divide un numero per sé stesso ($25 \div 25 = 1$ vale 8 punti)

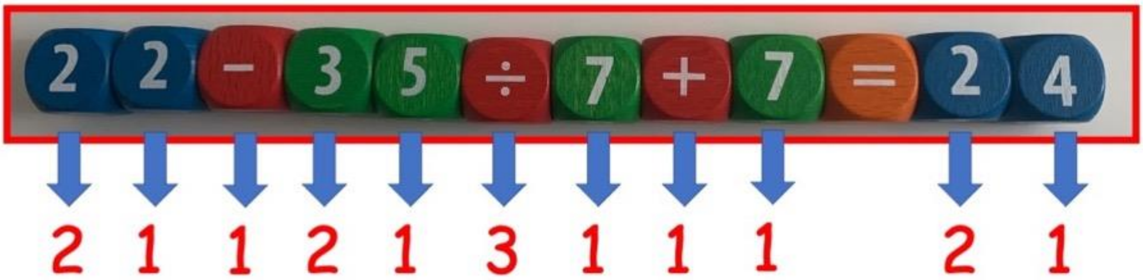


Figura 3.9 – Un esempio di calcolo del punteggio: $2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 16$ punti

NB: nelle regole ufficiali non è possibile moltiplicare un numero per zero o dividere lo zero per un numero e naturalmente questa regola vale anche per l'utilizzo a scuola per evitare punteggi "esagerati" come, ad esempio, quelli delle uguaglianze $0 \times 123457 = 0$ o $0 \div 123457 = 0$.

D'altra parte, in alcune classi si è vissuto con profondo senso di scoperta l'utilizzo dello zero come elemento assorbente della moltiplicazione o il fatto che la divisione dello zero per un qualunque numero dia sempre zero come risultato. Si suggerisce perciò, di introdurre successivamente il divieto previsto dalle regole e attendere che ci sia qualche studente o squadra che utilizza la moltiplicazione per zero o divide lo zero per un numero qualsiasi. Una volta emerso nelle attività in classe si può mettere meglio in luce come sia necessario vietare tale situazione per salvaguardare l'equilibrio del gioco.

Una versione notevolmente inclusiva del gioco, ispirata al vecchio gioco del "paroliere", è la seguente: dopo un lancio di dadi ogni studente, coppia o squadra scrive tutte le uguaglianze che gli vengono in mente con quel lancio: dalle più semplici come $4 - 1 = 3$ o $7 - 4 = 3$ alle più articolate con più operazioni come $90 - 63 = 7 \times 4 - 1$. In questo modo vengono valorizzate tutte le possibili combinazioni, anche le più banali, che comunque permettono di ottenere punteggio e soprattutto si evita che alcuni studenti non scrivano nulla o rimangano bloccati di fronte ai dadi e alla vastità di operazioni/combinazioni possibili. Anche in questo caso, il docente ha la massima libertà nel gestire tempi ed eventuali variazioni di regole, volte alla partecipazione di tutti e alla loro "crescita" nella familiarità e dimestichezza con il calcolo.

Un'ulteriore modalità di gioco consiste nel richiedere a ciascuna squadra di ottenere l'uguaglianza "più lunga", ovvero di provare a utilizzare tutti e 13 i dadi a disposizione! I tempi di un turno di gioco, almeno all'inizio, vanno considerati di almeno 15 minuti, per permettere alla squadra di ragionare su più soluzioni possibili. In questa modalità si può giocare sull'idea dell'uguaglianza come bilancia a due piatti dello stesso peso e provare a inserire tutti i dadi dando vita a uguaglianze errate dalle quali poi partire per arrivare a una soluzione, come illustrato nel §2.2.4.

Si può prevedere una partita con più turni di giochi, dove ciascuno studente o ciascuna squadra al proprio turno ripete il lancio dei dadi e costruisce la propria uguaglianza calcolandone il punteggio. Il lancio dei dadi può essere anche lo stesso per tutti i giocatori, con l'insegnante che proietta i dadi usciti sulla LIM o che li scrive sulla lavagna.

Si può terminare il gioco non appena si è raggiunto un determinato punteggio obiettivo oppure si può stabilire un tempo di gioco o un numero di turni di gioco.

Si prevedono, infine, dei punti bonus per soluzioni particolari: nelle regole ufficiali sono indicati rispettivamente 2 punti e 1 punto bonus in caso di utilizzo di tutti i dadi o di 12 dadi su 13. A scuola in genere si cerca di enfatizzare la situazione di utilizzo di tutti i dadi attribuendo un punteggio doppio a chi riesce a trovarne una (si veda il §2.2.4 dove sono riportati molti esempi).

3.3.2 Polyminix

Le docenti Maria Cristina Migliucci (scuola secondaria di primo grado) e Anna Mazzitelli (scuola primaria) sentivano il bisogno di affrontare in modo dinamico e non banale lo studio delle isometrie nel piano e della tassellazione dello stesso[153]. Così, insieme ad Emanuele Pessi, hanno ideato questo gioco uscito nel dicembre 2019. Naturalmente rimane intatta la sua caratteristica di gioco vero e proprio che può essere giocato a prescindere dal lavoro a scuola e dagli aspetti didattici che veicola, ma, essendo stato ideato da insegnanti, sono tante le possibilità offerte di lavoro in classe, a tutti i livelli scolastici[154].

Componenti essenziali del gioco sono il kit di 15 polimini di cartone, conservati in un sacchetto richiudibile, e il mazzo di 49 carte (schede-gioco) fronte-retro di diversa difficoltà a seconda del colore di sfondo. Ci sono carte facili (verdi), medie (gialle) e difficili (rosse). Obiettivo del gioco è disporre alcuni dei polimini del kit per ricoprire la superficie bianca quadrettata della carta da gioco, oppure per comporre una figura, secondo alcune condizioni date. La scatola-gioco contiene 4 kit di polimini, 1 mazzo di carte, 2 dadi (1 dado turno e 1 dado prova), 1 tabellone e 4 pedine.

---

153 Le autrici hanno rilasciato un'intervista sul gioco a Eleonora Fortunato su Orizzonte Scuola il 6 ottobre 2021: https://www.orizzontescuola.it/polyminix-fare-matematica-coinvolgendo-emozionando-insegnando-giocando-intervista/

154 In Appendice D.1 si riportano le sessioni dedicate a *Polyminix* all'interno di un'officina di Geometria destinata a docenti di scuola primaria in formazione e in servizio (progetto Erasmus + ANFoMAM).

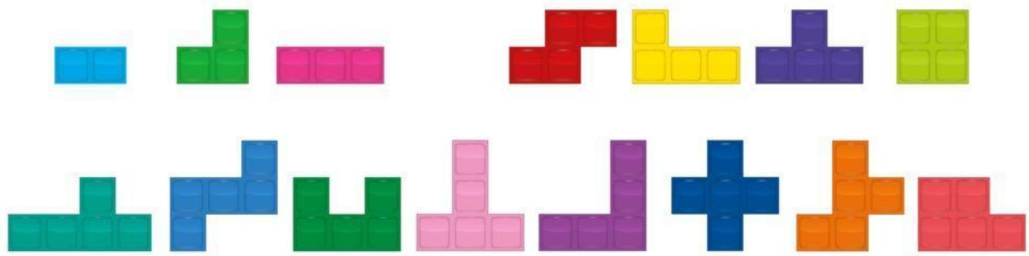


Figura 3.10 – I 15 polimini presenti nel kit

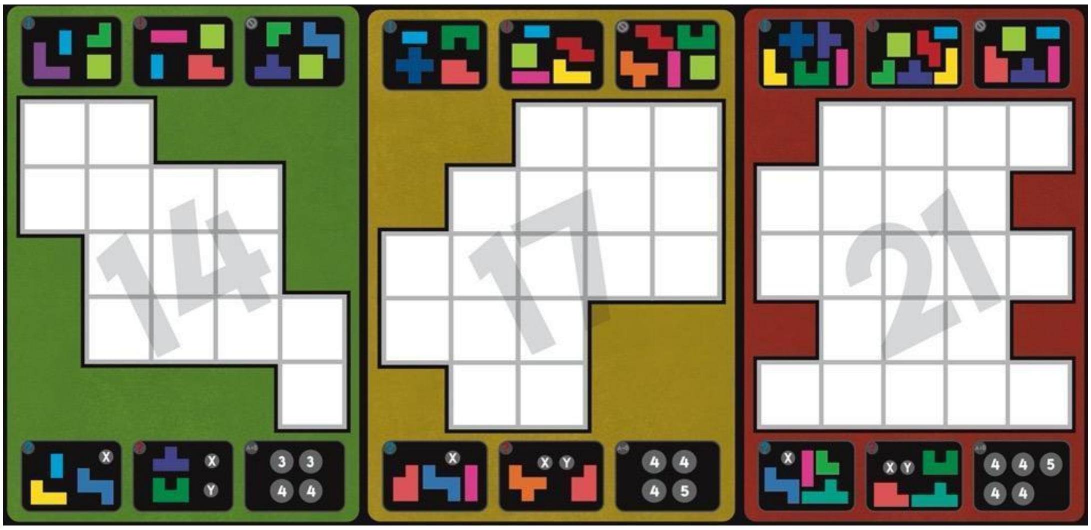


Figura 3.11 - Le tre tipologie di schede-gioco (verde, gialla, rossa)

Figura 3.12 – Il dado turno, il dado prova e il tabellone presenti nella scatola del gioco

Nel gioco in scatola, a ogni turno si svolge una prova che varia in base al *dado prova* e viene decisa la modalità di gioco e di assegnazione dei punti (da 1 a 3), in base al *dado turno*. I punti assegnati fanno avanzare di conseguenza la propria pedina segnapunti sul piano di gioco. Vince il giocatore che per primo raggiunge il traguardo (12 punti).

Per giocare a scuola non sono necessarie i dadi e il tabellone (mostrati in Figura 3.12), in quanto è l'insegnante a decidere la modalità di gioco (la *prova*), compresi i tempi e gli eventuali punteggi da assegnare (altrimenti definiti dal *dado turno*).

Si propongono due modalità di gioco secondo quanto riportato anche sulle regole ufficiali.

Ricopri la figura

Una prima modalità di gioco si chiama "RICOPRI LA FIGURA".

Ciascuna carta presenta una superficie di gioco bianca suddivisa in quadratini. Un quadratino è assunto come unità di misura della superficie da ricoprire e il numero stampato sullo sfondo della superficie bianca (si veda Figura 3.11) corrisponde al numero di quadratini da cui è composta. È particolarmente interessante la possibilità di lavorare sulle equiestensioni delle figure e dei polimini. Essendo presente sulla carta l'indicazione dell'area della superficie bianca da ricoprire, gli studenti sono guidati a comprendere quali diverse combinazioni di pezzi di uguale area ricoprono la stessa superficie. In particolare, nelle richieste identificate con il punto interrogativo (si veda Figura 3.13), l'indicazione dell'area totale è molto utile per scegliere i polimini mancanti tra quelli con il corretto numero di quadratini.

Sopra e sotto la superficie bianca della carta, ci sono 6 riquadri neri (Figura 3.13), che rappresentano le possibili prove di gioco.

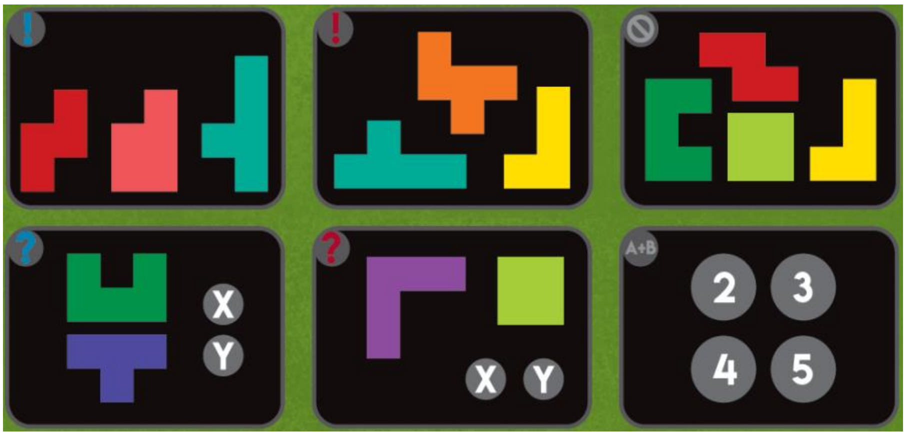


Figura 3.13 – Il particolare dei 6 riquadri neri rappresentati su ogni scheda gioco

Ciascun riquadro nero è identificato da un simbolo che corrisponde a uno dei sei simboli rappresentati sulle facce del *dado prova*. I simboli del *dado prova* e i loro significati sono spiegati nella Tavola 3.1. Si può lanciare il *dado prova* oppure decidere autonomamente la prova da affrontare. Si procede alla tassellazione della superficie bianca utilizzando i polimini e seguendo la *prova* assegnata.

La tassellazione consiste nel completo ricoprimento della superficie bianca, accostando tra loro i vari polimini che possono essere ruotati, spostati e ribaltati, ma non possono fuoriuscire né essere sovrapposti tra loro. Se si gioca con il tabellone e le pedine segnaposto, vince il turno chi raggiunge l'obiettivo indicato dal *dado prova* e i vincitori spostano la loro pedina in avanti di tanti spazi quanti ne hanno guadagnati. Il gioco finisce quando uno dei giocatori raggiunge la X (Figura 3.12) con la sua pedina.

Punto esclamativo azzurro 	tassellare con i polimini suggeriti
Punto esclamativo rosso 	tassellare con i polimini suggeriti
Divieto 	divieto di usare i polimini indicati
Punto interrogativo azzurro 	usare i polimini indicati più polimini a scelta in numero pari al numero delle lettere presenti
Punto interrogativo rosso 	usare i polimini indicati più polimini a scelta in numero pari al numero delle lettere presenti
Combo 	scegliere i polimini da usare rispettando le dimensioni suggerite nei numeri presenti nel riquadro nero.

Tavola 3.1 – Le 6 prove possibili del gioco "Ricopri la figura"

Nell'ultima prova (*Combo*) bisogna usare tanti polimini quanti quelli indicati nel riquadro. Tali polimini devono essere della superficie indicata. Se, ad esempio, nel riquadro è indicato *2, 3, 5, 5, 5* bisogna usare 5 polimini: l'unico di area 2, un polimino di area 3 e 3 polimini di area 5. Questo allena i giocatori a riconoscere un polimino come la somma geometrica di tanti quadratini che sono considerati l'unità di misura della sua superficie, abilità che viene poi trasferita in altri contesti e problemi. Può essere interessante riportare sul quaderno più tassellazioni in bianco e nero, o comunque monocolore, di una stessa superficie e magari osservare come la somma geometrica di più parti è equivalente. L'equivalenza a quel punto, e l'equiscomponibilità, si palesano davanti agli occhi degli studenti in modo semplice, immediato e inequivocabile. (NB: per riportare la tassellazione sul quaderno si può procedere nel ricalcare i polimini oppure lavorare sulle riduzioni in scala rispetto al quadretto utilizzato).

Risolvi il problema

La seconda modalità di gioco si chiama "RISOLVI IL PROBLEMA". Se si vogliono usare i materiali contenuti nella scatola del gioco si lanciano entrambi i dadi e si cerca il problema da risolvere nella tabella rappresentata nella Figura 3.14. Altrimenti l'insegnante può scegliere autonomamente i problemi da assegnare sia tra i 36 proposti sia inventandone di nuovi.

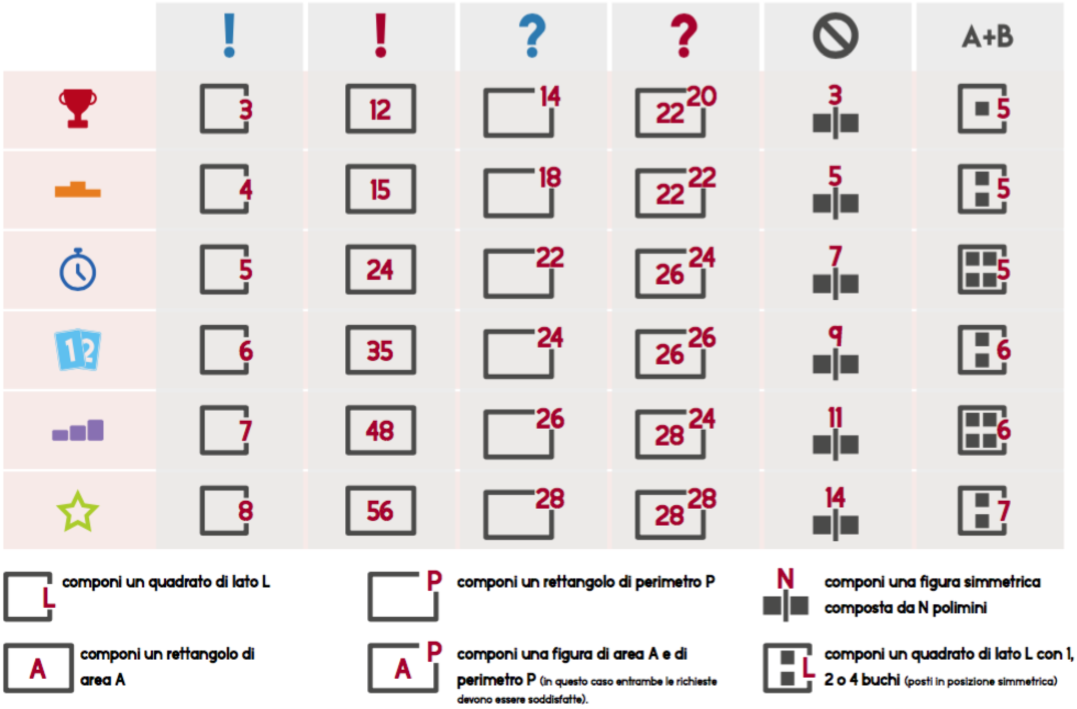


Figura 3.14 – La tabella della modalità di gioco "Risolvi il problema"

I problemi "già pronti" sono di 6 tipi, si chiede di costruire:

- un quadrato di lato L, con $3 \leq L \leq 8$ (il quadrato di lato 8 si ottiene utilizzando tutti e 15 i polimini di un kit)
- un rettangolo di area A
- un rettangolo di perimetro P
- una figura di area A e di perimetro P
- una figura simmetrica composta da N polimini
- un quadrato di lato L, con 1, 2 o 4 buchi posti in posizione simmetrica

NB: il lato del quadratino della superficie bianca di ogni scheda-gioco è l'unità di misura del perimetro delle figure richieste.

Come per il gioco "Ricopri la figura", quando tutti i giocatori hanno completato la propria prova vengono assegnati i punteggi e spostate le pedine segnapunti se si gioca con il tabellone. In tal caso vince la partita il giocatore che per primo raggiunge o supera il punteggio traguardo.

Osservazioni

Per entrambe le modalità di gioco è possibile procedere in maniera graduale, ad esempio, giocando con una sola modalità di prova prima di passare alle altre nel gioco "Ricopri la figura". Nel progetto Erasmus + ANFoMAM, già menzionato nella nota 129, sono state dedicate tre sessioni dell'officina di Geometria al lavoro possibile attraverso il gioco *Polyminix* (il contenuto è in Appendice D.1): i destinatari non erano docenti di scuola secondaria, ma si ritiene comunque valido il contenuto proposto per gli insegnanti che poi potranno modulare la proposta in base alle proprie esigenze.

Si suggerisce, in particolare, di giocare più volte con i sei tipi di prova della prima modalità di gioco, lasciando che gli studenti prendano familiarità con i polimini e i movimenti, che imparino a sceglierli e a chiamarli, e soprattutto a quantificarli. La ricchezza del gioco "Risolvi il problema" consiste nell'utilizzo libero dei polimini per costruire figure di vario tipo, dai quadrati e rettangoli di varia estensione, a figure non regolari ma che presentano uno o più assi di simmetria. Questa modalità di gioco permette ancora di riflettere sui confronti fra aree, sulle figure che hanno uguale area ma diverso perimetro, sulle simmetrie. Un possibile lavoro per ciascun docente (e anche per qualche studente!) consiste nell'aggiungere ulteriori domande a quelle già presenti nella tabella di riferimento (Figura 3.14). Nel caso di ideazione di nuove richieste, si suggerisce comunque prima di sperimentarle in prima persona e fotografare la tassellazione di risoluzione per non dimenticarla! È utile guidare anche gli studenti a osservare come le proposte di gioco offerte siano solo l'inizio di un grande lavoro al quale possono contribuire personalmente. La questione delle foto nel lavoro con *Polyminix* può assumere un aspetto importante sia come memoria delle tante e belle soluzioni trovate, sia come ricostruzione, per studenti e docenti, di percorsi di lavoro che via via si fanno più articolati e performanti (si rimanda all'Appendice D.1 per maggiori dettagli).

Il gioco si presta molto a essere giocato individualmente nella versione in cui ciascun giocatore ha a disposizione il proprio kit di polimini, ma si può lavorare anche in coppie e questo permette una buona individualità di gioco mista a una costruttiva collaborazione. È importante che si impari a giocare non da soli e a confrontare e a scegliere in maniera cooperativa le strategie di risoluzione.

3.3.3 Pytagora SMARTY Puzzle

Pytagora è stato il secondo gioco pubblicato da CreativaMente, nel 2003. Grazie all'incontro tra Emanuele Pessi e Luigi Regoliosi, nel 2019 si è deciso di realizzare un gioco per una più ampia fascia di età, sia per arrivare ai più piccoli di soli 4 anni sia per sfide più complesse per ragazzi delle superiori e naturalmente per adulti, introducendo parentesi, potenze, radici, frazioni e numeri decimali. Sono stati anche introdotti due dadi speciali, uno per allenare i più piccoli con la numerazione e l'altro per rendere più avvincente e interattivo ogni turno di gioco. La scatola-gioco (
Figura 3.15) contiene:

- 252 pezzi di puzzle, ciascuno con un numero (da 0 a 9) o un simbolo, suddivisi in 4 tipologie (Figura 3.16). I pezzi del puzzle sono plastificati e in materiale spugnoso, per resistere più a lungo rispetto al cartone tradizionale e per rendere più semplici le operazioni di "attacca-e-stacca" durante lo svolgimento del gioco
- 1 dado azzurro per un gioco che non riguarda gli studenti di scuola secondaria
- 1 dado blu per i giochi PYTAGORA e PYTAGORA PRO (

- Figura 3.15)
- 1 sacchetto in cotone

Figura 3.15 – La scatola del gioco, i dadi e il sacchetto di cotone del gioco *Pytagora SMARTY Puzzle*

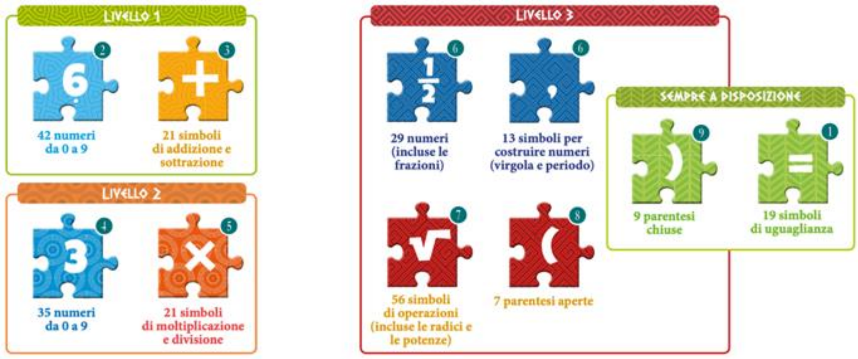


Figura 3.16 – Le diverse tipologie di pezzi di puzzle del gioco *Pytagora SMARTY Puzzle*

Ogni giocatore o squadra, che all'inizio della partita riceve una propria dotazione di numeri e simboli, deve con questi creare delle uguaglianze, guadagnando tanti punti quanti sono i pezzi usati, oltre a eventuali bonus. Alla fine di ogni turno la dotazione di pezzi viene reintegrata. Vince la partita il giocatore o la squadra che per prima raggiunge o supera il punteggio stabilito come traguardo.

Ci sono due modalità di gioco a seconda delle tipologie di pezzi di puzzle utilizzate.

Pytagora

Nel gioco base si usano solo i pezzi dei livelli 1 e 2 (Figura 3.16) insieme al segno "=" ed eventualmente alle parentesi. In genere, come illustrato già per il gioco *Rolling CUBES Pytagora*, si suggerisce di iniziare prima solo con i pezzi del livello 1 (solo cifre, addizioni e sottrazioni) e solo successivamente aggiungere i pezzi del livello 2 (moltiplicazioni, divisioni e altre cifre).

A scuola si gioca assolutamente in piccoli gruppi-squadre, in modo da evitare che ci sia qualcuno che si blocchi e il gioco non si trasformi da possibile occasione per creare un rapporto con la disciplina a incubo da cui ci si vorrebbe subito svegliare o ancora peggio rimanga in chi gioca una sensazione di ulteriore distanza dal fare matematica.

Una volta messi nel sacchetto di cotone i pezzi di puzzle del livello o dei livelli scelti, ogni squadra pesca 10 pezzi a caso dal sacchetto. Inizia la squadra che ha il maggior numero di 1 (e, in caso di parità, di 2, poi di 3 etc.) e il gioco poi prosegue in senso orario.

Figura 3.17 – La tabella del dado blu con i diversi turni di gioco possibili

Al proprio turno di gioco, la squadra di turno (SdT) deve:

3. lanciare il dado blu e seguire l'indicazione nella tabella in Figura 3.17
4. comporre una uguaglianza aritmetica, prendendo un simbolo di uguaglianza tra quelli a disposizione, utilizzando il maggior numero possibile di pezzi

Se la SdT non è in grado di comporre alcuna uguaglianza con i pezzi della propria dotazione può pescare altri 3 pezzi dal sacchetto a fronte di una penalità di 5 punti.

5. calcolare il punteggio della propria uguaglianza e sommarlo al punteggio acquisito fino a quel momento
6. pescare dal sacchetto tanti nuovi pezzi quanti ne ha appena messi in gioco, così da tornare ad averne 10. Se ha meno di 3 numeri può prenderne in più fino ad averne 3, e analogamente se ha meno di 3 simboli.

Per il calcolo del punteggio valgono le stesse regole di *Rolling CUBES Pytagora* viste nel §3.3.1 (le facce dei dadi sono ora i pezzi di puzzle) con due aggiunte legate alla diversa meccanica del gioco:

- se l'uguaglianza creata ha un pezzo di puzzle in comune con le uguaglianze giù sul tavolo, allora ci sono dei punti bonus che vengono assegnati in base al numero di "incrocio", ovvero il primo incrocio (usando un pezzo già sul tavolo) vale 1 punto, il secondo incrocio 3 punti, il terzo 5, il quarto 7, etc.
- se vengono usati tutti i pezzi della propria dotazione si guadagna un premio di 3 punti (anche qui si può definire autonomamente il punteggio di questo premio e se assegnare altri bonus a chi usa tutti i pezzi tranne uno, e così via...)

Il dado blu che determina la modalità di gioco del turno è indubbiamente una componente ludica per rendere il gioco più dinamico e frizzante, ma da un punto di vista didattico può non essere adoperata dall'insegnante che autonomamente sceglie come far giocare le squadre turno per turno o partita per partita. In particolare, si può valutare se e quando concedere agli studenti la possibilità di prolungare le uguaglianze presenti sul tavolo costruendo una "catena di uguaglianze" orizzontale o verticale.

Osservazioni

Alcune considerazioni generali prima di illustrare la seconda modalità di gioco:

7. È stabilito un verso univoco di lettura sia in orizzontale (da sinistra verso destra) sia in verticale (dall'alto verso il basso). La proprietà commutativa dell'addizione e della moltiplicazione rendono indifferente la lettura di $3+4=7$ o di $2\times 3=6$, ma in caso di operazioni non commutative o numeri con decine o centinaia il verso di lettura diventa fondamentale: $7-4=2+1$ non è la stessa cosa di $1+2=4-7$, così come $4\times 3=12$ non è uguale a $21=3\times 4$.
8. Sul tavolo NON devono essere presenti uguaglianze incomplete o prive di senso. Ad esempio, nell'immagine in Figura 3.18, pur avendo incastrato correttamente l'uguaglianza orizzontale ($3+4=2+5$) e quella verticale ($3=7-4$), ci sono diverse coppie di pezzi collegati verticalmente ($31; +0; 4-; 2+\cdots$) "non terminate" e quindi prive di senso.

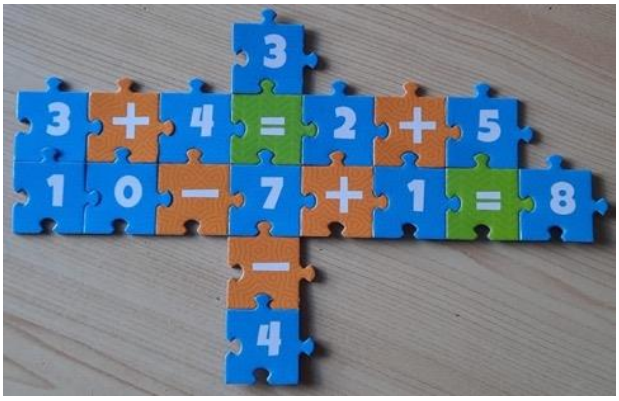


Figura 3.18 – Esempi di uguaglianze "non terminate", cioè uguaglianze incomplete o prive di senso

9. Questa è l'osservazione più importante: il simbolo "=" collocato tra due oggetti vuol dire che due oggetti sono la stessa cosa, anche se ciò non è evidente dalle apparenze. Nella storica bilancia a due piatti vuol dire che sui due piatti si trova lo stesso peso. Non c'è dubbio che spesso questo simbolo venga associato al "risultato" di un'operazione e indichi una domanda, la richiesta di fare un calcolo, come per esempio:

$$5+8=?\,;\,34-16=?\,;\,7\times 9=?\,;\,45\div 9=?$$

In questo non c'è niente di male, purché si abbia la consapevolezza che "=" non vuol dire affatto "risultato" e che quindi occorre comprenderne il significato relazionale. Oltre a ciò, infatti, il segno "="

assume erroneamente il ruolo di semplice collegamento tra un'operazione e l'altra, come nella catena di uguaglianze mostrata in Figura 3.19.

Figura 3.19 – Un esempio di uso errato del segno "="

Le catene di uguaglianze devono essere corrette (se $A = B = C$, allora $A = C$). L'esempio mostra invece un tipico errore. Se è vero che $5 \times 6 = 30$ e $30 \div 2 = 15$, non è vero che $5 \times 6 = 15$. Così il senso del simbolo "=" viene distrutto per il "timore" di rappresentare la gerarchia delle operazioni mediante un uso rigoroso dei simboli, ovvero $5 \times 6 \div 2 = 15$.

Pytagora PRO

La seconda modalità di gioco, denominata *Pytagora PRO*, ha come fondamentale differenza l'introduzione nel sacchetto dei pezzi di puzzle del livello 3 e conseguentemente il punteggio dei nuovi simboli. Inoltre, ogni squadra ha a disposizione 12 pezzi invece di 10. Per il calcolo del punteggio la parentesi aperta vale 1 punto, mentre la parentesi chiusa non vale alcun punto (e infatti è di colore verde come l'"="). I punteggi degli altri pezzi sono indicati in Figura 3.20 con due nota bene:

(*) Le radici e le potenze di 1 valgono solamente 1 punto (es. $\sqrt[3]{1}$ vale 2 punti)

(**) Dopo la virgola una cifra usata per i decimi vale 1 punto, per i centesimi vale 2 punti, per i millesimi 3 punti, etc (es. $0{,}25$ vale 8 punti: 1 + 4 + 1 + 2)

Figura 3.20 – I punteggi dei pezzi "PRO"

Nella modalità PRO, oltre alle parentesi, si aggiungono dunque le operazioni di elevamento al quadrato, al cubo, le radici, la virgola, il periodo e soprattutto le unità frazionarie. Si suggerisce di inserire queste estensioni in modo graduale proprio per permettere agli studenti di prendere praticità con il calcolo. Il ritmo di gioco sarà all'inizio più lento, ma occorre dare agli studenti il tempo di pensare, sbagliare e correggere. Non sarà immediato costruire, ad esempio, la catena di uguaglianze $2 = 6 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times 4$, ma piano piano si costruiranno uguaglianze sempre più "disinvolte" (si veda anche Figura 3.21) come:

$3{,}5 + 1{,}5 = \sqrt[3]{8} + 4 \times \frac{1}{2}$ o anche $0,\overline{3} + 4 = \frac{1}{3} + \sqrt{16}.$

Figura 3.21 – L'inizio di una partita (tratto dalla videolezione di Matematica per tutti)

3.3.4 La Boca

Il gioco viene pubblicato per la prima volta nel 2013 con la casa editrice Kosmos ed è stato ideato da Inka e Markus Brand, una coppia tedesca molto famosa nell'ambito del Game Design: dal 2006 hanno sviluppato insieme oltre 40 giochi e molti hanno ricevuto vari premi. La nuova edizione italiana di CreativaMente è del febbraio 2019: sono presenti tutte le componenti del gioco originale (a eccezione del timer) e le regole del gioco sono state revisionate da Emanuele Pessi e Luigi Regoliosi.

Il nome *La Boca* deriva dal nome di un quartiere della città di Buenos Aires, la capitale dell'Argentina, che è famoso per le numerose case vivamente colorate (si veda Figura 3.22).

Figura 3.22 – Le componenti del gioco *La Boca* e in alto a destra il quartiere di Buenos Aires con le case colorate, da cui viene il nome del gioco.

La scatola del gioco contiene:

- 1 piano di gioco, caratterizzato da una griglia quadrata di dimensione 4×4 e da 1 fessura in cui inserire la carta obiettivo
- 11 blocchi in legno (nel seguito semplicemente “pezzi”) di 11 diversi colori
- 55 carte fronte-retro con 2 obiettivi ciascuna, per un totale di 110 obiettivi. Le carte sono suddivise in: 23 carte facili (grigio chiare) e 32 carte difficili (grigio scure)

L’obiettivo del gioco è quello di costruire una struttura tridimensionale (un “palazzo”) all’interno della griglia quadrata raffigurata sul piano di gioco, rispettando la raffigurazione bidimensionale della carta. La differenza tra le carte facili e difficili consiste nel fatto che giocando con le carte facili il pezzo rosso, che è grande e complicato da posizionare, non deve essere utilizzato.

Il gioco è cooperativo e si gioca a squadre formate da due o quattro persone[155]. I giocatori (o le coppie nel caso di quartetto) si dispongono uno di fronte all’altro, posizionando una carta estratta dal mazzo all’interno dell’apposita fessura presente sul tavolo di gioco. Per raggiungere l’obiettivo richiesto vanno utilizzati **tutti i pezzi a disposizione**. Se alcuni pezzi non sono visibili nei due prospetti sui due lati della carta, devono comunque essere posizionati, nascosti all’interno della costruzione.

Figura 3.23 – Un esempio di carta e costruzione corrispondente “da tutte e due le parti”

Il gioco è dinamico, non si aspetta la mossa del proprio compagno per spostare un pezzo e i giocatori lavorano insieme e contemporaneamente, spostando i blocchi sul piano reticolato. I giocatori della stessa squadra lavorano per realizzare un obiettivo comune. Se non si vuole rinunciare alla competizione, si può stabilire un numero di carte come obiettivo da raggiungere o un tempo limite dopo il quale si contano le carte realizzate dalle diverse squadre.

Ai giocatori non è concesso di guardare l’altra faccia della carta, visibile solo al compagno, ma è consentito parlare: così si può chiedere «tu come lo vedi?[156]», «hai bisogno del pezzo giallo?» e rispondere «No, non lo vedo! Però ho bisogno del pezzo azzurro al secondo piano». A scuola certamente uno degli

155 Nelle regole ufficiali è indicata una modalità di gioco a “torneo” per più coppie di giocatori (4 o 6 giocatori suddivisi in 2 o 3 coppie) o per 3 giocatori, dove si gioca a turno in coppia con un avversario e alla fine si contano separatamente i punti ottenuti da ogni giocatore.
156 Non a caso il sottotitolo della nuova edizione del gioco è proprio *Tu come la vedi?*

aspetti più belli del gioco è proprio il feeling che si crea tra le coppie di giocatori che si trovano sempre insieme a costruire il "palazzo".

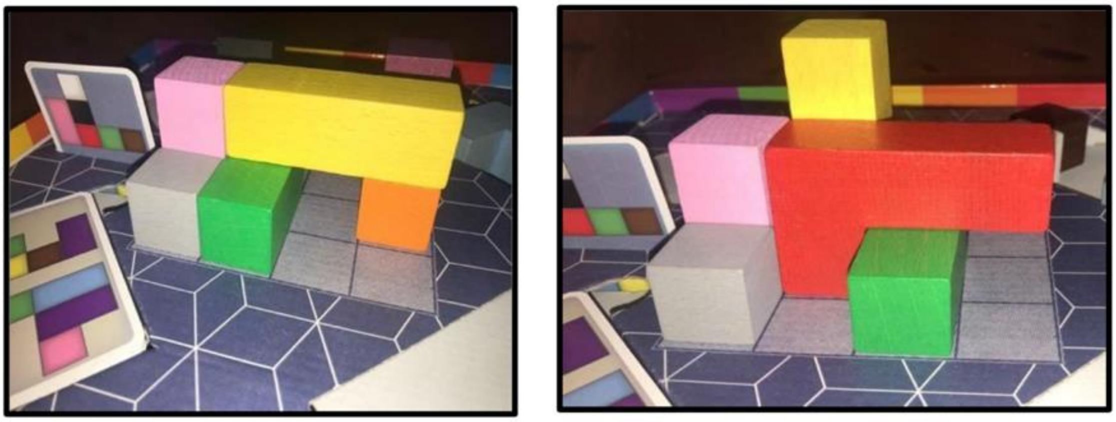


Figura 3.24 – A sinistra un "ponte" e a destra un pezzo sospeso

Nel "palazzo" non devono essere lasciati spazi vuoti sotto ai pezzi collocati, come mostrato in Figura 3.24: non si possono lasciare "ponti" o pezzi sospesi, non completamente appoggiati sul piano di gioco.

Questo gioco permette di ragionare sul *punto di vista*. Nel passaggio dalle tre alle due dimensioni si perde la profondità, sulla carta la visione bidimensionale del solido porta a pensare che tutti i pezzi siano posizionati sullo stesso piano e non che ce ne sia qualcuno "davanti" e qualcuno "dietro" (Figura 3.25) o che nella griglia siano presenti addirittura più livelli di profondità (Figura 3.26). E così ci possono essere molteplici possibilità di soluzione dello stesso obiettivo, distinte proprio dalla profondità.

Figura 3.25 - Un esempio di costruzione dove alcuni pezzi si trovano più "avanti" di altri

Figura 3.26 - Un esempio di costruzione con pezzi collocati su diversi piani

Inoltre, alcune facce dei blocchi, come nel caso del rettangolo dei parallelepipedi, possono apparire di forme diverse, magari quadrate (come, ad esempio, nel caso del pezzo rosa o del pezzo arancione nella Figura 3.26), perché davanti ad esse è posto un altro pezzo che impedisce la visione di una parte di tale facciata. In questo caso si ragiona sia sulla parte visibile che sulla parte non visibile nella carta bidimensionale.

Se si vuole definire una squadra vincitrice del gioco si può scegliere l'obiettivo da raggiungere tra questi:

- A TEMPO (15-20 minuti) vince chi realizza il maggior numero di carte. Con ogni carta si possono fare due partite; la carta è considerata terminata quando si sono completate entrambe le possibilità di gioco.
- A CARTE OBIETTIVO: si stabilisce un numero di carte da realizzare. Vince chi riuscirà a raggiungere l'obiettivo nel minor tempo.

Una possibile variante del gioco è "*La Boca* dall'alto". Si può presentare una visione della struttura tridimensionale unicamente dall'alto. I giocatori collaboreranno insieme prendendo visione della stessa rappresentazione bidimensionale.

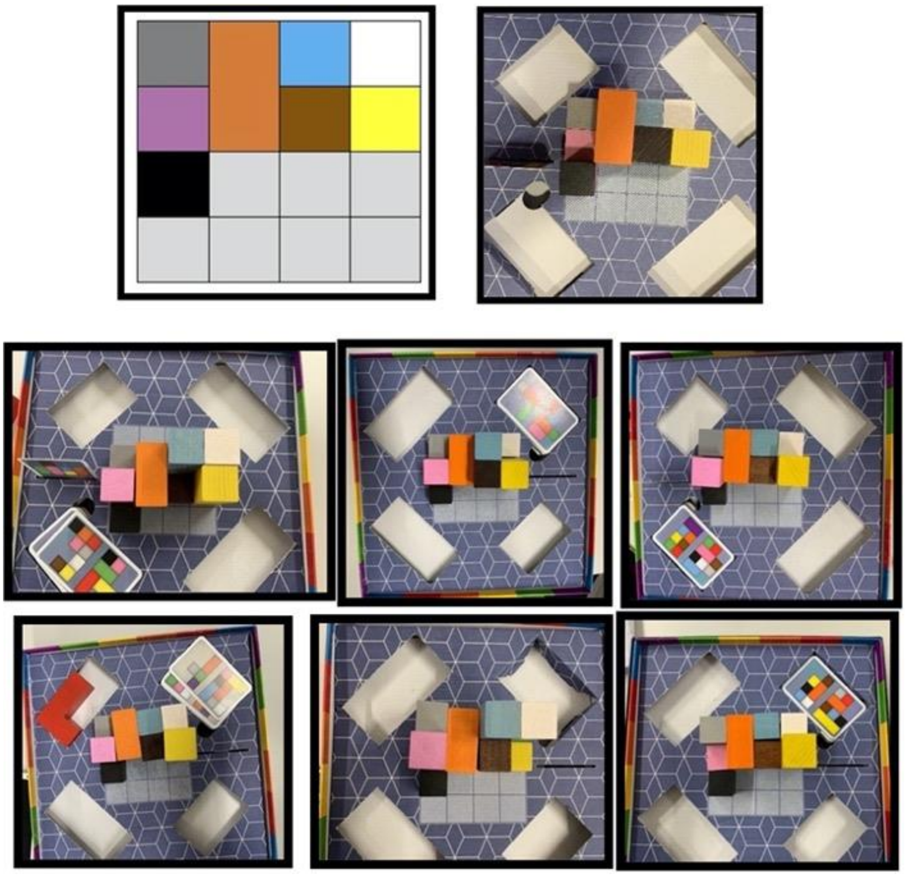


Figura 3.27 - Un esempio di visione dall'alto e alcune costruzioni soluzione

Si potrà in questo modo far ragionare gli studenti su quante possibili combinazioni possano esistere per una stessa visione dall'alto e ragionare più apertamente sulla profondità, che nelle due dimensioni non conta, mostrando come ci siano molte costruzioni con i pezzi collocati ad altezze differenti. Nell'esempio in Figura 3.27 si trova una visione dall'alto, a partire da una carta del gioco e poi vengono proposte alcune delle diverse soluzioni possibili.

Giocare solo con la visione dall'alto permette di comprendere come una sola visione renda più ampia la varietà di soluzioni possibili e, ancora, come la visione dall'alto permetta di approfondire il concetto di profondità nello spazio, che si perde nella sola visione dall'alto che non permette, ad esempio, di conoscere il numero di piani di cui è costituito il palazzo.

Si potrebbero, infine, combinare le due modalità di gioco aggiungendo la visione dall'alto alle due già presenti nelle carte, portando così a tre i vincoli per costruire il palazzo e rendendo la soluzione quasi univoca. Per un lavoro strutturato sulle diverse visioni si rimanda all'Appendice D.2.

3.3.5 SET

Il gioco di carte *SET* è stato inventato dalla genetista Marsha Jean Falco nel 1974. Stava studiando l'epilessia nei pastori tedeschi e ha iniziato a rappresentare i dati genetici sui cani disegnando simboli su carte e poi cercando modelli nei dati. Da questo lavoro, con l'incoraggiamento di amici e familiari, ha sviluppato e commercializzato il gioco di carte fondando nel 1991 la casa editrice di giochi *Set Enterprises*[157] che poi lo ha distribuito negli Stati Uniti. Da allora è diventato un enorme successo e nel 2019 CreativaMente ha ottenuto i diritti per distribuirlo in Italia.

Figura 3.28 – La scatola e alcune carte del gioco SET

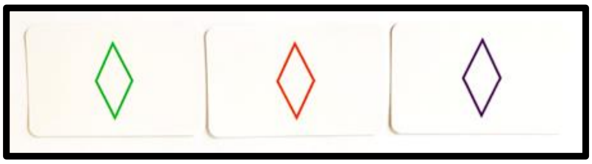
Nella scatola sono presenti 81 carte da gioco. Ogni carta è unica e si differenzia dalle altre in base alle possibili caratteristiche delle 4 categorie:

- **Categoria Numero**: ogni carta contiene uno, due o tre simboli;
- **Categoria Forma**: i simboli possibili sono ovale, onda e rombo;
- **Categoria Colore**: i simboli possono essere rossi, verdi o viola;
- **Categoria Riempimento**: i simboli possono essere pieni, rigati o vuoti.

157 Nell'aprile 2019 Set Enterprises è stata acquisita dall'azienda Play Monster.

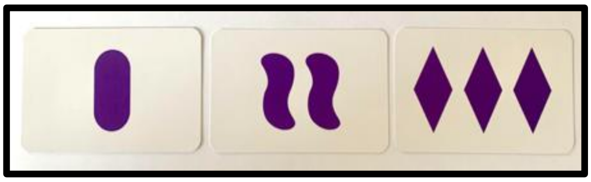
Scopo del gioco è quello di individuare più SET possibili all'interno di un insieme di 12 carte.

Un SET è formato da 3 carte che, **per ciascuna categoria, hanno TUTTO UGUALE O TUTTO DIVERSO**, ovvero hanno tutte le caratteristiche uguali (ad esempio, tutte verdi, e/o tutte rigate, e/o tutte con due simboli, e/o tutte onde) o tutte le caratteristiche differenti (ad esempio, una verde, una viola e una rossa). Per essere certi di aver individuato un SET è sufficiente controllare che all'interno del terzetto scelto non ci siano due carte che abbiano una caratteristica in comune non presente nella terza carta (ad esempio, se ci sono due carte verdi anche la terza deve essere verde, se ci sono due carte rigate anche la terza deve essere rigata). Tutte e quattro le categorie devono sempre essere prese in considerazione contemporaneamente (Figura 3.29): se anche in una sola categoria non è soddisfatta la condizione del TUTTO UGUALE o TUTTO DIVERSO, il SET non è valido (Figura 3.30).

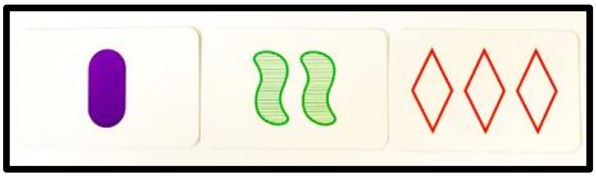


È un SET perché **tutte e tre** le carte hanno stesso numero, stesso riempimento, stessa forma e diverso colore

È un SET perché **tutte e tre** le carte hanno stesso colore, stesso riempimento, stessa forma e diverso numero

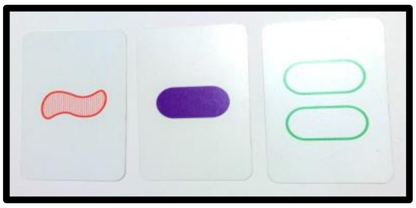


È un SET perché **tutte e tre** le carte hanno stesso colore, stesso riempimento, diverso numero e diversa forma

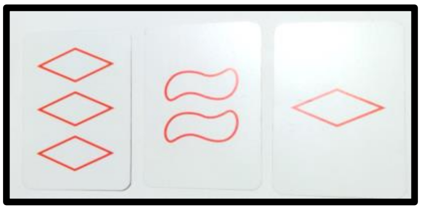


È un SET perché **tutte e tre** le carte hanno diverso colore, diverso riempimento, diverso numero e diversa forma (TUTTO DIVERSO!!!)

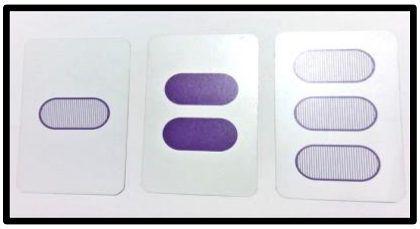
Figura 3.29 – Quattro esempi diversi di SET



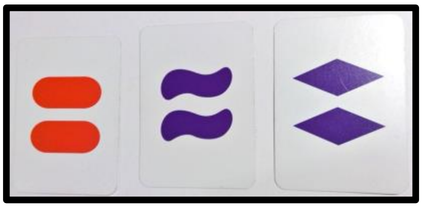
Questo SET sarebbe valido per le categorie colore (tutto diverso) e riempimento (tutto diverso) ma non è valido per le categorie forma (un'onda e due ovali) e numero (due 1 e un 2).



Questo SET sarebbe valido per le categorie colore (tutto uguale, rosso), riempimento (tutto uguale, vuoto) e numero (tutto diverso), ma non è valido per la categoria forma (due rombi e un'onda).



Questo SET sarebbe valido per la categoria colore (tutto uguale), forma (tutto uguale) e numero (tutto diverso) ma non lo è per la categoria riempimento (due rigati e un pieno).



Questo SET sarebbe valido per la categoria numero (tutto uguale), riempimento (tutto uguale) e forma (tutto diverso), ma non lo è per la categoria colore (due viola e una rossa).

Figura 3.30 – Quattro esempi diversi di "non SET"

Il training test e gli assiomi di SET

In genere, non sono sufficienti solo alcuni esempi - come quelli mostrati - per comprendere come si trova un SET. E allora per verificare se si è compresa la logica si può fare una specie di "training test" così strutturato:

- si pescano a caso due carte dal mazzo
- si chiede «qual è la terza carta che forma un SET con le due pescate?»
- si risponde fornendone la descrizione per ciascuna categoria ed eventualmente cercandola all'interno del mazzo

Una volta superato il test per almeno due volte consecutive e con dei tempi di reazioni ragionevolmente rapidi si può iniziare a giocare. Un esempio di test può essere il seguente, date le carte in Figura 3.31 qual è la terza carta che completa il SET?

Figura 3.31 – Date due carte qual è la terza che completa il SET?

Per rispondere alla domanda, bisogna osservare le caratteristiche che deve avere per ciascuna categoria:

- **1** come NUMERO in quanto sono presenti numeri diversi e dunque anche il terzo deve essere diverso e ci sono già i numeri 2 e 3
- **rosso** come COLORE in quanto sono presenti colori diversi e dunque anche il terzo deve essere diverso e ci sono già i colori viola e verde
- **rombo** come FORMA in quanto sono presenti forme diverse e dunque anche la terza deve essere diversa e ci sono già le forme ovale e onda
- **pieno** come riempimento in quanto è presente solo il riempimento pieno e dunque anche il terzo deve essere pieno

La terza carta che risponde alla domanda è dunque UN ROMBO ROSSO PIENO.

L'aspetto interessante di questo lavoro introduttivo al gioco è che **esiste sempre un'unica terza carta che forma un SET con altre due carte date**. Quando è stato distribuito il gioco non si era mai riflettuto su questa affermazione, poi giocando e studiando la letteratura scientifica si è visto che addirittura esisteva qualcuno che aveva applicato gli assiomi della Geometria Piana Affine al gioco SET (McMahon et al 2017):

> Axiom 1. There at least three cards that are not in the same SET. […]
>
> Axiom 2. Every SET contains at least two cards. […]
>
> Axiom 3. Two cards determine a unique SET.
>
> SET interpretation: Every pair of cards determine a unique SET. We've been calling this the "fundamental theorem of SET."
>
> Axiom 4. For any SET and any card not in the SET, there is exactly one SET containing this card that is parallel to the original SET [McMahon et al 2017, p. 104]

È chiaro come il primo assioma si riconduca all'assioma della geometria per cui «ci sono almeno tre punti non allineati (ovvero che non appartengono alla stessa retta)» e l'esempio di un "non SET" è facile da ottenere: si tratta di trovare una terza carta che non formi un SET con altre due date (si vedano gli esempi in Figura 3.30).

Il secondo assioma è ovvio perché ogni SET contiene tre carte, quindi almeno due (il parallelismo è con l'assioma «ogni retta contiene almeno due punti»).

Il terzo assioma è quello che è stato utilizzato per il training test ed è chiamato «il teorema fondamentale di SET» e si collega in maniera evidente con l'assioma della geometria «per due punti passa una e una sola retta».

Il quarto assioma è più complesso perché richiede di definire il concetto di "parallelismo" nel mondo di SET: si rimanda alla trattazione completa sviluppata nel capitolo «SET and Geometry» del libro *The joy of SET* (McMahon 2017). In questo libro, oltre al percorso sulla geometria (che arriva agli iperpiani!), sono sviluppati anche molti aspetti interessanti del gioco dal punto di vista probabilistico, combinatorio e dell'aritmetica modulare.

Come si gioca

Tornando ora al gioco, la meccanica di una partita è piuttosto semplice.

Anzitutto si sceglie un mazziere che sarà l'unico autorizzato a disporre le carte sul tavolo. Il mazziere, dopo aver mescolato le carte da gioco, ne pone 12 scoperte sul tavolo a formare una griglia rettangolare. I giocatori, singolarmente o in squadra (non più di 3 squadre intorno allo stesso tavolo), osservano attentamente la griglia alla ricerca di un SET.

Le carte non vanno toccate né spostate durante la ricerca dei SET, per non interferire con l'osservazione di tutti i giocatori.

Il primo che riesce a individuarne uno dice ad alta voce "SET" e indica le tre carte agli avversari che dovranno validare il SET. Se il SET risulta corretto, il giocatore che l'ha individuato prende le tre carte togliendole dalla griglia e le mette nel mazzo della propria squadra.

Il mazziere prende tre nuove carte e le dispone sul tavolo, formando di nuovo la griglia da 12.

Si procede fino al termine di un tempo prestabilito o fino al termine delle carte.

Vince il giocatore o la squadra che alla fine avrà collezionato più SET.

Non esistono turni di gioco: i giocatori che di volta in volta individuano un SET hanno il controllo di quella mano; finché non hanno dimostrato che il SET è giusto e non hanno prelevato e sostituito le tre carte gli altri giocatori non possono indicare un altro SET.

Se un giocatore indica un SET sbagliato le carte restano nella griglia.

Se nessun giocatore riesce a individuare un SET, il mazziere inserisce altre 3 carte all'interno della griglia (che sarà quindi formata da 15 carte); quando un giocatore individua un SET la griglia torna a essere di 12 carte e non se ne devono inserire altre 3: si ripristina la situazione di 12 carte.

Se non si riesce a individuare un set neanche con 15 carte, il mazziere riprende tutte le carte dal tavolo e le ripone nel mazzo, mescola e ne dispone 12 nuove sul tavolo.

A scuola inizialmente il mazziere può essere l'insegnante e successivamente si può affidare questo ruolo agli studenti che hanno compreso al meglio il gioco. Trascurando il fatto non banale delle diverse pubblicazioni relative agli aspetti matematici del gioco (in conclusione si riportano alcuni risultati significativi), si vogliono riportare alcune considerazioni per il lavoro in classe:

- il gioco permette di migliorare la capacità di considerare più condizioni e più dati contemporaneamente, scegliendo tra questi solo quelli utili allo scopo. La capacità di riuscire a gestire più informazioni e di selezionare quelle utili risulta di fondamentale importanza anche nella risoluzione di un qualsiasi problema matematico.
- Per studenti che presentano Difficoltà Specifiche di Apprendimento, o disabilità, o che risultano avere difficoltà di approccio al gioco, si può proporre, in una fase iniziale, una modalità più semplice: invece di tener conto di tutte e 4 le categorie, si decide di escluderne una, scegliendo ad esempio di non considerare il "colore", selezionando dal mazzo tutte le carte di uno stesso colore (solo verdi o solo rosse o solo viola) e concentrandosi quindi solo sulle altre 3 categorie.
- Qualora siano presenti giocatori daltonici, per coloro che sono affetti da protanopia (cecità per il rosso) e da deuteranopia (cecità per il verde) è sufficiente segnare con una R le carte rosse e con una V le carte verdi, ovviando in tal modo alla loro difficoltà senza influire in alcun modo sugli altri giocatori.
- Spesso si crede che sia più difficile trovare un SET con tutto diverso in tutte le categorie. In realtà, si trova ciò che si cerca ed è più frequente (non più facile!) cercare un SET dove ci sia almeno una caratteristica in comune in una categoria piuttosto che un SET con nessuna caratteristica in comune.
- Giocando in squadra e non tutti contro tutti il gioco può diventare cooperativo e inclusivo. Se un giocatore indica un "non SET", un compagno di squadra può cercare e trovare il corretto completamento. L'errore di un giocatore può essere comunque d'aiuto ai compagni di squadra! Interessante potrebbe essere poi, all'interno della stessa squadra, "dividersi i compiti": ciascun componente può specializzarsi nella ricerca di una determinata tipologia di SET per ottimizzare i tempi di ricerca (la pratica del gioco porterà gli studenti a osservare che ciascuno vede in maniera più immediata alcune tipologie di SET rispetto ad altre). La peculiarità di ciascuno è quindi al servizio della squadra!

Curiosità dal libro "The joy of SET" (McMahon et al 2017)

Come promesso, in conclusione di questo paragrafo, si vogliono riportare tre numeri particolarmente significativi tratti sempre dal libro del 2017 di McMahon et al:

10. si possono realizzare 1080 SET diversi. Dal «teorema fondamentale», infatti, $\frac{81\times80\times1}{3!} = 1080$
11. ogni carta è presente in 40 SET diversi
12. servono almeno 21 carte sul tavolo per essere certi di trovare un SET!

Il terzo numero è il più impressionante, soprattutto per chi conosce bene il gioco e ha giocato molte volte: si tratta di accettare che esista un tavolo con 20 carte che non contiene un SET. Nel libro viene proposto un esempio, ma si è scelto di riportare in Figura 3.32 quello presentato in un altro interessante articolo *The card game set* (Davis, MacLagan 2003).

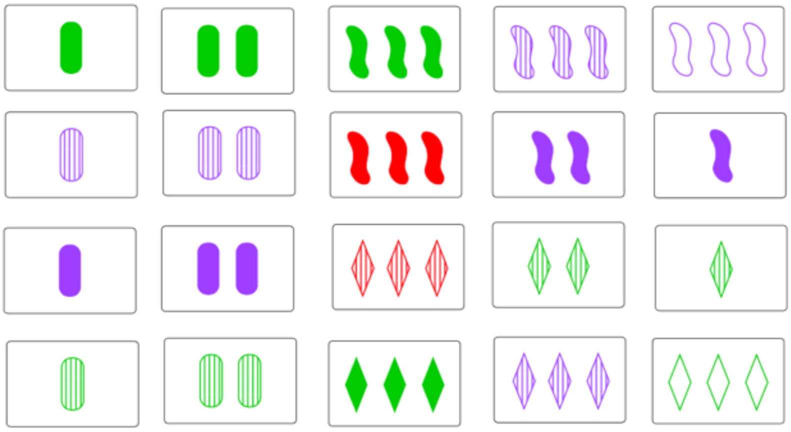


Figura 3.32 – 20 carte senza un SET [Davis, MacLagan 2003, p. 3]

A confermare il grande successo del gioco il New York Times ha dedicato a SET uno spazio quotidiano sul proprio sito per diversi anni fino al luglio 2020 (si veda Figura 3.33).

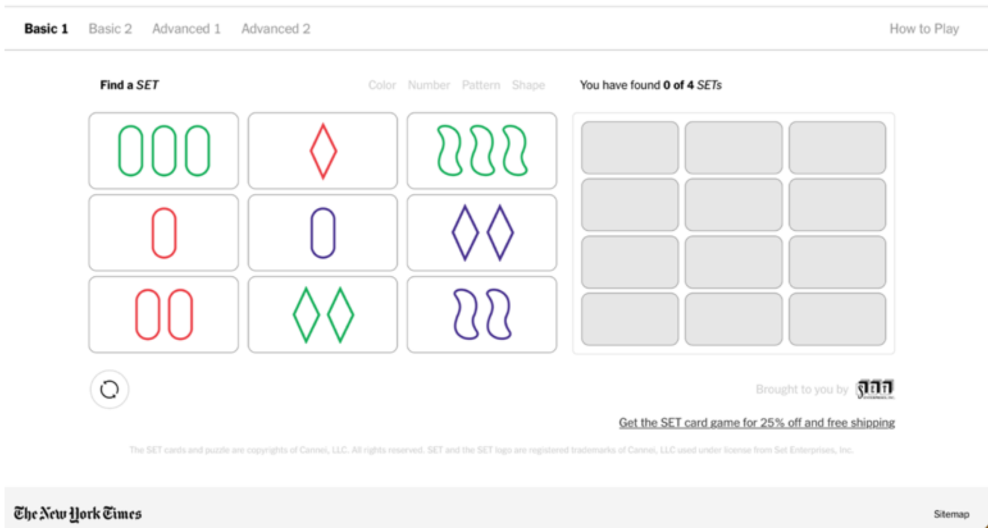


Figura 3.33 – Uno screenshot di repertorio dal sito del New York Times, dove erano presenti quattro proposte quotidiane di gioco: 2 Basic con 9 carte e 4 SET da trovare e 2 Advanced con 12 carte e 6 SET da trovare.

Ora è possibile giocare online[158] sul sito ufficiale (https://www.setgame.com/set/puzzle) con una sfida quotidiana dove è presente un tavolo con 12 carte tra le quali bisogna trovare i 6 SET nascosti.

3.3.6 FUNB3RS

Il gioco *FUNB3RS* è uscito nell'ottobre 2021 e ha come autori Emanuele Pessi, Luigi Regoliosi e Valentina Celi. Il gioco principale nasce dalle idee che hanno ispirato i lavori di Valentina Celi intorno a calcolo ragionato e calcolatrice (si veda §3.4.2), mentre i giochi *Le tabelline* e *Codici di attivazione* sono frutto del lavoro di Luigi Regoliosi intorno a calcolo mentale e rompicapo aritmetici.

Figura 3.34 – La scatola del gioco *FUNB3RS*

Anche questo gioco viene fornito in modalità kit alternativa alla scatola. A scuola pedine e percorso segnapunti, infatti, non servono e sono sufficienti le seguenti componenti del gioco (Figura 3.35):

- 3 dadi a 10 facce con le cifre da 0 a 9: unità (blu), decine (rosso) e centinaia (verde)
- 4 console con:
  - 1 tastierino numerico
  - 3 mini-display
  - 10 device numerati da 1 a 10
  - 1 display su cui scrivere e cancellare
- 4 pennarelli cancellabili e 4 cancellini
- 28 gettoni in cartone, di cui:
  - 16 gettoni divieto e 8 gettoni obbligo, con 24 tasti-attivazione sul retro
  - 4 gettoni jolly
- 1 ruota in cartone con freccia girevole

[158] Esiste anche un altro sito dove si può giocare a *SET* sfidando altri giocatori registrati e scoprire la versione «Scrabble» del gioco https://smart-games.org/en/set/

Figura 3.35 – Le componenti di un kit del gioco *FUNB3RS*

Il gioco è uscito da pochissimo e dunque non ha fatto parte delle prime tre edizioni di Matematica per tutti e non c'è stata la possibilità di raccogliere riscontri effettivi sull'esperienza del gioco in classe, a eccezione di una formazione docenti svoltasi a Novara (15 novembre 2021), dove il gioco è stato utilizzato all'interno di un percorso laboratoriale di giochi aritmetici in cui gli insegnanti hanno potuto giocare con *FUNB3RS*, dopo essersi cimentati con *Rolling CUBES Pytagora* e con *Pytagora SMARTY Puzzle*. Naturalmente l'esperienza permetterà, come per gli altri giochi, di metterne in luce al meglio punti di forza, limiti e particolari su cui si può lavorare, ma si ritiene comunque importante riportare i dettagli su come si può giocare a scuola, dal momento che uno degli autori di *FUNB3RS* è proprio chi scrive e il gioco è nato per dare forma concreta a qualcosa che veniva già proposto all'interno dei quesiti dell'ambito Aritmetica.

Ci sono dunque tre modalità gioco e a scuola si può giocare singolarmente o in squadre come per gli altri giochi presentati.

Il gioco FUNB3RS

Si comincia dal gioco principale che prende le mosse dai quesiti «Calcolo, ragionamento e calcolatrice» dell'ambito Aritmetica: sinteticamente, infatti, si tratta di "tradurre numeri di tre cifre in piccole espressioni" rispettando alcune condizioni sulle cifre e sulle operazioni che si possono utilizzare. Ad esempio, si può chiedere (Figura 3.36) di scrivere un'espressione che dia come risultato il numero 364 senza poter utilizzare né le cifre 4 e 6, né le operazioni $+$ e $\times$. Cifre e operazioni corrispondono ai tasti rappresentati su una console plastificata (si veda Figura 3.35). Su questa console è disponibile uno spazio bianco (display), dove i giocatori (o squadre), nell'ordine, scrivono le loro espressioni, come ad esempio:

A) $364 = 728 \div 2$, B) $364 = 370 - 5 - 1$, C) $364 = 370 - 6$.

I giocatori A e B hanno rispettato tutte le condizioni, mentre il giocatore C ha usato la cifra 6 che era vietata. Per capire chi ha vinto e chi ha perso – ammesso che interessi! – occorre entrare un po' di più nel dettaglio delle regole.

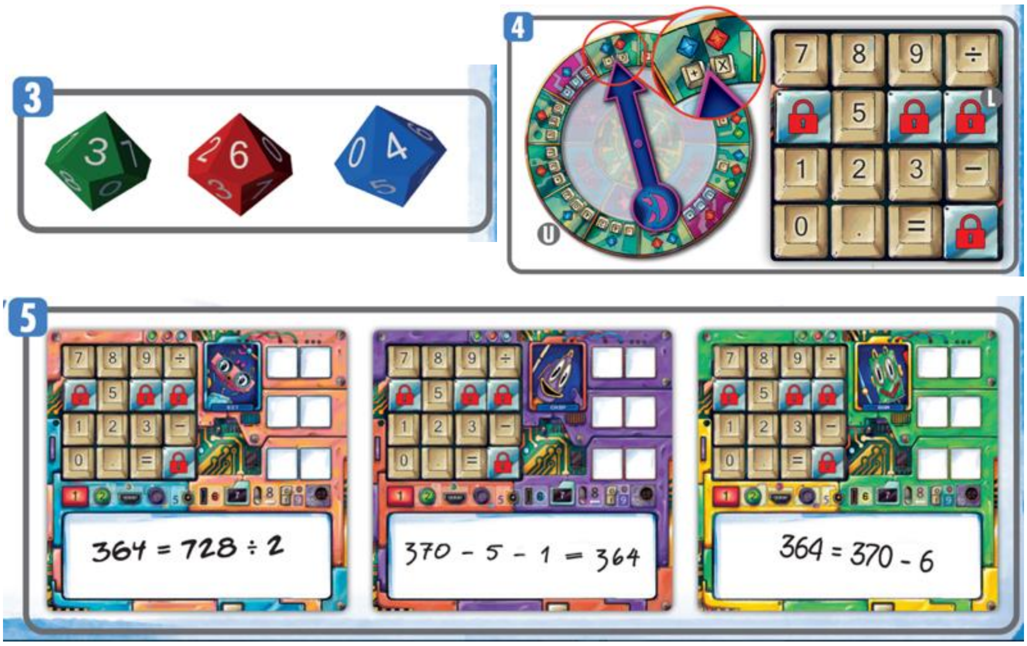


Figura 3.36 – Un esempio di turno del gioco *FUNB3RS* dove è uscito il numero 364 e non si possono usare i tasti $4,\ 6,\ +,\ \times$

Ogni giocatore o squadra riceve 1 pennarello, 1 cancellino e 7 gettoni. Come per gli altri giochi si stabilisce all'inizio del turno di gioco (o dell'intera partita) la modalità di prova da affrontare e gli eventuali criteri di assegnazione del punteggio. Nelle regole si distinguono due tipi di prove: "di velocità" e "a tempo" (Figura 3.37). Si può far scegliere alla ruota il tipo di prova oppure, come per *Polyminix* o *Pytagora SMARTY Puzzle*, è l'insegnante che decide per tutti. In realtà tre prove (due di velocità e una a tempo) riguardano solo il criterio di assegnazione del punteggio, mentre sono particolarmente interessanti da un punto di vista didattico le prove che prevedono delle condizioni aggiuntive a quelle del gioco principale:

- MENO TASTI: si chiede di utilizzare il minor numero di tasti (anche uguali).
- PIÙ TASTI: si chiede di utilizzare il maggior numero di tasti (diversi).
- DOPPIA ESPRESSIONE: si chiede di scrivere DUE diverse espressioni invece che una. Le due espressioni devono avere almeno tre "tasti" diversi.

Figura 3.37 – Le diverse tipologie di prova del gioco *FUNB3RS*

Si immagini, ad esempio, una situazione di gioco come questa:

A) $767 = 800 - 33$ B) $767 = 1800 \div 2 - 129 - 4$

Se la prova fosse MENO TASTI, chiaramente vincerebbe A, e analogamente, se la prova fosse PIÙ TASTI, vincerebbe B (ben 5 tasti diversi!).
Come DOPPIA ESPRESSIONE si potrebbero usare le espressioni proposte da A e B in quanto soddisfano la condizione di avere almeno tre tasti diversi.

Stabilito il tipo di prova l'insegnante (o uno studente a sua scelta) lancia contemporaneamente i 3 dadi per definire il "bersaglio" del turno di gioco. In tutti i lanci dei 3 dadi il dado verde indica le centinaia, il rosso le decine e il blu le unità.

Subito dopo si gira la freccia sulla ruota e si scopre quali sono i 4 tasti vietati per questo turno e tutti i giocatori posizionano sopra la propria console i 4 gettoni divieto.

A questo punto ogni giocatore o squadra scrive l'espressione-risultato sul display della propria console. In questa fase si può cancellare e riscrivere finché vuole.

Quando tutti hanno terminato la prova oppure quando lo stabilisce l'insegnante, si verifica la correttezza di ogni espressione. Alla fine delle verifiche vengono eventualmente assegnati i punteggi se si vuole stilare una classifica al termine della partita.

Esiste la possibilità di un gettone jolly che, una volta giocato, consente di aggiungere uno tra i 2 obblighi, moltiplicazione o divisione, a propria scelta; il gettone Jolly viene rimesso nella scatola perché ogni giocatore lo può giocare solo 1 volta nella partita e tutti i giocatori posizionano il gettone obbligo sul corrispondente tasto della calcolatrice della propria console. Qualora uno dei 4 tasti vietati sia la moltiplicazione e il giocatore o la squadra di turno ha usato il gettone obbligo moltiplicazione, il gettone divieto viene posto sopra il gettone obbligo e lo inibisce.

D'altra parte, a scuola l'uso del gettone jolly e dei conseguenti obblighi può essere deciso dall'insegnante che a suo piacimento sceglie di far giocare singoli turni o intere partite con l'obbligo di utilizzare la moltiplicazione o la divisione, magari proprio per verificare la capacità di calcolo dei propri studenti e l'ingegnosità nell'individuare strategie.

Come nel caso di *Rolling CUBES Pytagora* e *Pytagora SMARTY Puzzle*, vengono vietate le operazioni banali, con alcuni ulteriori divieti rispetto agli altri due giochi aritmetici. Non si può:

- sommare o sottrarre 0
- moltiplicare o dividere per 1
- moltiplicare per 0
- dividere lo 0
- sommare e poi sottrarre lo stesso numero (es. non è valido $3 \times 7 + 2 - 2 = 21$)
- sommare lo stesso numero più di 2 volte, e lo stesso divieto vale per la sottrazione e per la moltiplicazione (es. non è valido $3 \times 5 + 1 + 1 + 18$ né $3 \times 9 - 2 - 2 - 2 = 21$)

Alcune piccole osservazioni prima di illustrare gli altri due giochi:

- anche se si sta usando una calcolatrice, i calcoli seguono la normale priorità delle operazioni: moltiplicazione e divisione prima di addizione e sottrazione (es. $10 + 9 \div 3 = 13$)
- un'espressione è valida se e solo se, oltre a essere aritmeticamente corretta, non è stato usato alcuno dei 4 tasti vietati e, se richiesto, è stato usato il tasto del gettone obbligo. Ma naturalmente questo non impedisce all'insegnante di premiare anche le soluzioni parzialmente corrette, in particolare quelle aritmeticamente corrette ma che hanno impiegato un tasto vietato.
- è possibile terminare il turno scrivendo sul display "FUNB3RS", per indicare che si ritiene che non esista alcuna espressione. È molto interessante questa situazione perché, al di là del discorso relativo ai punteggi per cui si rimanda alle regole ufficiali del gioco, a scuola può essere un'occasione per riflettere su come lavora un matematico e dedicare dunque del tempo alla ricerca di un'espressione valida che contraddica quanto scritto oppure di argomenti concreti per sostenere l'impossibilità di questa soluzione. Un esempio "estremo" è la situazione seguente: il numero-bersaglio è 0 (su tutti i dadi è uscito 0) e sono vietate le operazioni $+$ e $-$. In questo caso è impossibile trovare un'espressione che dia come risultato il numero-bersaglio, poiché non esiste numero che moltiplicato o diviso per un altro numero diverso da zero possa dare come risultato zero!

Il gioco delle tabelline

L'insegnante (o uno studente a sua scelta) lancia i 2 dadi blu e rosso per ottenere un bersaglio, che sarà lo stesso per tutti. A differenza del gioco precedente, il numero massimo di giocatori è 4: si suggerisce quindi di suddividere la classe in 4 squadre o di creare tavoli da gioco costituiti da 4 studenti ciascuno.

Se tale bersaglio corrisponde ad almeno un calcolo esatto preso da una tabellina (es. 24), allora lo si può ottenere SOLO scrivendo un calcolo preso da una tabellina (es. si può scrivere 4×6 e cancellare la tabellina del 4, oppure 3×8 e cancellare il 3, ma non si può scrivere $5 \times 4 + 4$ per cancellare il 5).

Se invece il bersaglio non corrisponde ad alcun calcolo esatto preso da una tabellina (es. 61), allora il bersaglio può essere raggiunto sommando o sottraendo 1, 2, 3 o 4 al risultato di un qualsiasi calcolo preso da una tabellina (es. si può scrivere $6 \times 10 + 1$ e cancellare il 6, oppure $7 \times 9 - 2$ oppure anche $8 \times 8 - 3$).

Se infine il bersaglio è 95 (l'unico bersaglio che non può mai essere raggiunto) allora si può scegliere di cancellare il numero che si vuole.

Tutti i giocatori scrivono contemporaneamente sul display della propria console, e quando la prova è terminata si prende in considerazione il PRIMO numero dell'espressione che corrisponde alla tabellina moltiplicativa. Es: $34 = 4 \times 8 + 2$ corrisponde alla tabellina del 4.

In senso orario a partire dal giocatore o dalla squadra di turno (GdT) ognuno mostra la propria espressione. I numeri "UNICI", che sono diversi da quelli dichiarati dai giocatori precedenti, vengono cancellati sulla propria console col pennarello. Se invece un giocatore ha scritto un numero già dichiarato da un giocatore precedente allora non può cancellarlo.

In sintesi, in ogni turno di gioco possono verificarsi questi 2 casi:

- Caso A: il bersaglio corrisponde ad almeno un calcolo esatto preso da una tabellina e lo si può raggiungere solamente scrivendo un calcolo preso da una tabellina.
- Caso B: il bersaglio non corrisponde ad alcun calcolo esatto preso da una tabellina e può essere raggiunto sommando o sottraendo 1, 2, 3 o 4 al risultato di un qualsiasi calcolo preso da una tabellina.

Quando tutti i giocatori hanno scritto la propria espressione, si cancellano i numeri sui device (Figura 3.38), iniziando dal GdT e proseguendo in senso orario.

Figura 3.38 – 10 device numerati da 1 a 10 per il *gioco delle tabelline*

Si cancella il PRIMO numero dell'espressione che corrisponde alla tabellina (es: con $24 = 6 \times 4$ si cancella il 6), ma solo se non è già stato cancellato in quel turno da un altro giocatore.

Figura 3.39 - Il bersaglio è 24. BIT è il GdT e cancella il 6, mentre CHIP cancella l'8. RAM non cancella il 6 (perché è già stato cancellato da BIT) e PIXEL non cancella il 5 (perché bisognava scrivere una tabellina esatta).

Figura 3.40 - Il bersaglio è 37. BIT è il GdT e cancella il 6, mentre CHIP e RAM cancellano l'8 e il 5. Invece PIXEL non cancella il 5 (perché è già stato cancellato da RAM).

Dopo il lancio dei 2 dadi, e prima di scrivere la propria espressione, si può giocare il proprio jolly (una sola volta a partita), che consentirà di cancellare il proprio numero anche se già cancellato da un precedente giocatore nello stesso turno di gioco. Nell'esempio A (Figura 3.39) se RAM avesse giocato il jolly avrebbe potuto cancellare il 6, anche se era già stato cancellato da BIT.

Nelle regole ufficiali sei tabelline ($2, 3, 5, 6, 8, 9$) valgono 1 punto e quattro tabelline ($1, 4, 7, 10$) valgono 2 punti e si vince quando si raggiungono o si superano i 13 punti: ciò significa che si vince solamente cancellando tutte le tabelline o nove tabelline su dieci (nel caso in cui siano state cancellate le tabelline che valgono doppio). Naturalmente a scuola si può decidere di cambiare il criterio di assegnazione del punteggio o si può richiedere di cancellare tutte e 10 le tabelline.

Per quanto sia basato su concetti di aritmetica di base molto semplici (le tabelline sono argomento di scuola primaria), il gioco non richiede solamente la conoscenza delle tabelline, dei multipli e dei sottomultipli entro il 100, ma occorre prestare anche molta attenzione alle scelte che possono compiere gli altri giocatori, soprattutto quando non si è primi di turno e non si è sicuri di poter cancellare una tabellina. È importante osservare nel corso della partita le scelte compiute dagli altri giocatori, perché non si tratta solamente di scrivere sul display un'espressione corretta come nel primo gioco, ma stavolta quello che si scrive non deve essere stato scritto da nessun altro giocatore prima.

Codici di attivazione

Il terzo e ultimo gioco è sicuramente il più complesso dal punto di vista del calcolo.

Lo scopo del gioco è “attivare” prima degli altri giocatori le coppie di 3 codici scritte sul proprio mini-display (Figura 3.41). I codici sono costituiti da un numero compreso tra 11 e 99 e l’attivazione è l’aspetto più complesso del gioco: si tratta di un’attività ispirata a quanto descritto nel §2.2, con numeri-bersaglio e quattro numeri da combinare in un’espressione aritmetica per “colpirli”, anzi attivarli!

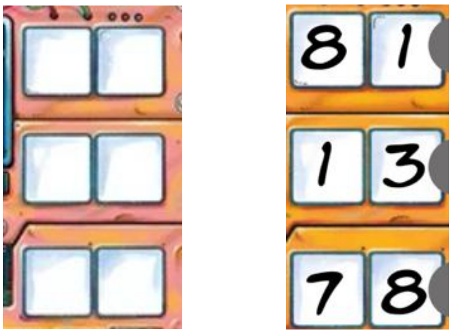


Figura 3.41 – I 3 mini-display per il gioco *Codici di attivazione*

Ogni giocatore ottiene i propri 3 codici di attivazione, e li scrive sulla propria console (Figura 3.41), lanciando 3 volte i 2 dadi rosso e blu (il lancio va ripetuto se il dado rosso indica 0, oppure se i 2 dadi indicano uno stesso numero).

Rimane da capire come funziona il turno di gioco e l’eventuale attivazione. L’insegnante o i giocatori (alternandosi a piacere o su indicazione dell’insegnante) devono lanciare 4 volte i 2 dadi. Si suggerisce di farli lavorare in squadre, da una parte perché sia possibile la partecipazione di tutti, dall’altra perché sia possibile una conversazione matematica tra pari e con il docente. A differenza del gioco precedente, si possono prevedere anche più di 4 squadre.

A ogni lancio dei 4 previsti per turno ogni giocatore o squadra deve scegliere un numero-combinazione, che scrive sul display della propria console. Il numero-combinazione può essere scelto decidendo di prendere solo l’unità, solo la decina oppure il numero completo.

Se ad esempio i due dadi indicano 64, si può scegliere 4 oppure 60 oppure 64.

Naturalmente se uno dei due dadi indica 0, il numero-combinazione si può scegliere solo tra 2.

Al termine dei 4 lanci ogni giocatore ha a disposizione 4 numeri-combinazione, scritti sul display della propria console. A questo punto ogni giocatore deve usare tutti e 4 i numeri-combinazione per scrivere un’espressione il cui risultato corrisponda a uno dei 3 codici di attivazione, o almeno a una delle loro 6 cifre. Se vi riesce posiziona 1 o 2 dei propri gettoni tasti-attivazione sulla console in corrispondenza della cifra o del numero intero corrispondente come mostrato in Figura 3.42. Nell’espressione è anche possibile usare le parentesi, ma naturalmente non è consentito né moltiplicare per 0 né dividere lo 0.

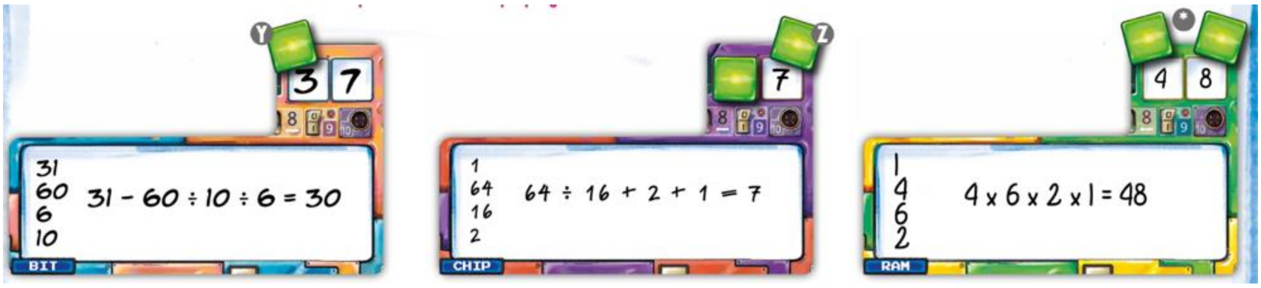


Figura 3.42 – Un esempio di turno di gioco dove i quattro lanci hanno dato come risultati 31, 64, 16 e 12.

Nell'esempio mostrato in Figura 3.42 sono stati lanciati i quattro dadi ottenendo come risultati nell'ordine 31, 64, 16 e 12 e ciascuno dei 3 giocatori ha fatto man mano le proprie scelte:

- BIT ha ottenuto 30 e può cancellare la decina (30) del suo codice di attivazione 37, mettendovi sopra il gettone con il tasto-attivazione;
- CHIP invece ha scritto 7 e può cancellare l'unità del suo codice, che era già stato parzialmente attivato in un precedente turno di gioco;
- il più bravo è stato RAM che ha ottenuto proprio 48, che è un codice di attivazione completo.

Due NB:

- per attivare il numero delle decine bisogna ottenere la decina. Se ad esempio il codice di attivazione è 64, per attivare il 6 il risultato deve essere 60 (e non 6).
- quando un codice viene attivato parzialmente e rimane la cifra delle decine, quella cifra perde il suo valore posizionale e diventa automaticamente il numero da attivare. Se ad esempio il codice di attivazione era 72 e viene attivato il 2 rimane il 7 (e non il 70).

Per i punteggi, la proposta delle regole ufficiali è la stessa del gioco delle tabelline, ovvero vince il primo giocatore che raggiunge o supera i 13 punti, che si ottengono in base al tipo di attivazione ottenuta:

- 2 punti in caso di attivazione parziale (BIT in Figura 3.42): quando l'espressione ha per risultato una singola cifra del codice;
- 3 punti in caso di attivazione ritardata: quando viene ottenuta la seconda cifra di un codice attivato parzialmente (CHIP in Figura 3.42);
- 6 punti in caso di attivazione diretta: se l'espressione corrisponde al codice di attivazione completo (RAM in Figura 3.42).

Una sola volta a partita, mentre scrive la propria espressione, ogni giocatore o squadra può usare il proprio jolly, che consentirà di affiancare 2 numeri-combinazione come in Figura 3.43, dove CHIP ha usato i 2 numeri-combinazione 7 e 0 per scrivere il numero 70.

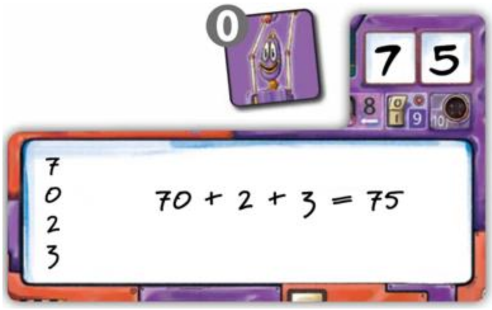


Figura 3.43 – Un esempio di utilizzo del jolly con la giustapposizione delle cifre 7 e 0.

Se sui primi tre lanci dei dadi i giocatori devono procedere abbastanza spediti, la scelta dell'ultimo numero al quarto lancio è sicuramente quella per la quale occorre prendersi e concedere più tempo, poiché da quel numero dipende l'espressione che si vuole realizzare.

3.4 Oltre i giochi: i materiali di lavoro in classe

3.4.1 La scelta dei materiali: quesiti, problemi e sfide

Affinché il Con-corso partisse con il piede giusto, insieme ai giochi era anzitutto necessario produrre i materiali per la competizione abbinata. Per la prima edizione servivano sia dei materiali di preparazione sia le prove di selezione locale. Nella produzione di questi materiali si è tenuto conto dei tre ambiti concettuali proposti nella formazione docenti, ovvero Aritmetica (+Algebra), Geometria e Rompicapo. Si è inoltre pensato a materiale dedicato esclusivamente al calcolo mentale. Per ciascuno degli ambiti suddetti è stata realizzata una videolezione ad hoc, riguardante anche una discussione critica dei quesiti relativi proposti (tali videolezioni fanno parte della formazione docenti, come detto nel §3.2.2).

Le fonti sono state fondamentalmente due: il grande patrimonio di raccolte di matematica ricreativa e i giochi del Con-corso. Per il materiale sul calcolo mentale si è lavorato a partire dall'esperienza maturata da chi scrive e da alcuni testi sull'argomento (De Toffoli et al, Takumi 2017).

Si è voluto distinguere inizialmente distinguere i materiali in due categorie: i quesiti e i problemi. I quesiti possono essere domande a risposte multipla o a risposta aperta. Nelle domande a risposta aperta si può chiedere di determinare un valore, ma anche di realizzare un disegno o una costruzione con i materiali dati (in particolare con i polimini o con i dadi). I problemi si distinguono dai quesiti perché si articolano su più domande a cui bisogna rispondere argomentando e motivando le scelte effettuate e le eventuali soluzioni trovate con un testo scritto e con eventuali disegni o costruzioni. Il lavoro sui problemi rimane fondamentale all'interno di un approccio nel quale si vuole imparare a fare matematica: gli studenti devono imparare a dare le ragioni dei tentativi intrapresi, sia se hanno dato la soluzione richiesta, sia se hanno portato a un "vicolo cieco" o a una soluzione errata. Nella prima edizione la relazione tra quesiti e giochi è stata abbastanza limitata sia all'interno dei materiali di preparazione alle prove selettive sia nei testi delle prove selettive stesse. Nelle edizioni successive, anche grazie a un'esperienza più matura e consapevole dell'utilizzo dei giochi nella didattica, si è potuto realizzare quesiti più strettamente collegati ai giochi proposti.

Per quanto riguarda i problemi, nel materiale di preparazione alle prove di selezione non sono stati proposti problemi collegati ai giochi, ma le prove di selezione locale hanno previsto problemi strettamente connessi ai giochi, in particolare a *Polyminix*, *Rolling CUBES Pytagora* e SET. Sono state fornite delle griglie di correzione ispirate al modus operandi del già citato Rally Matematico Transalpino.

Durante la seconda edizione è maturata l'esigenza di una terza categoria di materiali che è stata denominata «Sfide». All'interno di questa nuova categoria si collocano quesiti collegati ai giochi che, a partire da una situazione iniziale rappresentata in un'immagine, richiedono di rispondere a più domande a risposta aperta. Nel §3.4.6 si riportano alcuni esempi per comprendere meglio il lavoro proposto. Questa terza categoria è stata presentata attraverso un'iniziativa social denominata «Una sfida al giorno», nata il 14 marzo 2020, in occasione dell'emergenza coronavirus come supporto alla D.a.D. per studenti, docenti e non solo. L'iniziativa è proseguita fino al termine dell'anno scolastico, con un triplice scopo:

1. affiancare i docenti nel difficile coniugio tra la matematica in D.a.D. e la matematica del fare "con la mente e con le mani"
2. accompagnare a distanza gli studenti, abituati a una didattica ricca di materiali e dinamismo
3. continuare il progetto Matematica per tutti anche a distanza

Le sfide dunque, vista la situazione speciale, furono proposte veramente a tutti con una grande partecipazione degli studenti che stavano vivendo il primo lockdown: ogni mattina veniva caricata sui social e sul sito una sfida intorno a uno dei giochi di Matematica per tutti, le soluzioni venivano fotografate e inviate agli organizzatori entro la sera del giorno della sfida e la mattina successiva, prima della nuova sfida, veniva pubblicato sui social il video-collage con tutte le soluzioni pervenute della sfida del giorno precedente. Chi inviava la soluzione scriveva accanto il suo nome e la città di provenienza: le foto inviate venivano pubblicate tutte nel video e in una galleria predisposta sul sito, anche quelle che non contenevano soluzioni corrette o che contenevano soluzioni solo parzialmente corrette o incomplete (si veda in Appendice E.1 la schermata del sito con tutte le sfide caricate).

Dalla terza edizione si è deciso così di inserire le sfide ufficialmente nella proposta di materiali del Concorso sia per il lavoro in classe sia per la preparazione alla prova di selezione locale. Nel seguito si presentano e si discutono alcuni esempi dei materiali proposti, così suddivisi:

- quesiti per ciascun ambito (§3.4.2, 3.4.3, 3.4.4)
- problemi con un esempio di griglia di correzione (§3.4.5)
- sfide per ciascun gioco (§3.4.6)
- schede sul calcolo mentale (§3.4.7)

Il criterio di scelta per la costruzione dei contenuti da proporre rimane sempre lo stesso: quesiti alla portata di tutti, ma non banali, immediati da risolvere e possibilmente vari per non ricadere nella categoria dell'esercizio dove cambiano solo i dati ma il procedimento è sempre lo stesso.

3.4.2 Aritmetica (+Algebra)

Per la prima edizione è stata scritta una breve introduzione per ciascuno degli ambiti proposti. Così recitava l'introduzione dell'ambito *Aritmetica*:

> La sezione ARITMETICA nasce dall'esigenza di recuperare la *relazione di intimità con i numeri* di cui parlava il matematico René Thom. L'aritmetica è ritenuta parte della matematica "semplice" e anche un po' meccanica. Il mondo del calcolo troppe volte è relegato e svilito a una serie di procedimenti meccanici e mnemonici volti a fornire "risultati". Oggi questo compito si potrebbe (e si fa!) addirittura affidare solo a un calcolatore.
>
> Che senso assume quindi in quest'ottica lo studio dell'aritmetica per di più così generalizzato per tutti? Fare aritmetica è:
>
> - rileggere ciò che ci circonda in chiave numerica, è ricercare legami e strutture;
> - impadronirsi nuovamente di quella serenità del far di conto propria dei nostri nonni e dei bambini;
> - divertirsi nel ricercare e nello scoprire relazioni tra numeri, nel combinare e "scombinare" qualcosa che sembra così fermo ed assoluto;
> - allenare la mente a conoscere l'infinito nascosto in ogni numero;
> - nella sua semplicità una sfida impegnativa: è ricerca di regolarità, è fantasia, è intraprendenza.

I contenuti proposti per gli studenti dagli 11 ai 15 anni differiscono solamente per quanto riguarda i quesiti che possono richiedere una seppur minima conoscenza dell'algebra, che naturalmente sono previsti solamente per la categoria M3-S1. Nei quesiti di Aritmetica si trovano:

- il gioco dei 3 numeri e il numero-bersaglio (si veda §2.2.2);
- le bilance o i lampadari (Figura 3.45);
- Numeri e figure (Figura 3.46);
- Calcolo, ragionamento e calcolatrice [alla base del gioco *FUNB3RS*] (Figura 3.48);
- criptaritmi [solo per M3-S1] (Figura 3.47);
- quesiti ispirati a *Rolling CUBES Pytagora* (Figura 3.44);
- quesiti con *Rolling CUBES Pytagora* (si veda §2.2.4).

Le scelte dei materiali sono cambiate nel corso degli anni (come si vedrà nel §4.1), ma questi titoli di quesiti sono rimasti invariati con una fondamentale precisazione che riguarda gli ultimi due legati a *Rolling CUBES Pytagora*: se prima si pensavano solamente quesiti ispirati al gioco, già dalla seconda edizione in poi si sono introdotti quesiti da risolvere utilizzando il gioco.

Rolling Cubes Pytagora - 1
Completate le seguenti uguaglianze, utilizzando tutte le quattro operazioni aritmetiche.

a)

$$48 \square 4 = 27 \square 2 \square 8 \square 1$$

b)

$$10 \square 75 = 5 \square 12 \square 6 \square 7$$

Figura 3.44 – Un esempio di quesiti ispirati a *Rolling CUBES Pytagora*. NB: "ispirato a..." vuol dire che non serve avere i dadi a disposizione per risolverlo.

Bilancia
Questa bilancia è composta da animali in equilibrio. Scoprite quanto vale ogni animale.

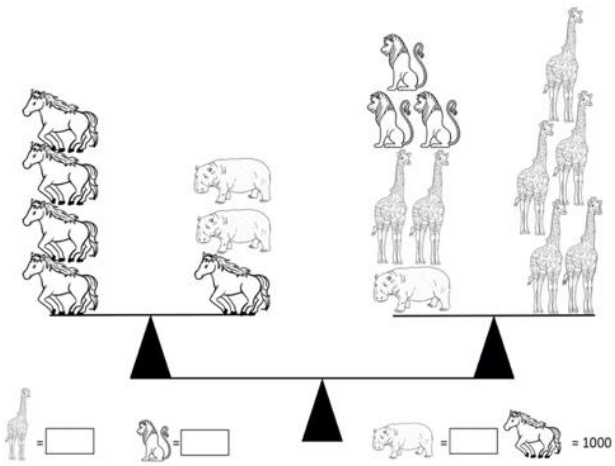


Figura 3.45 – Un esempio di quesito con bilance

Numeri e figure 2
Scoprite quanto vale ogni figura.

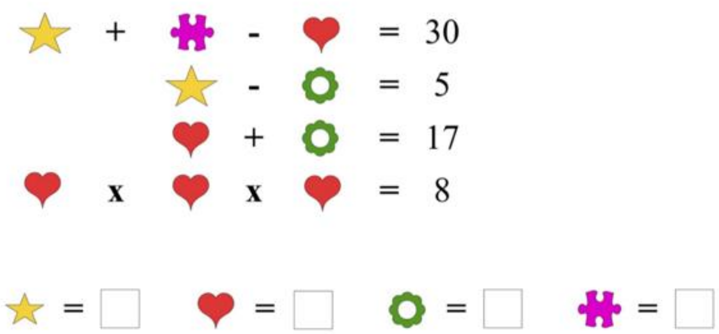


Figura 3.46 – Un esempio di quesito del tipo "Numeri e figure"

I quesiti con bilance e con numeri e figure riguardano sempre il mondo delle uguaglianze aritmetiche: si prestano a essere risolti con un approccio per tentativi ragionati, ma anche attraverso l'algebra delle equazioni e dei sistemi. Negli ultimi anni c'è stato un "bombardamento" di quesiti su numeri e figure anche attraverso la rete e i social, probabilmente per la caratteristica sempre attraente di presentarsi come enigmi da risolvere con figure e non con lettere che incutono più timore perché hanno il sapore di algebra e di scuola. Poterli risolvere solo utilizzando l'aritmetica di base ha favorito la loro diffusione, ma sono stati scelti anche per questa caratteristica "ponte" tra aritmetica e algebra, che permette agli studenti di cominciare ad entrare nel concetto di *variabile*, fondamentale per lo studio della matematica superiore.

Critto-quadrato
A lettera uguale corrisponde **cifra** (da 0 a 9) uguale.

$$(GA)^2 = GT \times AT + CA$$

Determinate i valori di tutte le lettere e "svelate" il critto-quadrato nel riquadro sottostante.

Lettera	A	C	G	T
Cifra				

Crittoperazioni
Determinate le cifre corrispondenti alle lettere seguenti:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{AB} & \times & \mathrm{CD} & = & \mathrm{EABE} \\ + & & - & & + \\ \mathrm{AG} & - & \mathrm{EH} & = & \mathrm{C} \\ \hline \mathrm{GI\,H} & \times & \mathrm{EE} & = & \mathrm{EAHB} \end{array}$$

Figura 3.47 – Due esempi di criptaritmi

Il mondo dei criptaritmi è stato pensato esclusivamente per le categorie M3-S1, in quanto si considerano un'evoluzione più complessa dei quesiti con bilance e numeri e figure: anche qui si tratta di sostituire numeri a variabili – che in questo caso sono lettere e non immagini – ma la difficoltà è decisamente maggiore perché si tratta di considerare molte più condizioni che potrebbero essere tradotte nella risoluzione di un sistema di equazioni e disequazioni. Va specificato che in un quesito simile la richiesta non è quella di illustrare tutti i passaggi, ma si richiede semplicemente di determinare i valori delle lettere misteriose: ciò rende il quesito più alla portata di tutti, pur rimanendo uno di quelli che, una volta risolto, una volta svelato il valore di tutte le lettere, riesce a dare grandi soddisfazioni e gioia al solutore.

In Figura 3.48 si propone un esempio della tipologia di quesiti denominata "calcolo, ragionamento e calcolatrice" che è stata alla base del gioco *FUNB3RS*. L'idea è nata dal lavoro della prof.ssa Valentina Celi in Francia (si veda ToKalon 2021 [aprile 27] in B4 Videografia): si utilizza la calcolatrice per fare calcolo mentale ovvero per ragionare sul calcolo. Come può la calcolatrice favorire il ragionamento? Semplice, si tratta di porre richieste come «Fate comparire sul display della vostra calcolatrice il numero 48», aggiungendo però una condizione sui tasti da utilizzare come le seguenti:

a) senza digitare i tasti 4 e 8

b) senza digitare i tasti 4, 8 e $-$

c) senza digitare i tasti 4, 8, $-$, $+$

d) senza digitare i tasti 4, 8, $-$, $+$, utilizzando almeno una volta il tasto $\div$

In questo modo si portano gli studenti a lavorare ancora una volta sull'uguaglianza aritmetica e sui diversi modi di esprimere lo stesso numero, come visto anche nel gioco *Rolling CUBES Pytagora*, ad esempio:

$$48 = 50 - 2 = 39 + 9 = 96 \div 2$$

Calcolo, ragionamento e calcolatrice
Scrivete la sequenza di tasti da digitare nei riquadri predisposti sotto ogni quesito.

NB: nessun calcolo in colonna è possibile. Non è possibile utilizzare la somma unitaria ripetuta "$1 + 1 + 1 + \ldots$". Salvo le condizioni precisate in ogni enunciato (in termini di divieto o di permesso), l'utilizzo di tutti gli altri tasti è autorizzato.

a1) Fate comparire sul display della calcolatrice il numero 144, senza mai utilizzare il tasto "4" e "$-$".

a2) Fate comparire sul display della calcolatrice il numero 144, senza mai utilizzare il tasto "4", "+" e "$\times$". Trovate DUE modi diversi.

b) Digitate sulla calcolatrice il numero $7,02$. Senza cancellarlo, come potete far comparire sul display della calcolatrice il numero $7,27$?

c) Scrivete una espressione equivalente a 15×75 e determinatene il risultato, senza mai utilizzare i tasti "1" e "7".

d) Fate comparire sul display della calcolatrice il numero 480, senza mai utilizzare i tasti "4", "8" e "0" e utilizzando almeno una volta il tasto "$\times$".

e) Illustrate come determinare il resto e il quoziente della divisione $2529 \div 5$, senza mai utilizzare il tasto "$\div$".

f) Digitate sulla calcolatrice il numero 759. Poi, senza cancellare e utilizzando una sola volta il tasto "=", illustrate come "scambiare di posto" il "7" e il "9".

Figura 3.48 – Un esempio di quesiti "Calcolo, ragionamento e calcolatrice"

Non si esclude naturalmente la possibilità di introdurre quesiti che non ricadono esattamente in una delle categorie indicate, ma siano comunque attinenti all'ambito Aritmetica, soprattutto per favorire la varietà necessaria a una proposta di matematica ricreativa (un esempio è mostrato in Figura 3.49).

2020
Completate l'uguaglianza inserendo le operazioni opportune, sapendo che possono essere addizioni e sottrazioni.

$$2020 = 4\square\,(4\square 4) \times (4^4\square 4)$$

Figura 3.49 – Un esempio particolare di quesito di Aritmetica con le operazioni "nascoste"

3.4.3 Geometria

Questa era l'introduzione dei materiali relativi all'ambito Geometria:

> La sezione GEOMETRIA nasce dall'esigenza di recuperare la relazione con le forme oltre la misura, le formule e i calcoli di perimetri, superfici e volumi. Se chiedessimo, infatti, ai nostri studenti la prima parola che viene loro in mente pensando alla geometria, molto probabilmente risponderebbero problema o formule! Qualcuno poi magari azzarderebbe calcoli!

Che fine ha fatto quindi il mondo delle forme e delle figure, del fare con le mani, del vedere con la mente, del misurare con lo sguardo, del costruire con qualsiasi materiale (carta, nastri, forbici, fili, costruzioni, specchi, ecc)?

La geometria "scolastica" ha via via perso la sua impostazione naturale: l'agrimensore misurava e definiva i confini di ciò che vedeva e poteva toccare in uno spazio reale; invece, oggi definiamo e misuriamo confini surreali (tante aiuole rettangolari tutte uguali che esulano da ogni possibile visualizzazione!). L'esperienza in classe del fare geometria è relegata il più delle volte alla eventuale manipolazione di materiali e/o al contatto con gli oggetti; ma ben sappiamo che l'esperienza ingloba sensazioni, scoperte, osservazioni, riflessioni e movimenti e non si è mai troppo grandi per scoprirlo. Disegni, righello e compasso sono alcuni degli strumenti che ci permettono di farlo. Fantasia, movimento e creatività fanno il resto. L'utilizzo di un linguaggio specifico via via più preciso viene accolto come una necessità per condividere ragionamenti e riflessioni, e non come un'imposizione dall'alto, con la richiesta di definizioni o classificazioni da ripetere mnemonicamente senza comprenderle appieno.

Vogliamo ritrovare la libertà e la semplicità propria della geometria: riuscire a visualizzare ciò che l'occhio direttamente non vede, confrontare figure, stimare misure, ricercare regolarità, muovere nel piano e nello spazio oggetti in modo consapevole, intuire e prevedere cosa accade se sposto, giro, ruoto, capovolgo, conoscere e riconoscere proprietà di figure ed oggetti a prescindere da formule e numeri.

Nei quesiti di Geometria si trovano:

- Ritagliando (Figura 3.50);
- Tu come la vedi? (Figura 3.51);
- Conta i triangoli o i quadrati (Figura 3.52);
- Colora la faccia giusta [solo per M3-S1] (Figura 3.53);
- osservazione e sviluppi di solidi [solo per M3-S1];
- quesiti con *Polyminix* (Figura 3.54);

Come per Aritmetica, le scelte dei materiali sono cambiate nel corso degli anni (come si vedrà nel §4.1) e diversi quesiti della prima edizione sono stati cancellati per dare maggiore spazio a *Polyminix* che, a differenza di *Rolling CUBES Pytagora*, è entrato subito con quesiti che richiedevano direttamente l'utilizzo del gioco, ovvero dei polimini.

I quesiti "Ritagliando" (Figura 3.50) anticipano concetti relativi alle trasformazioni geometriche e alle equivalenze: con uguali nella richiesta si intende, infatti, sovrapponibili o meglio isometrici.

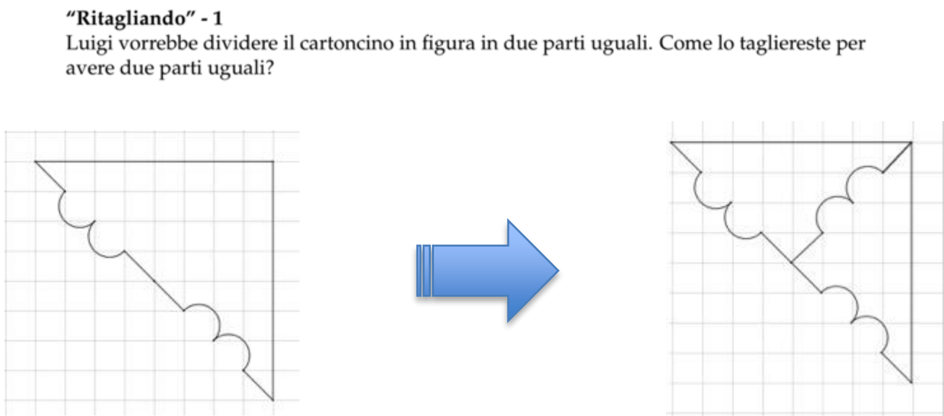


Figura 3.50 – Un esempio di "Ritagliando" con la soluzione

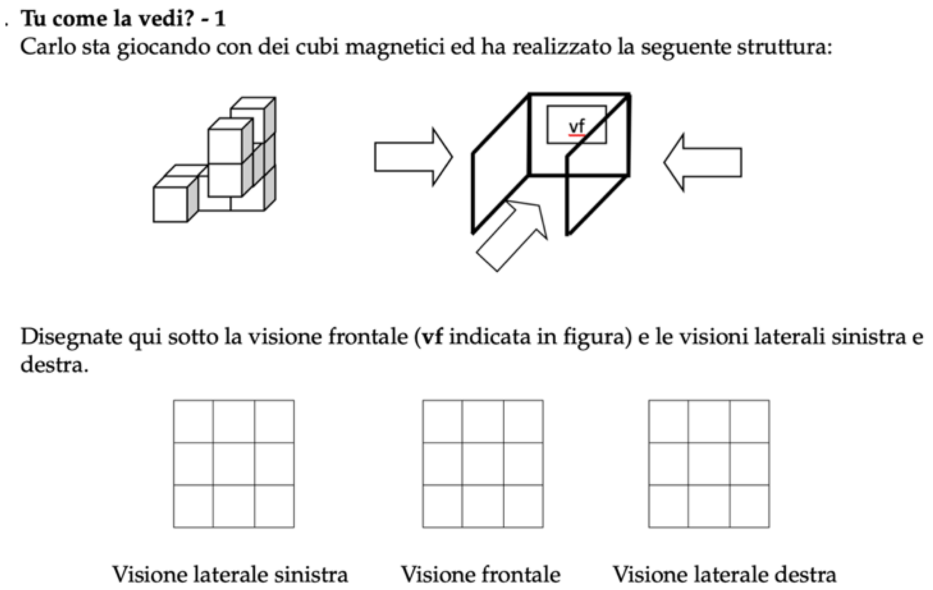


Figura 3.51 – Un esempio di "Tu come la vedi?"

I quesiti del tipo "Tu come la vedi?" (Figura 3.51) sono particolarmente utilizzati nelle prove Invalsi, ma nel caso del con-corso sono stati pensati in collegamento al gioco *La Boca*, con lo scopo di lavorare sull'osservazione di figure solide e sul passaggio dal 3D al 2D (si veda anche Appendice D.2).

I quesiti "Conta i triangoli o i quadrati" riguardano quel mondo di cui è stato riportato un esempio con i quadrati nel §3.1.1 e un paio con i triangoli sono in Figura 3.52. Questi quesiti sono stati scelti perché favoriscono lo sviluppo di strategie che da una parte rendano semplice ciò che al primo impatto non lo è e dall'altra permettano di essere sicuri di non aver dimenticato nulla (in questo caso nessun quadrato o triangolo). Nell'esagono a destra in Figura 3.52, ad esempio, è possibile riconoscere come sia sufficiente contare i triangoli presenti in uno dei 6 "spicchi" della figura (in questo caso 5) e dunque moltiplicare per 6 per ottenere la soluzione 30: ci sono, infatti, 5 tipi di triangoli che compaiono 6 volte ciascuno.

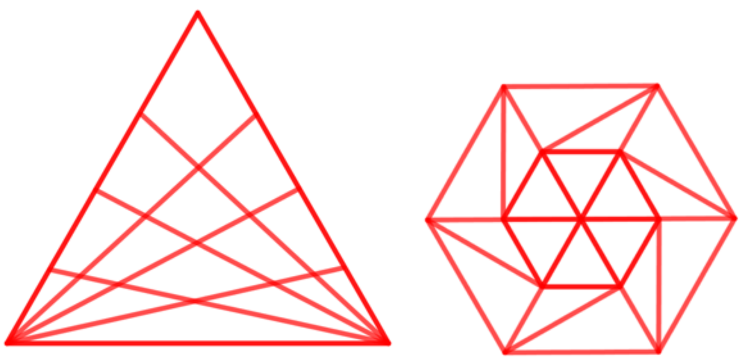


Figura 3.52 – Due esempi di "Conta i triangoli". Nella figura di sinistra sono presenti 64 triangoli, mentre in quella di destra i triangoli sono 30.

Colora la faccia giusta - 1
Nello sviluppo del cubo è colorata in blu la faccia che fa da base. Individuate e colorate la faccia superiore.

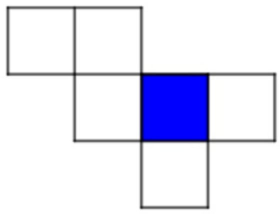
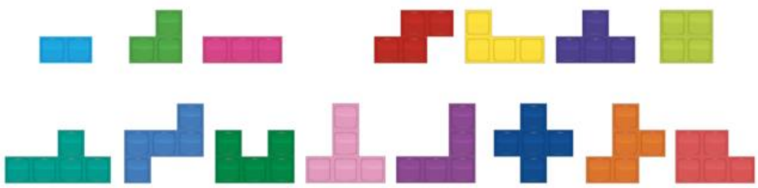


Figura 3.53 – Un esempio di "Colora la faccia giusta"

"Colora la faccia giusta" (Figura 3.53) fa parte dei quesiti sull'osservazione dei solidi che sono stati pensati per la categoria M3-S1: si lavora sugli sviluppi piani di solidi, sulla collocazione di figure solide nello spazio.

Infine, i quesiti intorno al gioco *Polyminix* sono simili a quelli del gioco "Risolvi il problema" (§3.3.2): si chiede la costruzione di figure di data area e/o di dato perimetro e/o con date caratteristiche di simmetria (Figura 3.54).

. **Polyminix - 3**
Luciana sta giocando con le 15 piastrelle del gioco Polyminix e vuole realizzare una figura simmetrica rispetto a quattro assi che possiede una superficie di 20 quadratini.



Aiutatela disegnando la figura simmetrica rispetto a quattro assi sul quaderno.

Polyminix - 5
Matteo sta giocando con le 15 piastrelle del gioco Polyminix e vuole realizzare una figura simmetrica che possiede una superficie di 12 quadratini e con un perimetro di 20 unità (per unità si intende la misura del lato di un quadratino).

Figura 3.54 – Due esempi di quesiti con *Polyminix*

3.4.4 Rompicapo

In questo ambito si collocano i quesiti sugli "stuzzicadenti" che spesso si trovano riferiti a fiammiferi, stecchini, bastoncini, ecc. In tutti i casi si torna al concetto geometrico di segmento. Dalla seconda edizione sono stati introdotti anche dei quesiti riguardanti il gioco SET.

Nei quesiti dell'ambito Rompicapo si trovano dunque:

- stuzzicadenti e numeri (Figura 3.55);
- stuzzicadenti e figure (Figura 3.56);
- SET (Figura 3.57).

I quesiti con gli stuzzicadenti sono interessanti perché fanno parte di quel patrimonio di matematica ricreativa veramente «popular», in quanto non richiedono particolari conoscenze e spesso a risolverli sono gli studenti che un docente non si aspetterebbe mai. Kordemsky vi ha dedicato un capitolo intero, intitolato «Geometria con i fiammiferi» (Kordemsky 2014, pp. 69-79), proponendo alcuni spunti di lavoro e ben 23 giochi sui 359 complessivi proposti nel suo libro.

Durante la fase finale della prima edizione è stato dedicato anche un intero spazio di Cinecittà World ai giochi con gli stuzzicadenti. Gli studenti sono particolarmente attratti da questa tipologia di quesiti e hanno la possibilità di esercitarsi anche attraverso app disponibili per smartphone e tablet[159].

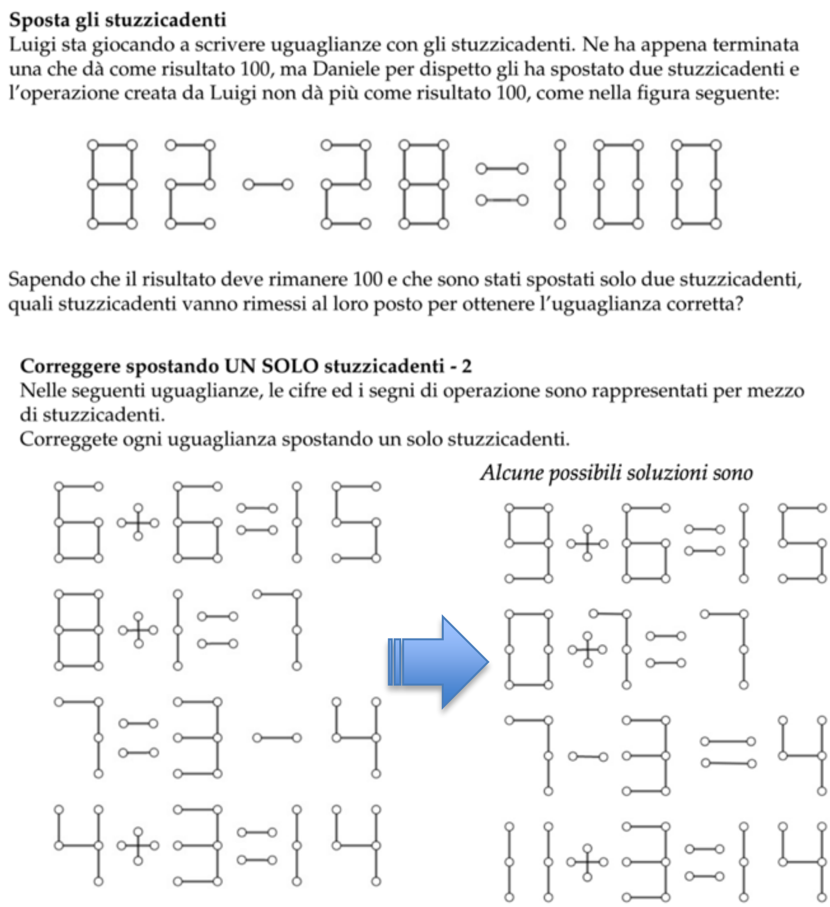


Figura 3.55 – Giochi con stuzzicadenti e numeri e alcune possibili soluzioni

[159] Sono disponibili, ad esempio, le app gratuite *Rompicapi con i fiammiferi* (per iOS e per Android), *Rompicapi con i fiammiferi 2* (solo per iOS), *Sposta il fiammifero* (solo per Android).

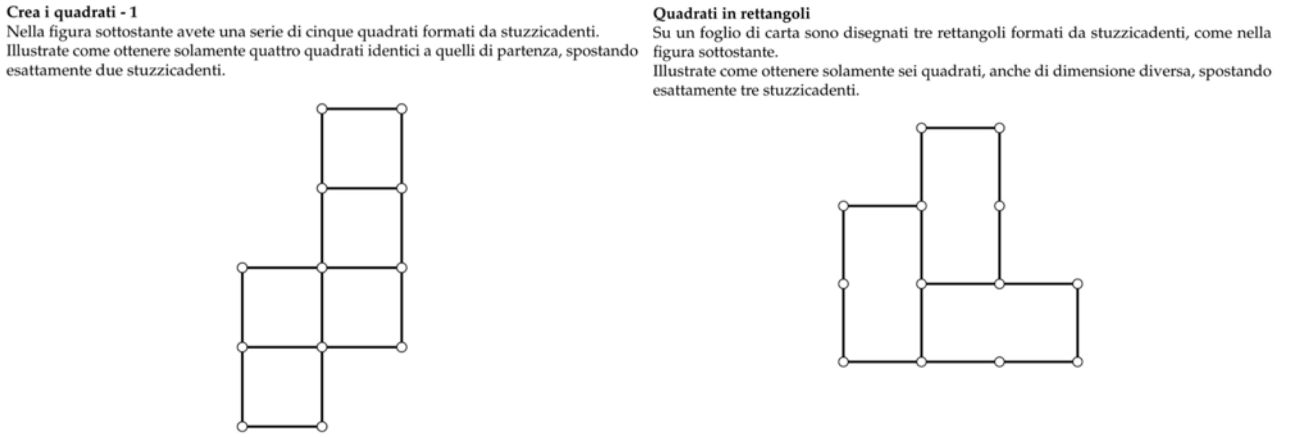


Figura 3.56 – Due esempi di giochi con stuzzicadenti e figure

I quesiti con SET sono nati come occasione per favorire la comprensione di un gioco che, come detto nel §3.3.5, risulta semplice ma non immediato e dunque le richieste sono "piccole": un solo SET da trovare (quesito in alto in Figura 3.57) o domande a risposta multipla.

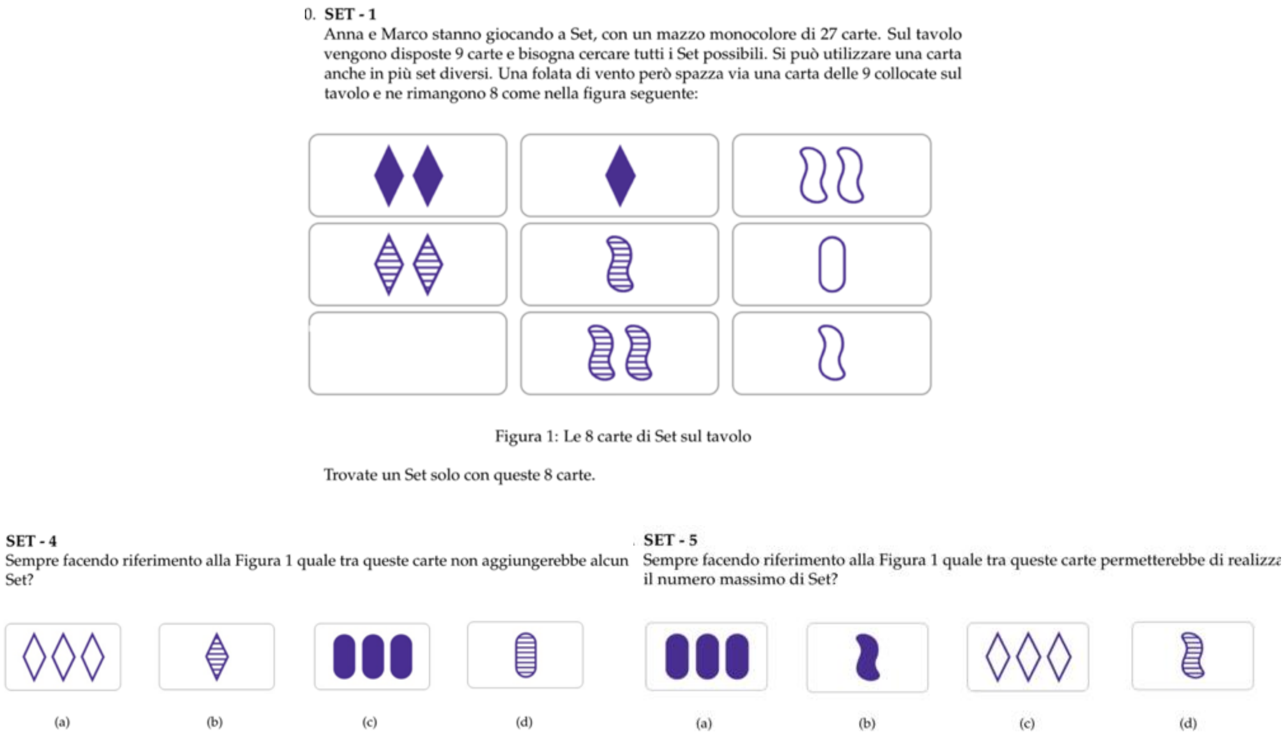


Figura 3.57 – Esempi di quesiti con SET: in alto un solo SET da trovare, in basso due quesiti a risposta multipla.

3.4.5 Problemi

> Problema deriva dal greco *pro* "davanti", e *ballein*, "gettare", da cui "oggetto gettato davanti, ostacolo", ma anche "compito, questione proposta, causa di controversie".
>
> Da "questione difficile da risolvere", *problema* è diventato un termine onnivalente, il cui uso scorretto e generico contribuisce a impoverire l'espressione e, quindi, la lingua. Tutto *pone problemi*, tutto *crea problemi*. Ci si sente correntemente accogliere, in diversi posti, con la domanda *qual è il suo problema?* invece di, secondo i casi, "qual è lo scopo della sua visita, o della sua domanda, o del suo comportamento?" [...] Ancora più in particolare, lasciare che si radichi nell'ambiente scolastico, l'espressione "ragazzi con problemi" o ignorare, che, negli ambienti cosiddetti svantaggiati, i ragazzi "senza problemi" associano subito la parola "problema" alla necessità di "vedere" l'assistente sociale o il medico, vuol dire caricare a priori il termine *problema* di un significato che rischia fortemente di essere fuorviante quando si affronta un "vero problema", di matematica o non di matematica. [Baruk 1998, p. 440]
>
> **Il problema non è un esempio simulato di un compito pratico per il quale si riceve un addestramento**: sarebbe del tutto anacronistico, mal calibrato per i bambini di oggi. Il problema è una questione posta, la cui soluzione ci appare dapprima difficile o irraggiungibile, e che quindi ci invita alla ricerca, alla formulazione di una strategia per "misurarsi" con la sfida. Infatti, è il problema, la questione aperta, la "provocazione" rappresentata da una sfida intellettuale non immediatamente raggiungibile ciò che interessa il bambino e che rende la matematica attraente e fonte di soddisfazione intellettuale. [Millán Gasca 2016, p. 267]

La scelta di dedicare una sezione solo ai "Problemi" è legata a quanto già affermato nel §3.1.1 e alla difficoltà riscontrata sul campo da parte degli insegnanti nel risolvere problemi, prima ancora di insegnare a risolverli. Si propone come traccia da seguire lo schema per la risoluzione dei problemi in quattro fasi di George Polya. In Appendice E.2 sono stati inseriti anche i testi di due problemi proposti all'interno dell'esame "Istituzioni di matematica" del primo anno del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria: gli studenti, futuri insegnanti, avevano la traccia di lavoro in Figura 3.58 e 48 ore di tempo per sviluppare una soluzione al problema proposto, con argomenti scritti, immagini, costruzioni, riflessioni, ragionamenti seguiti. Gli elaborati avevano una lunghezza media di 10 cartelle, corredate da immagini ma anche da molto testo per argomentare le scelte seguite.

Per i disegni è consigliato utilizzare fogli protocollo a quadretti.
Potete comunque svolgere l'intera prova su carta a quadretti oppure scrivere su un documento word (da trasformare poi in pdf) in cui inserire le foto dei disegni. È consentito e consigliato l'uso di qualsiasi materiale: penne, colori, pennarelli, carta, forbici, calcolatrice. . .
Le domande possono essere affrontate in qualunque ordine.

Per ogni domanda vi chiedo di argomentare la vostra strategia risolutiva eventualmente tenendo presenti le quattro fasi di risoluzione dei problemi suggerite da Polya, di cui vi riporto di seguito alcune delle domande possibili. Non è naturalmente necessario rispondere a tutte le domande indicate per ogni fase.

Prima fase: Capire il problema (Understanding the problem)
Cosa si deve trovare?
Quali sono i dati? Quali sono le condizioni?
Sapreste porre il problema con parole vostre?
È possibile soddisfare le condizioni?
Avete un'idea iniziale del risultato?
Disegnate una figura approssimativa.

Seconda fase: Elaborare un piano (Devising a plan)
Potete risolvere un problema più semplice connesso con questo?
Potete risolvere una parte del problema?
Potete suddividere il problema in parti, preparando alcune domande intermedie?
Avete usato tutti i dati?

Terza fase: Mettere in pratica il piano (Carrying out the plan)
Sapete spiegare il vostro piano e come lo avete attuato?
Siete in grado di elencare tutte le soluzioni possibili?

Quarta fase: Verificare (Looking back)
Potete pensare a un piano alternativo? Il risultato vi soddisfa?

NB: Se non riuscite a trovare la risposta completa di uno o più quesiti del problema, non dimenticate però di riportare sul foglio protocollo tutte le osservazioni e le riflessioni che avete fatto, anche se non vi hanno portato alla soluzione, poiché verranno valutate comunque in sede di correzione.

Figura 3.58 – Le indicazioni per lo svolgimento del Problema d'esame di "Istituzioni di matematica", a.a. 2019/20, Università degli studi di Roma Tre

IL PROBLEMA DI ROLLING

Luciana e Fabio decidono di giocare a *Rolling CUBES Pytagora* facendo qualche variazione sul tema: Fabio dovrà indovinare l'uguaglianza ottenuta da Luciana senza però conoscere tutti i dadi del lancio! Luciana dichiara di aver utilizzato tutti i dadi a disposizione e di aver ottenuto un punteggio di 36 punti, considerando il raddoppio per aver utilizzato tutti i dadi (attribuiamo valore 1 al simbolo "="). Luciana gli mostra il primo dado, il numero 4 e il tredicesimo dado dell'uguaglianza, il numero 1. L'uguale è collocato invece al terzo posto.

4		=										**1**

Fabio rimprovera Luciana per le poche informazioni fornite, così Luciana aggiunge che a sinistra dell'uguale c'è un numero primo e che almeno un'operazione è stata utilizzata più di una volta. Luciana svela inoltre che nel lancio ha ottenuto un 6, un 2, un 1 e un "−" e che uno di questi dadi è stato utilizzato a sinistra.

1) Qual è il numero a sinistra dell'uguale?

2) Quanti numeri ci sono a destra dell'uguale? Da quante cifre sono composti?

3) Quali operazioni sono state utilizzate? C'è un'unica combinazione di operazioni?

4) Per ogni combinazione di operazioni trovata costruite una possibile uguaglianza, rispettando tutti i vincoli di Luciana.

Tavola 3.2 – Un esempio di problema tratto dalla selezione locale dell'a.s. 2018-19 (cat. M3-S1)

In Tavola 3.2 si è proposto un esempio di problema tratto dalla selezione locale della prima edizione. Viene fornita ai docenti una griglia di correzione per verificare le strategie risolutive degli studenti e attribuire il punteggio al problema: in Tavola 3.3 si riporta un estratto di griglia con i punteggi, ma senza il dettaglio e l'analisi delle possibili strategie risolutive. Il tentativo è stato quello di offrire un criterio di valutazione "inclusivo" che tenesse in considerazione i procedimenti e i tentativi oltre naturalmente alle soluzioni corrette: in quest'ottica si trovano punti attribuiti a chi ha ragionato in modo corretto, senza arrivare alla soluzione, a chi risponde in modo corretto ma non motivato, a chi ha risposto parzialmente (ad es: due combinazioni su quattro) o a chi ha trovato una soluzione che non è corretta perché non soddisfa una sola condizione del problema (ad es: si utilizza una cifra o un'operazione che non è disponibile). La costruzione del problema e della griglia di correzione e attribuzione del punteggio è uno dei lavori più impegnativi per il comitato di Matematica per tutti perché occorre in modo scrupoloso:

- vagliare tutte le strade possibili
- confrontarle
- valutare i pregi e i difetti delle diverse strategie risolutive
- aggiustare il tiro se risulta troppo difficile, ma allo stesso tempo evitare che sia troppo semplice perché è pur sempre un problema
- nella fase di stesura del testo definire bene le consegne

È un lavoro di squadra che dura giorni, a volte settimane prima di giungere alla stesura definitiva del testo del problema e della griglia di correzione in Tavola 3.3.

Griglia di correzione e attribuzione del punteggio del PROBLEMA

Punteggio massimo **15 punti**, così ripartiti:

DOMANDA 1: punteggio massimo 2

- **2 punti** per chi ha dato la risposta corretta e motivata
- **1 punto** per chi ha dato la risposta corretta ma non motivata o per chi ha ragionato in modo corretto, senza arrivare alla soluzione.

DOMANDA 2: punteggio massimo 3

- **3 punti** per chi ha dato la risposta corretta e motivata
- **1 punto** per chi ha risposto in modo corretto ad entrambe le domande, ma senza motivare le risposte o a chi ha risposto soltanto alla prima domanda, motivando la riposta

DOMANDA 3: punteggio massimo 4

Combinazione 1: due sottrazioni, una moltiplicazione e una divisione;

Combinazione 2A: una sottrazione, una moltiplicazione, una divisione e una divisione per 1;

Combinazione 2B: una sottrazione, una moltiplicazione e una moltiplicazione per 1, una divisione;

Combinazione 3: una sottrazione e 3 moltiplicazioni.

- **4 punti** per chi risponde in modo corretto e motivato
- **3 punti** per chi risponde in modo corretto ma non motivato OPPURE per chi trova soltanto tre combinazioni su quattro motivandole OPPURE per chi trova tutte le combinazioni ma inserisce anche l'opzione non accettabile con tutte operazioni diverse
- **2 punti** per chi trova soltanto due combinazioni corrette (di cui almeno una tra 1 e 3) motivandole OPPURE per chi trova due combinazioni corrette (di cui almeno una tra 1 e 3) ma inserisce anche l'opzione non accettabile con tutte operazioni diverse
- **1 punto** per chi trova soltanto una combinazione di operazioni, non motivando la risposta OPPURE per chi trova solamente le due combinazioni corrette 2A e 2B OPPURE per chi trova solamente la combinazione non accettabile con tutte operazioni diverse

DOMANDA 4: punteggio massimo 6

Combinazione 1: $41 = 96 \div 2 - 3 \times 2 - 1$

Combinazione 2A: $41 = 46 \times 2 \div 2 - 5 \div 1$

Combinazione 2B: $41 = 46 \times 2 \div 2 - 5 \times 1$

Combinazione 3: $41 = 6 \times 2 \times 2 \times 3 - 31$

- **6 punti** per chi trova una soluzione per ciascuna delle quattro combinazioni possibili

- **5 punti** per chi trova solamente le soluzioni per tre combinazioni OPPURE per chi trova solamente le soluzioni per le combinazioni 1 e 3

- **4 punti** per chi trova le soluzioni per due combinazioni (una sola tra 2A e 2B) OPPURE per chi trova le soluzioni per due combinazioni (una sola tra 2A e 2B) insieme ad un'altra non accettabile solamente perché utilizza tutte operazioni diverse

- **3 punti** per chi trova solamente la soluzione per una combinazione OPPURE per chi trova le soluzioni per le combinazioni 2A e 2B (in entrambi i casi può essere inserita anche un'altra soluzione non accettabile solamente perché utilizza tutte operazioni diverse)

- **2 punti** per chi trova solamente la soluzione non accettabile solamente perché utilizza tutte operazioni diverse OPPURE per chi trova una soluzione che non soddisfa le condizioni richieste solamente perché non considera il fatto che la divisione o la moltiplicazione per 1 valgono solo 1 punto. Ad esempio, se risolvono la combinazione 3 con $41 = 43 \times 2 - 6 \times 9 \times 1$.

- **1 punto** per chi trova un'uguaglianza corretta ma con una cifra o un'operazione non disponibile nelle combinazioni corrette.

Tavola 3.3 – La griglia di correzione del problema in Tavola 3.2 con la relativa attribuzione dei punteggi

3.4.6 Sfide

Le sfide, come detto, sono nate durante la seconda edizione e riguardano principalmente tre giochi: *Rolling CUBES Pytagora* (di cui si è parlato ampiamente), *Polyminix* e SET. In Appendice E.3 si inserisce una selezione delle sfide proposte insieme ad alcune delle soluzioni inviate dagli studenti[160].

Figura 3.59 – I testi di alcune sfide con *Polyminix*

160 Si rimanda alla galleria di immagini predisposta sul sito ufficiale per farsi un'idea completa della varietà delle soluzioni inviate dagli studenti: https://matematicapertutti.it/gallery-sfide-2020-21/

I testi delle sfide sono stati realizzati anche a partire dalle risoluzioni degli studenti, in quanto spesso è capitato che in una sfida qualcuno percorresse una strada diversa da quella richiesta (o immaginata a partire da un testo impreciso) e quella strada è diventata lo spunto per una nuova sfida. Ad esempio, nelle sfide con *Polyminix* si voleva richiedere di dividere una figura data in parti uguali utilizzando uno solo dei tasselli di *Polyminix* come modulo da ripetere nel ricoprimento della superficie della figura come mostrato a destra in Figura 3.60. Poi, come mostrato a sinistra sempre in Figura 3.60, una studentessa ha fornito una risposta diversa dividendo la figura in due parti uguali "separate" da un tassello di *Polyminix*.

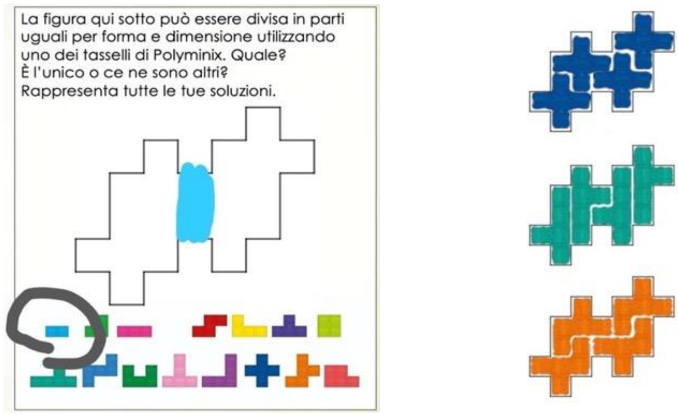


Figura 3.60 – A sinistra la risposta "diversa" di una studentessa; a destra una soluzione "secondo le attese".

Questa risposta "diversa" era assolutamente accettabile e forse più aderente alla traccia, in quanto non era stato specificato che ciascun polimino poteva (doveva?) essere usato più di una volta. La verità è che i testi di queste sfide erano stati proposti a docenti che avevano già affrontati problemi simili argomentati oralmente dai formatori e dunque si erano date per scontate alcune condizioni che invece era necessario esplicitare. In ogni caso così sono nate nuove sfide incentrate su questa interpretazione "diversa" della studentessa - forse addirittura più corretta delle altre - come mostrato in un esempio in Figura 3.61.

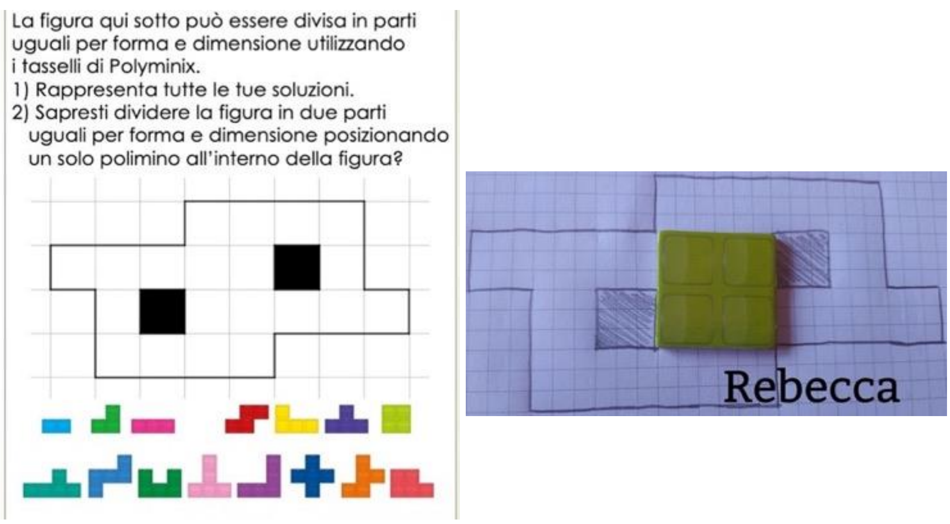


Figura 3.61 - Una nuova sfida sulla base della risposta "diversa" in Figura 3.60 e la soluzione di una studentessa.

Naturalmente le sfide sono state costruite anche seguendo il criterio di una difficoltà sempre crescente, inserendo man mano un numero maggiore di richieste e domande sempre più complesse. Si pensi ad esempio alle sfide intorno al gioco SET, dove si era cominciato chiedendo semplicemente di trovare i SET che erano presenti su un tavolo di 12 carte e man mano si sono inserite nuove domande (Figura 3.62):

- trova la carta mancante che permette di realizzare più SET possibili;
- trova la carta che permette di raddoppiare il numero di SET sul tavolo;
- trova la carta da eliminare per lasciare zero SET sul tavolo;
- cambia il colore ad una carta per ottenere il maggior numero di SET;
- trova i SET tra 15 carte sul tavolo e trova le carte da eliminare per lasciare zero SET.

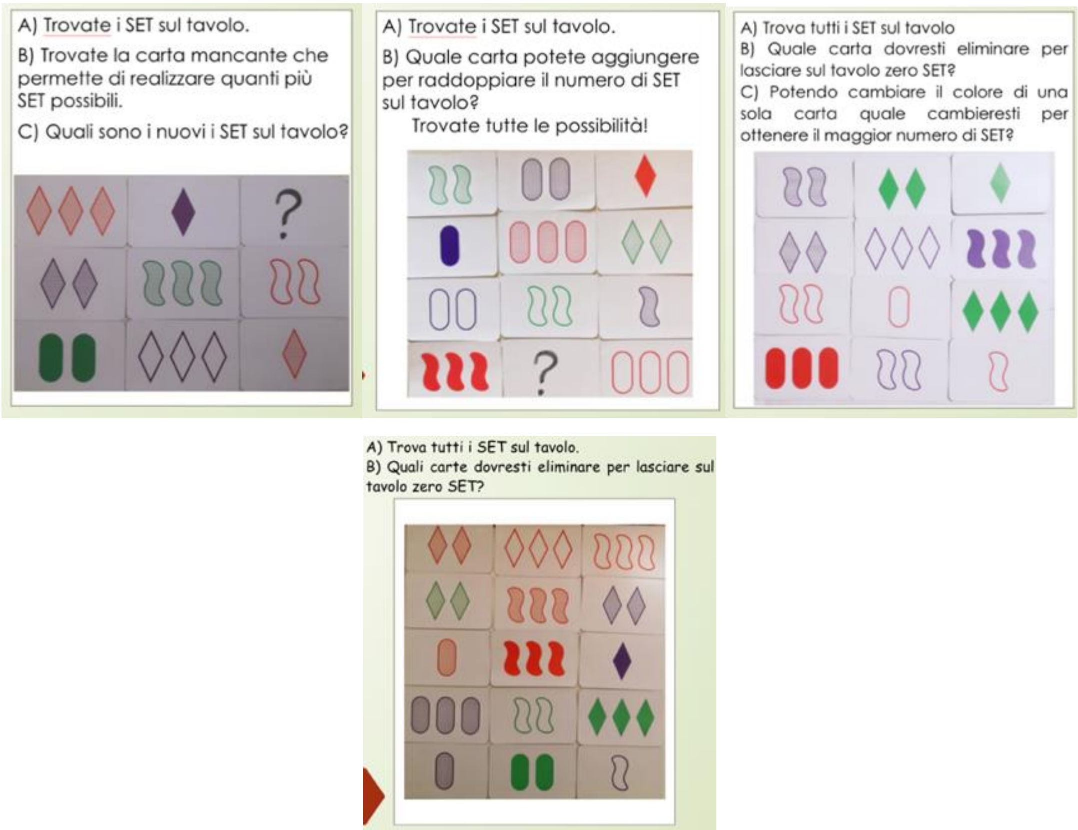


Figura 3.62 – Alcune sfide con SET. La più grande con il tavolo da 15 carte è stata proposta il 27/05/2020.

3.4.7 Calcolo mentale

Il calcolo mentale fa ovviamente riferimento all’ambito aritmetico, ma nelle prime due edizioni è stata proposta un’attività distinta per le prove di selezione locale e il primo anno la finalissima a Cinecittà World ha avuto proprio il calcolo mentale come protagonista. Il motivo è presto detto: chi ha pensato alla proposta di Matematica per tutti ha maturato negli anni una particolare passione per l’insegnamento del calcolo mentale.

Il calcolo mentale aiuta a riscoprire il valore dell'errare e, di conseguenza, la meraviglia del dare, tutto d'un fiato, *la* soluzione giusta semplicemente costruendola, vedendola e assemblandola prima nella mente. Si potrebbe pensare che allenarsi al calcolo mentale sia inutile, perché oggi tutti calcolano con degli strumenti precisi ed efficienti. È pur vero che il calcolo mentale è bello non certo perché utile nel senso pragmatico del termine. Non si può esprimere con parole la bellezza della scoperta di poter dire quanto fa 81×79 [161] senza che sia una macchina a dirlo e senza che servano carta e penna magari con il noto algoritmo in colonna: si può solo sperimentare in prima persona accettando la sfida affascinante del calcolo a mente. Nello strutturare i materiali si è fatto riferimento al libro *Numeri. Divagazioni, calcoli, giochi* (De Toffoli et al 2017) e, in particolare, all'esperienza maturata in seguito alla partecipazione alle finali nazionali di calcolo mentale organizzate proprio nel 2018 dal Kangourou e alle quali hanno partecipato studenti di diversi docenti del comitato didattico-scientifico di Matematica per tutti.

Un lavoro sul calcolo mentale con addirittura una prova, una competizione abbinata, sembra una proposta esclusiva "solo per alcuni", altro che per tutti! Eppure è possibile affrontare questo "scoglio" senza che qualcuno rimanga travolto dalle onde, come testimonia una docente in un contributo inviato sull'esperienza vissuta, dopo aver partecipato alla prima edizione con una classe prima di un istituto agrario in provincia di Cagliari:

> Mancava solo l'ultimo scoglio: IL CALCOLO MENTALE! A I U T O!
>
> Come sicuramente saprete ai giovani d'oggi contare non piace. La calcolatrice viene consigliata alla minima difficoltà e noi docenti spesso ci troviamo nell'impossibilità di far fare anche i calcoli più semplici agli ormai troppo numerosi alunni discalculici perché la risposta unanime da parte di genitori medici e pedagogisti è "DEVONO FARLO CON LA CALCOLATRICE!"
>
> Ecco: il mio grazie più grande per voi dal punto di vista della didattica è per esservi inventati la sfida di CALCOLO MENTALE e anche se sarà sicuramente lo spauracchio della finale mi ha permesso di:
>
> 1) costringerli a stare in silenzio assoluto (e come ci si concentra altrimenti?)
>
> 2) costringerli a memorizzare velocemente strategie
>
> 3) costringerli a scoprire che il loro cervello ha più potenzialità di quanto non potessero nemmeno immaginare. [Docente di scuola secondaria di secondo grado, Sardegna]

Il lavoro sul calcolo mentale è scandito dai seguenti nuclei tematici:

- le quattro operazioni (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione con resto zero)
- la divisione con resto (si lavora solo sul calcolo del resto)
- confronto e ordinamento di numeri razionali
- potenze di numeri razionali e potenze ad esponente negativo
- radici quadrate di quadrati perfetti

[161] Nella pagina introduttiva del documento in Appendice E.4 viene raccontato un aneddoto relativo al calcolo 81×79 che è alle origini di questa passione per l'insegnamento dei "trucchi" del calcolo mentale.

Si lavora dunque mostrando tutte le strategie e i "trucchi" di calcolo mentale, a cominciare dai più semplici relativi alle quattro operazioni per arrivare al metodo per calcolare la radice quadrata di un quadrato perfetto (non si parla dell'algoritmo per l'estrazione della radice quadrata ma semplicemente di una strategia valida quando si lavora con numeri quadrati di cui non si conosce la radice, indicativamente i numeri sopra il 20).

La divisione con resto e l'ordinamento dei numeri razionali rimangono senza dubbio gli scogli più duri da affrontare non solo per gli studenti, ma anche per alcuni docenti che, abituati ad affidarsi all'algoritmo tradizionale per la divisione o al minimo comun denominatore tra frazioni, rimangono spiazzati all'inizio dal lavoro sui multipli e sottomultipli per la divisione con resto (es: $154 \div 12 \Rightarrow 154 = 12 \times 13 + 8$) o dall'idea dell'«intero più vicino» con la quale si possono riscrivere i numeri razionali $\left(es\colon \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3} = 6 - \frac{2}{3}\right)$.

Le prove di selezione vengono anticipate da simulazioni, con una batteria di calcoli-domande che hanno per risposta un numero. È vietato:

- utilizzare strumenti di calcolo (di qualunque tipo), formulari e matite;
- scrivere le operazioni da svolgere su fogli di carta, sulle mani o su altri supporti (cellulare, tablet, tavolo, altre parti del corpo, ecc.).

È consentito solamente l'uso della penna e si possono scrivere le risposte con la penna SOLO negli appositi spazi vicino a ciascuna domanda. Non si può correggere la risposta e non si può scrivere altro: quindi ogni altro segno comporta che la risposta sia considerata errata.

Ogni risposta errata o mancante o incompleta o pasticciata o non chiaramente leggibile vale 0 (zero) punti.

Un regolamento così "severo" non impedisce di lavorare con tutti, anzi gli studenti possono risultare maggiormente stimolati se sanno di affrontare una prova difficile, dove non sono ammessi errori di distrazione. Naturalmente devono essere adeguatamente preparati ad affrontare una simile pressione, ma si consideri il fatto che nelle due edizioni in cui è stato possibile proporre la prova di calcolo mentale, si lavorava in squadre e dunque si potevano distribuire i calcoli, addirittura all'interno del singolo calcolo c'era chi svolgeva un pezzo, chi un altro e chi "tirava le somme" (si pensi, ad esempio, al metodo Trachtenberg per le moltiplicazioni, che viene illustrato nella videolezione dedicata al calcolo mentale).

Di seguito si riportano alcuni esempi di calcolo proposti e si rimanda all'Appendice E.6 per le prove di selezione e per il documento di presentazione del calcolo mentale con i suggerimenti di tecniche particolari forniti ai docenti (le basi del calcolo mentale sono illustrate comunque ai docenti in una videolezione dedicata).

LE QUATTRO OPERAZIONI

1. $29 + 37 =$
2. $58 - 19 =$
3. $12 \times 35 =$
4. $34 \times 11 =$
5. $84 \times 76 =$
6. $54^2 =$
7. $39^2 =$
8. $81^2 =$
9. $3798 + 2659 =$
10. $49 + 63 + 318 =$
11. $192 + 288 + 414 =$
12. $2204 - 1489 =$
13. $13040 - 11599 =$
14. $13 \times 150 =$
15. $151 \times 205 =$
16. $160 \times 240 =$
17. $350 : 14 =$
18. $1548 : 18 =$
19. $6732 : 44 =$
20. $17550 : 234 =$

IL RESTO DELLA DIVISIONE

Scrivete solo il resto della divisione. Ad es: $5 : 2$, il resto è 1.

21. $189 : 7$, il resto è
22. $238 : 13$, il resto è
23. $329 : 8$, il resto è
24. $1406 : 35$, il resto è
25. $8507 : 17$, il resto è

Figura 3.63 – Alcuni esempi di calcoli richiesti: le quattro operazioni, i quadrati, la divisione con resto

CONFRONTO

Confrontate le seguenti coppie di numeri razionali inserendo al posto dei puntini il simbolo di maggiore (>), minore (<) o uguale (=):

26. $\frac{3}{7} \ldots\ldots \frac{3}{12}$

27. $\frac{4}{7} \ldots\ldots \frac{5}{8}$

28. $\frac{5}{3} \ldots\ldots \frac{20}{12}$

29. $\frac{9}{8} \ldots\ldots \frac{12}{11}$

30. $\frac{20}{22} \ldots\ldots \frac{10}{12}$

31. $\frac{10}{7} \ldots\ldots \frac{151}{150}$

32. $\frac{8}{5} \ldots\ldots \frac{160}{100}$

33. $\frac{16}{7} \ldots\ldots \frac{176}{87}$

L'INTERO PIÙ VICINO

Determinate i due numeri interi più vicini tra cui è compreso il numero dato:

34. $\frac{35}{6}$ è un po' più di ..... e un po' meno di .....

35. $\frac{47}{9}$ è un po' più di ..... e un po' meno di .....

36. $\frac{113}{7}$ è un po' più di ..... e un po' meno di .....

ORDINAMENTO CRESCENTE

Mettete in ordine crescente i seguenti numeri razionali:

37.

$$\frac{13}{5}; \quad \frac{31}{9}; \quad \frac{57}{10}; \quad \frac{9}{7}; \quad \frac{3}{4}; \quad \frac{37}{8}; \quad 7; \quad \frac{20}{3}; \quad \frac{27}{21}; \quad \frac{21}{2}.$$

....

ORDINAMENTO DECRESCENTE

Mettete in ordine decrescente i seguenti numeri razionali:

38.

$$\frac{4}{5}; \quad \frac{15}{7}; \quad \frac{9}{4}; \quad \frac{8}{9}; \quad \frac{13}{2}; \quad \frac{5}{6}; \quad \frac{16}{3}; \quad \frac{51}{10}; \quad \frac{17}{8}.$$

....

POTENZE

Riduci le seguenti espressioni a una sola potenza applicando le proprietà delle potenze:

39. $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

40. $\left(\frac{13}{11}\right)^0 \cdot \left(\frac{13}{11}\right)^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

41. $\left(\frac{13}{7}\right)^8 : \left(\frac{13}{7}\right)^7 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

42. $\left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{66}{72}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Figura 3.64 – Esempi di calcoli con i numeri razionali: confronto, l'intero più vicino, ordinamento, potenze

TRA DUE NUMERI…

Inserite in ordine crescente dei numeri razionali compresi tra i numeri dati, come nel seguente esempio:

il testo: 1 …… …… …… …… 6

la soluzione: 1 **2** **3** **4** **5** 6

36. $\frac{5}{8}$ …… …… …… …… 2

37. $\frac{7}{8}$ …… …… …… …… $\frac{7}{6}$

38. 3 …… …… …… …… $\frac{16}{5}$

POTENZE AD ESPONENTE NEGATIVO

Calcola le seguenti potenze:

43. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

44. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

45. $-\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

46. $(-5)^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

RADICI QUADRATE

Calcola le seguenti radici quadrate di quadrati perfetti:

47. $\sqrt{961} = \boxed{}$

48. $\sqrt{1521} = \boxed{}$

49. $\sqrt{2116} = \boxed{}$

Figura 3.65 – Esempi di calcoli solo per le categorie M3-S1: inserisci in ordine quattro numeri tra due numeri razionali, potenze ad esponente negativo, radici quadrate di quadrati perfetti

Capitolo 4 Analisi delle applicazioni sul campo

4.1 L'evoluzione di Matematica per tutti nel corso delle tre edizioni

Si esamina dapprima l'evoluzione le tre edizioni o tornate (iterazioni nella terminologia DBR) presentando in primo luogo i dati relativi alla partecipazione e la distribuzione geografica, e in secondo luogo l'andamento e le modifiche che sono state apportate in relazione a tre aspetti:

- i giochi
- la competizione
- il lavoro con i docenti partecipanti

Alcune scelte e osservazioni sono state condivise con i docenti del team organizzatore[162].

4.1.1 Partecipazione e distribuzione geografica delle classi

Si presentano alcune tabelle con i dati relativi alle classi partecipanti nelle diverse edizioni, considerando il grado scolastico e la provenienza geografica suddivisa per regione.

	2018-19	**2019-20**	**2020-21**	
Lazio	77	111	47	235
Emilia-Romagna	8	23	10	41
Toscana	10	26	4	40
Campania	16	20	1	37
Lombardia	5	20	12	37
Marche	3	20	9	32
Piemonte	3	12	1	16
Sardegna	1	11	2	14
Abruzzo	3	6	0	9
Sicilia	2	3	4	9
Veneto	2	7	0	9
Friuli-Venezia Giulia	1	5	1	7
Trentino-Alto Adige	0	5	5	10
Liguria	0	5	1	6
Puglia	0	2	2	4
Calabria	0	0	3	3
Umbria	0	2	0	2
	131	**278**	**102**	**511**

Tavola 4.1 – Il numero di classi partecipanti regione per regione nelle categorie M1-M2 e M3-S1 nelle tre edizioni

162 Per questo motivo si userà la prima persona singolare e plurale.

	2018-19	2019-20	2020-21	totale
Lazio	113	177	47	337
Lombardia	11	44	12	67
Campania	22	36	1	59
Emilia-Romagna	11	36	10	57
Marche	4	39	9	52
Toscana	10	38	4	52
Sardegna	3	22	2	27
Abruzzo	6	16	0	22
Veneto	2	15	0	17
Piemonte	3	12	1	16
Trentino-Alto Adige	1	9	7	17
Friuli-Venezia Giulia	1	7	1	9
Puglia	0	6	2	8
Umbria	0	6	2	8
Liguria	0	6	1	7
Sicilia	2	3	0	5
Calabria	0	0	3	3
Molise	0	1	0	1
Basilicata	0	0	0	0
Val d'Aosta	0	0	0	0
	189	**473**	**102**	764

<table>
<tr><th></th><th>2018-19</th><th>2019-20</th><th>2020-21</th><th>totale</th></tr>
<tr><td>E2</td><td rowspan="2"></td><td>18</td><td>10</td><td>28</td></tr>
<tr><td>E3</td><td>45</td><td>11</td><td>56</td></tr>
<tr><td>E4</td><td rowspan="2">46</td><td rowspan="2">100</td><td>9</td><td>82</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>36</td><td>109</td></tr>
<tr><td>M1</td><td rowspan="2">94</td><td rowspan="2">210</td><td>25</td><td>177</td></tr>
<tr><td>M2</td><td>8</td><td>160</td></tr>
<tr><td>M3</td><td rowspan="2">37</td><td rowspan="2">68</td><td></td><td>52</td></tr>
<tr><td>S1</td><td>3*</td><td>56</td></tr>
<tr><td>S2</td><td>12</td><td rowspan="2">32</td><td rowspan="2"></td><td>28</td></tr>
<tr><td>S3</td><td></td><td>16</td></tr>
<tr><td></td><td>189</td><td>473</td><td>102</td><td>764</td></tr>
</table>

Tavola 4.2 - Il numero di classi partecipanti regione per regione in tutti i livelli scolastici nelle tre edizioni. Nella tabella a destra sono evidenziate in giallo le categorie oggetto di questa ricerca, mentre le caselle con sfondo grigio stanno a indicare che per quella edizione non era prevista la partecipazione delle relative categorie. *Nell'a.s. 2020-21 non era prevista la partecipazione della categoria S1 ma tre classi di un istituto superiore di Rovereto (TN) hanno voluto comunque iscriversi e il comitato ha accettato di fare un'eccezione.

Dai dati rappresentati nella Tavola 4.1 e nella Tavola 4.2 si vede come il numero di classi partecipanti è più che raddoppiato dalla prima alla seconda edizione. Va aggiunto che ci sono stati anche molti docenti e/o scuole che hanno effettuato l'acquisto di giochi di CreativaMente senza iscriversi a Matematica per tutti. Nella terza edizione purtroppo i numeri si sono ridotti significativamente a causa dell'emergenza Covid-19 per la quale molte scuole non hanno permesso l'utilizzo di materiali in classe. Anche qui vanno però considerate le circa 30 scuole che hanno fatto acquisti di giochi senza iscriversi alla Special Edition.

La distribuzione geografica dei partecipanti vede ovviamente il Lazio come la regione con più classi, ma è interessante il dato percentuale che si può ricavare dalla Tavola 4.1, per cui il numero di classi del Lazio erano circa il 59% delle classi totali nella prima edizione e sono scese al 40% nella seconda edizione, segno che la diffusione nel territorio nazionale stava cominciando. Nella terza edizione è curioso il caso della regione Calabria che partecipa con tre classi prime di una scuola secondaria di primo grado di Isola di Capo Rizzuto (KR).

docenti	2018-19	2019-20	2020-21	tot/grado
E (primaria)	45	149 (116 nuovi)	27 (15 nuovi)	**221 (176 unici)**
M (sec. 1° g)	55	180 (139 nuovi)	43 (10 nuovi)	**278 (204 unici)**
S (sec. 2° g)	21	53 (42 nuovi)	3	**77 (63 unici)**
tot/anno	**121**	**382 (297 nuovi)**	**73 (25 nuovi)**	**576 (443 unici)**
classi	188	473	102	

Tavola 4.3 – Il numero di docenti partecipanti nel corso delle tre edizioni. L'indicazione tra parentesi riguarda i docenti che si sono iscritti per la prima volta («nuovi») e non hanno partecipato alle precedenti edizioni. Nei totali sono indicati tra parentesi gli «unici», in quanto nella somma si considerano più volte i docenti che hanno partecipato a più di una edizione.

Nella Tavola 4.3 è stato riportato invece il numero di docenti partecipanti, in quanto a ogni docente di matematica può corrispondere più di una classe, specialmente nelle scuole secondarie, e dunque il numero di docenti è sempre inferiore al numero di classi. Si è voluto distinguere il numero di docenti partecipanti indicando con «nuovi» quelli che si sono iscritti per la prima volta e non hanno partecipato alle precedenti edizioni. In particolare, il dato importante per questa ricerca è relativo alla percentuale di docenti che hanno confermato la propria partecipazione l'anno successivo: complessivamente circa il 70% dei docenti si è iscritto nuovamente dalla prima alla seconda edizione. Si prende in considerazione solo il dato tra le prime due edizioni, in quanto si è consapevoli del fatto che il dato della terza edizione è condizionato dall'emergenza Covid-19 e dunque non permette una fotografia attendibile. Per quanto riguarda le categorie oggetto di questa tesi si ha una percentuale di conferme di iscrizione pari al 75% (41/55) per la categoria M (secondaria di primo grado) e al 52% per la categoria S (secondaria di secondo grado). Il 52% delle superiori è condizionato dalla rinuncia di 6 classi seconde che avevano partecipato alla prima edizione.

4.1.2 I giochi

Il primo anno sono stati utilizzati i giochi di CreativaMente allora disponibili in ambito matematico (*Pytagora - Numbers in puzzle*, *Rolling CUBES Pytagora* e *Conta che ti passa*), è stato rieditato il gioco *La Boca* e per colmare la lacuna dell'ambito Geometria è stato inserito il gioco *Ubongo*[163], in quanto *Polyminix* era ancora in fase di progettazione. Nel lavoro in classe il gioco più sacrificato è stato senza dubbio *Conta che ti passa*, oggi fuori produzione, ma al quale sono particolarmente legato perché è il primo gioco di CreativaMente che ho visto e rimango ancora convinto che sia un gioco che, rivisto opportunamente, possa offrire grandi potenzialità. Non entrerò qui nel dettaglio della meccanica del gioco, fondamentalmente dopo la prima edizione abbiamo dovuto fare una scelta di "razionalizzazione" che è un po' il denominatore comune dell'evoluzione di Matematica per tutti.

163 *Ubongo* è un gioco da tavolo sviluppato dal game designer svedese di origine polacca Grzegorz Rejchtman. È apparso originariamente come *Pyramidens Portar* dall'editore svedese Kärnan e ha vinto il premio svedese Årets nel 2003. Il gioco è stato successivamente distribuito in Germania nel 2005 con il nome *Ubongo* dall'editore Kosmos, che poi lo ha portato anche in Italia.

Cerco di spiegare brevemente cosa intendo con "razionalizzazione". Presi dall'entusiasmo dell'inizio di una nuova avventura non abbiamo calcolato in modo adeguato la mole di contenuti proposti attraverso i giochi, le videolezioni, i quesiti, ecc. Infatti, chi si affaccia per la prima volta al mondo della matematica attraverso il gioco può rimanere spaventato o addirittura sopraffatto da una varietà così ampia di contenuti: così proporre "tanto" risulta controproducente perché, ritornando alla saggezza dei proverbi a me particolarmente cara (si veda §2.3), «il troppo stroppia». Così, dopo l'esperienza della prima edizione, ci è sembrato corretto razionalizzare ovvero ridurre la varietà di giochi proposti e cercare di collegare i giochi ai contenuti dei quesiti e dei problemi, con l'introduzione delle sfide (di cui si è parlato nel §3.4.6) dalla seconda edizione in avanti. Va detto, però, che questo lavoro di razionalizzazione – che ha portato a modificare il catalogo dei giochi proposti – non è stato sviluppato alla luce di una presunta inadeguatezza di un determinato gioco nella didattica, ma bensì considerando particolarmente gravoso il lavoro proposto per il docente. Mi spiego meglio su questo punto: dopo la prima edizione e, oggi possiamo dire anche dopo la terza edizione, abbiamo scoperto che molti insegnanti – che pure avevano apprezzato la proposta e magari avevano partecipato a più di un'edizione – non erano riusciti a prendere visione di tutto il materiale a loro disposizione nella piattaforma. Non solo, diversi insegnanti avevano giocato poco con alcuni giochi o addirittura li avevano utilizzati un'unica volta, magari proprio in vista della prova di selezione. Chiaramente questa difficoltà riscontrata da molti insegnanti ci ha portato a riflettere su una modalità che permettesse loro di accedere realisticamente a tutto il materiale proposto all'interno della piattaforma e soprattutto di utilizzare concretamente i giochi in classe.

Così, nella seconda edizione abbiamo deciso di togliere dai giochi proposti *Conta che ti passa*, nonostante i riscontri positivi avuti[164], di sostituire *Ubongo* con *Polyminix* (primo gioco pensato e realizzato anche in funzione di Matematica per tutti) e di inserire due giochi nuovi collegati all'ambito Rompicapo,

---

164 Così ci aveva scritto a proposito di *Conta che ti passa* una docente di un istituto agrario di Elmas (CA):

> «Ragazzi guardate che è tanto carino questo gioco, se non entrate nel cuore della partita non lo capite, datemi fiducia, giocate!». Un po' scettici iniziarono a giocare «sembra il gioco dell'oca... è per bambini» sbuffavano i più polemici. «Ma le carote sono i punti?» «Certo ragazzi, dovete accumulare carote per vincere e per farlo vi serve un po' di matematica e un po' di gioco d'azzardo, come se giocaste a poker». BINGO. Mica avevo parlato di probabilità, no, stavano giocando d'"azzardo" nel senso più letterale del termine. Dovevano azzardare le loro mosse perché chi veniva dopo di loro gliele avrebbe potute rovinare in un attimo e addio carotine. Di colpo "Conta che ti passa" è diventato bellissimo. La soddisfazione nel costringere gli altri a tornare indietro di una casella a ogni errore valeva la maggior fatica di questo gioco rispetto a Ubongo. Fu così per tutti, piacevolmente così anche per quelli che la matematica proprio non la digeriscono. In particolare, mi colpì vedere una delle mie studentesse meno inclini allo studio della materia disquisire brillantemente con un compagno sul fatto che una certa carta non poteva usarla perché c'era scritto che dovevano esserci più di 2 ma meno di 5 conigli e che quindi dovevano essere per forza o 3 o 4! Ricordo che pensai "sarà un caso..." ma poi con lo stesso fervore spiegava a un'altra compagna che un'altra carta non andava bene perché c'era scritto "divisibile per 3" e quel numero non lo era. Provai una sensazione davvero piacevole. A quella mia alunna la matematica non piace ancora, le piaccio io (qualcosa l'ho ottenuta), le piace l'idea di andare a Roma a fare la finale...

ovvero *SET* e *SixStix*[165]. Inoltre, si è deciso di lasciare *Pytagora - Numbers in puzzle* solo alle prime due classi della secondaria di primo grado: infatti, il gioco *Pytagora SMARTY Puzzle*, che poi lo ha sostituito e soprattutto l'ha reso più appetibile anche per gli studenti più grandi, era ancora in fase di progettazione.

Prima di arrivare alla terza edizione condizionata dall'emergenza Covid-19, è necessaria una considerazione importante sulle quantità di scatole dei giochi che venivano spedite nel corso delle prime due edizioni:

- prima edizione: 1 *Rolling CUBES Pytagora*, 1 *Pytagora - Numbers in puzzle*, 1 *La Boca*, 1 *Ubongo*, 1 *Conta che ti passa*
- seconda edizione: 3 *Rolling CUBES Pytagora*, 2 *Polyminix*, 1 *La Boca*, 1 *SET*, 1 *SixStix* [1 *Pytagora - Numbers in puzzle* al posto di 1 *Rolling CUBES Pytagora* per le cat. M1-M2]

I numeri apparentemente esigui di scatole destinate a una classe mediamente di 20 studenti erano spiegati da due ragioni: la prima di natura economica, in quanto non si poteva chiedere una cifra troppo alta alle scuole, ai docenti o alle famiglie degli studenti partecipanti; la seconda legata a un'idea di utilizzo in classe in modalità "sala giochi o casinò", ovvero proponendo agli studenti di lavorare su tavoli da gioco distinti con isole dedicate a ciascun gioco per poter sfruttare tutti i materiali e per coinvolgere tutti gli studenti. Abbiamo scoperto il limite di questa scelta anche grazie all'emergenza Covid-19, in quanto le restrizioni ci hanno portato ad offrire kit individuali per giocare. È certamente possibile giocare tutti quanti insieme a giochi diversi e magari spostarsi nell'arco della lezione da un tavolo all'altro (come appunto in un casinò), ma occorre conoscere bene già tutti i giochi, averne fatto esperienza singolarmente, in gruppo, confrontandosi tra pari e con il docente, e questo sicuramente era più difficile con i quantitativi offerti nelle prime edizioni. Naturalmente si tratta di osservazioni che vanno nell'ottica di un miglioramento continuo e non mettono in discussione la validità della proposta e dell'esperienza vissuta dai partecipanti alle prime due edizioni. Va aggiunto, infatti, che *Pytagora - Numbers in puzzle*, *SET* e *SixStix* possono essere giocati anche con tutta la classe insieme: se non è necessario rispettare il distanziamento, si possono formare 4 o 5 squadre da 3 o 4 studenti ciascuna e si può creare un grande tavolo da gioco (magari unendo più banchi) attorno al quale tutti possono giocare.

Per la terza edizione sono state compiute delle scelte condizionate dalla situazione di emergenza del Paese e, infatti, è stata denominata "Special Edition": abbiamo deciso di puntare solamente su due giochi e di permettere alle classi di giocare con materiali individuali o al più per coppie. I giochi scelti sono stati *Rolling CUBES Pytagora* e *Polyminix* e sono state strutturate anche delle attività a distanza con questi giochi: durante il lockdown molti studenti hanno potuto così anche giocare da casa grazie alla propria dotazione

[165] *SixStix* è un gioco distribuito da Helvetiq nel 2015 e il suo autore è il danese Martin Nedergaard Andersen. Il gioco ha fatto parte della proposta solamente nella seconda edizione e si collegava all'attività dei giochi con gli stuzzicadenti/fiammiferi, già proposta nell'ambito Rompicapo dei quesiti del Con-corso.

personale di dadi e polimini. Nel frattempo, però, avevamo completato il nuovo *Pytagora SMARTY Puzzle*, avevamo approfondito i giochi *La Boca* e *SET* e stavamo progettando il gioco *FUNB3RS*, ma naturalmente non abbiamo potuto inserire questi giochi nella proposta della terza edizione, in quanto non era possibile giocarci a scuola rispettando le norme sul distanziamento[166]. Abbiamo invece dovuto decidere di rinunciare al gioco *SixStix* anche per le edizioni successive, in quanto la ditta che produce ha cambiato il packaging in un modo decisamente poco adatto all'utilizzo a scuola. Al termine della terza edizione l'esperienza più matura di utilizzo dei giochi riguarda ovviamente *Rolling CUBES Pytagora* e *Polyminix*: del primo si è detto nel §2.2.4 ed è stato sempre presente nella proposta; il secondo non era ancora stato pubblicato per la prima edizione ma è stato sviluppato durante lo stesso anno scolastico anche alla luce della sperimentazione di alcuni docenti e, come detto, è stato al centro anche di alcune sessioni di un'officina di Geometria presentata all'interno di un progetto Erasmus +. Sono state sviluppate nuove attività intorno al gioco *La Boca*, anch'esse in parte presentate all'interno del progetto ANFoMAM, mentre non è stato ancora possibile sperimentare come si voleva il gioco *Pytagora SMARTY Puzzle* e gli approfondimenti sul gioco *SET*, per non parlare naturalmente del gioco *FUNB3RS* che è uscito solamente alla fine del mese di ottobre 2021.

4.1.3 La competizione

Di pari passo con i cambiamenti nei giochi e nel loro utilizzo anche la competizione ha subito delle trasformazioni. Purtroppo, l'evoluzione della competizione è stata condizionata dall'emergenza Covid-19 che non ha permesso che si svolgessero in presenza le fasi finali della seconda e della terza edizione e che ha impedito la sperimentazione dei giochi dove non è possibile rispettare le norme per il distanziamento.

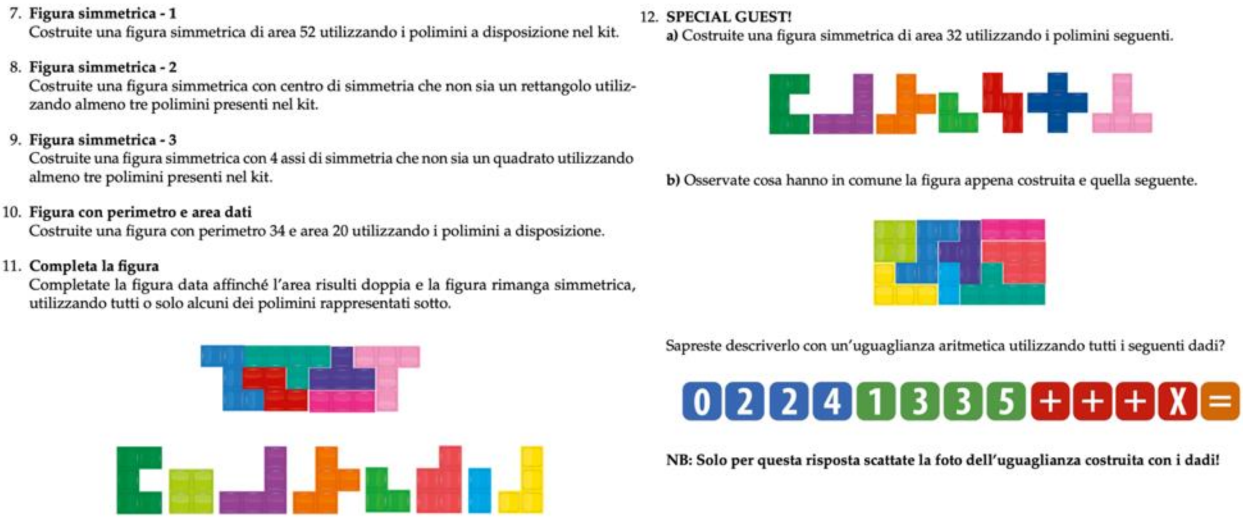
Anzitutto la prima grande evoluzione è stata la fase finale della prima edizione, l'unica che si è potuta svolgere nel parco a tema Cinecittà World. In cinque ambienti diversi, ciascuno dedicato a un gioco diverso, si sono alternati oltre 1000 studenti (tra questi erano inclusi anche quelli di scuola primaria e del secondo anno di scuola secondaria di secondo grado) suddivisi in squadre formate da 3 o 4 elementi. Io personalmente coordinavo le attività di un hangar intero dedicato ai giochi *Rolling CUBES Pytagora* e Ubongo: vi giocavano contemporaneamente 80 squadre, o meglio 40 giocavano e le altre 40 facevano da "controllori" e poi si scambiavano i ruoli. Ipotizzando le squadre tutte composte da 4 studenti, si trattava di 320 studenti che giocavano contemporaneamente e nello stesso posto ai giochi che avevamo scelto, secondo le nostre indicazioni: qualcosa di difficile da dimenticare soprattutto per chi come ha dato il via al timer di 5 minuti per un numero finito ma molto grande di volte in quella giornata, senza sosta dalle 12 alle 17:30! Perché si è trattata della prima grande evoluzione? Perché è stato possibile osservare con i nostri occhi in modo particolarmente evidente come i giochi "da soli" fossero sufficienti per fare

[166] Nella quarta edizione (a.s. 2021/22) si è deciso di tornare a proporre più giochi aumentando in modo significativo il numero di scatole dei giochi che non prevedono la versione a kit.

matematica! Mi spiego meglio: fino a quel giorno i giochi e le attività proposte erano state sperimentate in classe dagli insegnanti del team organizzatore, a eccezione del sottoscritto che era in congedo per il Dottorato, ma era ferma la convinzione che andassero affiancati ai giochi altri quesiti, altro materiale del mondo della matematica ricreativa e, infatti, nei quesiti della prova di selezione erano pochi quelli con esplicito riferimento ai giochi. Quel giorno ha segnato un punto di non ritorno: tutto doveva ruotare attorno a quei giochi e, dove non c'era la possibilità di collegarsi ai giochi che avevamo a disposizione, era necessario trovare o realizzare giochi nuovi, come nel caso di *SET* o del recentissimo *FUNB3RS*.

Nelle prove di selezione della seconda edizione abbiamo dunque dato un po' più di spazio ai giochi, anzitutto dando l'indicazione di portare con sé i polimini e i dadi durante le prove e poi inserendo più quesiti collegati con i giochi. Ma il vero punto di svolta sono state le sfide, nate nella circostanza di emergenza del lockdown di marzo 2020 (si veda il §3.4.6): dalle sfide in avanti i giochi e le prove del Concorso sono diventati sempre più strettamente connessi. Purtroppo, non è stato possibile né replicare la fase finale in presenza né realizzarla a distanza a causa del lockdown perché non avremmo potuto avere equità di partecipazione: gli studenti partecipavano alla competizione in squadre composte da 3 o 4 e avrebbero dovuto collegarsi ciascuno dalla propria abitazione con un rischio troppo elevato di problemi di connessione e con un enorme difficoltà dal punto di vista tecnico e di controllo del loro operato.

Nella terza edizione, come detto, si sono proposti solamente due giochi e la competizione si è strutturata attorno a due ambiti che nella Special Edition abbiamo voluto chiamare "Il mondo intorno a *Rolling CUBES Pytagora*" e "Il mondo intorno a *Polyminix*": si è trattato in qualche modo ancora di Aritmetica e Geometria, ma abbiamo eliminato tutto ciò che non fosse strettamente connesso ai due giochi (ovviamente solo per quella edizione straordinaria). A eccezione di qualche domanda a risposta multipla, le domande di *Polyminix* erano tutte relative alla costruzione di figure con i polimini (si chiedeva poi di caricare le foto delle soluzioni come per le domande in Figura 4.1) e c'era una carrellata di domande intorno a *Rolling CUBES Pytagora* sulla scia del percorso descritto nel §2.2.4 (si veda Appendice E.6 per il dettaglio delle prove di selezione).



7. **Figura simmetrica - 1**
Costruite una figura simmetrica di area 52 utilizzando i polimini a disposizione nel kit.

8. **Figura simmetrica - 2**
Costruite una figura simmetrica con centro di simmetria che non sia un rettangolo utilizzando almeno tre polimini presenti nel kit.

9. **Figura simmetrica - 3**
Costruite una figura simmetrica con 4 assi di simmetria che non sia un quadrato utilizzando almeno tre polimini presenti nel kit.

10. **Figura con perimetro e area dati**
Costruite una figura con perimetro 34 e area 20 utilizzando i polimini a disposizione.

11. **Completa la figura**
Completate la figura data affinché l'area risulti doppia e la figura rimanga simmetrica, utilizzando tutti o solo alcuni dei polimini rappresentati sotto.

12. **SPECIAL GUEST!**
a) Costruite una figura simmetrica di area 32 utilizzando i polimini seguenti.

b) Osservate cosa hanno in comune la figura appena costruita e quella seguente.

Sapreste descriverlo con un'uguaglianza aritmetica utilizzando tutti i seguenti dadi?

NB: Solo per questa risposta scattate la foto dell'uguaglianza costruita con i dadi!

Figura 4.1 - Alcuni quesiti dalla prova di selezione locale della Special Edition

Le prove di selezione locale non sono state svolte a squadre, ma la classe intera costituiva un'unica squadra. In 60 minuti dovevano rispondere a 27 domande e senza un lavoro organizzato da vera squadra era difficile riuscire a ottenere punteggi adeguati all'accesso alla finalissima che per la Special Edition riguardava solamente 4 classi dell'unica categoria "Medie" costituitasi per la situazione di emergenza. Per la prima classe di scuola secondaria di secondo grado si è svolta una finale a distanza straordinaria per tre classi di un istituto superiore di Rovereto (TN), che avevano voluto comunque partecipare a Matematica per tutti, anche se non avevamo previsto la categoria per la scuola secondaria di secondo grado a causa della situazione pandemica.

Alla finalissima della Special Edition non siamo arrivati, però, digiuni di esperienze di gioco a distanza: in occasione del Pi Greco Day avevamo, infatti, offerto la possibilità a tutti coloro che lo desideravano di partecipare a un momento di giochi e sfide a distanza attraverso una diretta di poco più di un'ora trasmessa sul canale YouTube dell'associazione ToKalon e intitolata "Una sfida tra le sfide" (ToKalon 2021 [marzo 17] in B4 Videografia). La diretta è avvenuta in orario mattutino, dunque con gli alunni collegati dalle proprie classi attraverso l'utenza del docente e con qualche eccezione di classi in DaD dove erano collegati direttamente gli studenti dalle proprie case. Questa diretta (ripetuta anche con gli studenti della scuola primaria) è stata veramente un'esperienza commovente per noi e confesso di avere le lacrime agli occhi mentre ci ripenso, per i tanti messaggi di ringraziamento arrivati dagli insegnanti e anche da qualche genitore e per la sensazione speciale che mi ha lasciato quel momento: ho avvertito la presenza dei ragazzi e dei colleghi nonostante la distanza e la modalità decisamente particolare (si pensi che io ero collegato dalla mia abitazione!). Tra tutti i messaggi riporto quello di una docente che li sintetizza tutti:

> Volevo ringraziarvi tantissimo per la diretta di oggi: è stata una ventata di aria fresca!

I ragazzi mi hanno davvero stupito: appena lanciavate una sfida si mettevano a chattare per mandare soluzioni o si confrontavano tra loro per trovare le strategie (eravamo anche su zoom). Non li vedevo così attivi a distanza da tempo. Vederli impegnati con gioia a fare matematica anche in questa strana situazione è davvero impagabile. [mail firmata da un'insegnante]

Non è un caso che dalla quarta edizione (quella in corso) la docente che ci ha scritto questa mail sia entrata a far parte del comitato didattico-scientifico.

Al termine della diretta abbiamo anche proposto un problema da risolvere intorno a *Rolling CUBES Pytagora* lasciando agli studenti circa due settimane di tempo per inviarci le loro soluzioni. A un mese di distanza dalla diretta (si veda ToKalon 2021 [aprile 21] in B4 Videografia) abbiamo caricato un video in cui io e Daniele Scopetti abbiamo commentato criticamente tutte le soluzioni inviateci alle varie domande del problema.

Nella finalissima è successo qualcosa di simile, ma probabilmente ancora più significativo perché stavolta avevamo anche la possibilità di vedere gli studenti nelle loro classi attraverso le webcam delle LIM o dei dispositivi (pc o smartphone) dei docenti referenti e il coinvolgimento per noi e per loro è stato decisamente maggiore: un'esperienza veramente unica. Gli studenti rispondevano alle sfide proposte man mano inviandoci le foto delle loro soluzioni, noi mostravamo in diretta le foto con le risposte delle diverse squadre partecipanti e per gli studenti vedere le proprie soluzioni in video erano un po' come vedere sé stessi, anche se in una forma un po' particolare. In sintesi, abbiamo visto con i nostri occhi studenti che erano entusiasti per un giorno in cui erano "usciti dalla propria classe seppur rimanendo in aula".

Figura 4.2 – Due sfide della finalissima, con le soluzioni inviate in diretta dalle squadre partecipanti. A sinistra i quadrati 10x10 costruiti dalle quattro finaliste (ciascuna scuola era abbinata a un polimino diverso) e a destra la domanda finale a cui hanno risposto le due squadre rimaste a contendersi il titolo di campione nazionale.

Per concludere questo spazio dedicato alla competizione, ci sarebbero certamente molti aneddoti da raccontare che contribuiscono a rendere evidente la peculiarità della proposta della competizione, ovvero la dimensione "per tutti". Mi limito a menzionare i più significativi.

Il primo è senza dubbio quello che ha riguardato Simone. Ce lo ha raccontato la sua insegnante quando ha saputo che i suoi alunni erano stati ammesse alle finali di Cinecittà World:

> I miei ragazzi non hanno avuto un anno scolastico facile a seguito di una tragedia avvenuta proprio a inizio anno, il 25 settembre. Un compagno, Simone, è stato ucciso da un pirata della strada. Credevo non li avrei più visti sorridere. Simone era bravo in matematica e io a questo concorso li ho iscritti per lui. "Fare matematica giocando... fare matematica sbagliando..." era il concorso che faceva per me, e per loro, intuitivi ma non tanto assidui nello studio, e giocherelloni sempre anche e soprattutto a sproposito". Forse potevo ottenere qualcosa di matematicamente proficuo e farli tornare a sorridere, decisi di accettare la sfida e convinsi la D.S. a iscrivere la classe.
>
> Neanche a farlo apposta l'anno scolastico scorso era stato approvato un progetto PON sulle Competenze di Base che avevo strutturato calibrandolo proprio sui giochi matematici. Chiesi ai ragazzi la disponibilità a frequentare un corso di matematica tutti i venerdì dalle 14:00 alle 17:00. Erano un po' spenti e svogliati ma mi avevano promesso che per Simone si sarebbero impegnati e accettarono di partecipare.

Nella lettera l'insegnante ci raccontava poi nel dettaglio l'esperienza con i giochi e anche con le sfide di calcolo mentale, ma le righe che ho riportato sono sufficienti per comprendere la portata che aveva assunto questa proposta per quell'insegnante e per gli studenti di quella classe di un istituto agrario di Elmas (CA): un'occasione per tornare a sorridere impegnandosi, giocando e facendo matematica dalle 14 alle 17 ogni venerdì!

Il secondo riguarda Matteo, uno studente autistico, a cui, in occasione della cerimonia conclusiva della prima edizione, è stata donata una targa con impressa la frase "Più grande è la lotta, più glorioso è il trionfo": attorno lui è stata costruita una squadra di ragazzi che ha cercato in tutti i modi di non isolarlo e di far partecipare anche lui ai giochi e alla gara. In particolare, nelle finali al gioco *La Boca* Matteo metteva l'ultimo pezzo del "palazzo".

Il terzo riguarda un momento particolare più recente: martedì 11 maggio 2021 siamo andati a trovare, in un istituto comprensivo di Roma, la classe della squadra che aveva ottenuto il punteggio migliore a livello nazionale nelle prove di selezione locale per la cat. M1-M2. Era passato più di un anno e non era stato possibile riuscire a incontrarsi dal vivo prima! Abbiamo ricevuto un'accoglienza commovente con tanto di striscioni e cartelloni: per loro era "Matematica per tutti" in persona che veniva a trovarli e gli studenti, che nel frattempo erano passati in classe seconda, avevano un desiderio "matto" di fare matematica insieme a noi. Si leggeva nei loro occhi, nei loro volti anche un po' di timore di fare brutte figure, non per paura di un voto negativo o di sbagliare, ma si vedeva in loro lo stesso sentimento di chi vuole che il primo appuntamento con la ragazza che gli piace sia perfetto. Per me e Daniele Scopetti, che abbiamo trascorso due ore insieme a loro, è stato evidente che stavamo incontrato la "Matematica per tutti" in persona, che non corrispondeva a noi due soli, ma era qualcosa di ben più grande, che superava ogni immaginazione e per questo era così attraente. Così è stato per noi semplice decidere di metterci a giocare con loro, per una volta senza proporre quesiti o sfide di cui conoscevamo già la soluzione: abbiamo tirato i dadi di *Rolling CUBES Pytagora* e abbiamo sperimentato per la prima volta un "generatore di sfide casuali" con i polimini secondo quanto riportato nella Tavola 4.4.

a) Superficie di misura X e Perimetro di misura Y
b) Superficie di misura X e Simmetria di tipo Z
c) Superficie di misura X, Perimetro di misura Y e Simmetria di tipo Z

X: Dado da 10 (mis. superficie)	**Y: Dado rosso da 6 (mis. perimetro)**
1) 32	1) 30
2) 36	2) 32
3) 40	3) 38
4) 42	4) 40
5) 44	5) 48
6) 48	6) 50
7) 52	**Z: Dado giallo da 6 (simmetrie)**
8) 56	1-2 ROTAZIONE
9) 60	3-4 ESATTAMENTE UN ASSE DI SIMMETRIA
10) 64	5-6 ALMENO DUE ASSI DI SIMMETRIA

Tavola 4.4 – Il "generatore di sfide casuali" di *Polyminix*: 3 dadi da lanciare per decidere per ciascuna sfida (a, b, c) quale misura di superficie (X) o di perimetro (Y) e quali simmetrie (Z) considerare.

Durante una delle sfide a costruire uguaglianze aritmetiche non siamo riusciti a trovare una soluzione con tutti e 13 i dadi, forse perché "distratti" dal voler seguire e accompagnare il lavoro e i tentativi degli studenti. Terminato il tempo a disposizione, io e Daniele avevamo trovato una soluzione solamente con 12 dadi e alcuni studenti ci stavano illustrando le loro soluzioni con 10 o 11 dadi, quando Gaia, una studentessa con una certificazione DSA di discalculia, ha attirato la nostra attenzione, poiché dandoci le spalle continuava a digitare tasti sulla calcolatrice e a scuotere la testa incredula di fronte all'uguaglianza che aveva costruito con i dadi. Quella studentessa aveva trovato una soluzione utilizzando tutti i 13 dadi (in Figura 4.3 la foto della soluzione trovata).

Figura 4.3 – L'uguaglianza trovata da Gaia, studentessa certificata DSA di classe prima secondaria di primo grado

Questo fatto ha lasciato un segno indelebile in lei, come in noi e nella sua insegnante che, nel questionario inviato al termine delle prime tre edizioni, dovendo scegliere «un episodio/aneddoto significativo» relativamente all'esperienza di Matematica per tutti, ha scritto:

> Non dimenticherò mai la soddisfazione e l'emozione di una mia alunna discalculica che provò nel momento in cui si accorse di essere riuscita a risolvere un problema di Rolling

4.1.4 Il lavoro con i docenti partecipanti

L'ultimo aspetto, difficilmente separabile dai due precedenti, riguarda la proposta di lavoro per i docenti partecipanti, in altri termini riguarda la proposta di formazione.

Anzitutto il primo anno non si è voluto proporre ufficialmente Matematica per tutti anche come formazione docenti: nonostante il MIUR avesse riconosciuto la validità della proposta, il comitato didattico-scientifico ha preferito evitare di strutturare anche delle attività di formazione in quanto si è voluto concentrare sul materiale da mettere a disposizione per utilizzare i giochi e preparare i propri studenti in vista della competizione. Così, quanto descritto nel §3.2.2 riguarda le scelte compiute dalla seconda edizione in poi, ma è risultato evidente a tutti che durante la prima edizione non è realmente mancata una proposta di formazione, in quanto tutte le attività e i materiali messi a disposizione rispondevano alle caratteristiche di aggiornamento e innovazione didattica. L'unica differenza con una vera e propria formazione è stata l'assenza di una richiesta di elaborato finale, come invece è successo per la seconda edizione.

Naturalmente la seconda edizione si è arricchita dell'esperienza maturata durante il primo anno e sono stati prodotti molti materiali nuovi sia video sia pdf anche alla luce di quanto riportato precedentemente e nel §4.1.3. Si è puntato molto sulla discussione di possibili attività da realizzare con i giochi in classe e a distanza, ma soprattutto durante la seconda edizione è stato possibile e fondamentale proporre un evento formativo in presenza in diverse città su quasi tutto il territorio nazionale (del tour formativo si è parlato già nel §3.2.1) come mostrato in Figura 4.4. In alcune città come Roma e Firenze si sono svolti due eventi e prima di iniziare il tour ufficiale è stata realizzata una formazione presso una scuola di Fiumicino (RM) e tre eventi brevi (1 ora) di presentazione della proposta di Matematica per tutti presso la Fiera Didacta di Firenze. Il sottoscritto ha partecipato e condotto ben 25 eventi formativi in un arco di tempo molto ristretto, ovvero dal 17 ottobre al 6 dicembre 2019, incontrando quasi 2000 (esattamente 1965) insegnanti di scuola secondaria e primaria in 24 diverse città in 13 regioni diverse, isole comprese. C'è stato un evento anche nella Repubblica di San Marino e le uniche regioni non coinvolte dal tour sono state la Valle d'Aosta, la Calabria, la Basilicata, il Molise e il Trentino-Alto Adige. In Alto Adige, precisamente a Bolzano, è stato possibile però realizzare, nel mese di gennaio 2020, un minicorso di due incontri dal titolo "La matematica attraverso il gioco" con la partecipazione di 35 docenti. Vedere così tanti insegnanti al lavoro con i giochi in contesti geografici differenti, in ambienti e scuole molto diverse tra loro, è stato certamente il test più importante della sperimentazione di Matematica per tutti.

Figura 4.4 – La mappa con tutte le città del tour formativo "Matematica per tutti e il valore del gioco nella didattica", realizzato dal 12 ottobre al 6 dicembre 2019

Riporto, infine, il racconto in prima persona di un episodio tra i tanti, che ho voluto trattenere come esempio paradigmatico del riscontro avuto tra gli insegnanti:

> Tre Mestieri Etneo (CT), 22 novembre 2021, ore 18:55: io e Luca Fortunati abbiamo condotto l'evento formativo iniziato alle 15:00 e, senza pausa, siamo alle battute conclusive, poiché dovremmo terminare alle 19:00. Aggiungo che ci aspetta un aereo alle 21:15 che ci porterà a Orio al Serio poiché la mattina dopo saremo impegnati in un evento formativo a Piacenza! Alle 18:55 un gruppo di docenti è ancora alle prese con il gioco *Rolling CUBES Pytagora* e non si capacita di non riuscire a trovare la soluzione del proprio lancio utilizzando tutti i 13 dadi. Si tratta di docenti di scuola primaria e secondaria di primo grado che non molla, anche se avrebbe tutte le ragioni per farlo: infatti, è venerdì pomeriggio al termine di 4 ore di formazione dopo una mattinata di lavoro in classe! Io ho nella testa l'aereo da prendere e i giochi da risistemare nelle scatole e poi in valigia, ma la perseveranza, la fiducia nella lotta, la speranza – utilizzando i desideri di Francis Su – che vedo nei volti delle colleghe è contagiosa e dunque lascio tutto e mi metto a cercare insieme a loro la soluzione con 13 dadi. Passo dopo passo si svela ai nostri occhi la strada e non dimenticherò mai le loro facce quando abbiamo collocato insieme l'ultima coppia di dadi che ha completato l'uguaglianza cercata: si sono volute fare un selfie con la soluzione ottenuta sui dadi e per quanto si tratti di un singolo episodio, continuo a considerarlo un'esperienza paradigmatica di quello che vorrei trasmettere attraverso l'approccio pedagogico alla matematica attraverso il gioco. Ci sono molte delle caratteristiche riportate nel §2.3 ed è impressionante come sia semplice accogliere la sfida anche quando la stanchezza potrebbe prendere il sopravvento.

4.2 Analisi qualitativa: riflessioni

4.2.1 Analisi complessiva

Nel tracciare un'analisi complessiva della sperimentazione, alla luce dei dati qualitativi raccolti, si individuano alcuni temi ricorrenti:

- per gli studenti (e per i docenti):
  - coinvolgimento, inclusione e divertimento
  - collaborazione, cooperazione e conversazione
- per i docenti:
  - imparare insieme agli studenti
  - difficoltà con il tempo e con la programmazione curriculare

Si rilevano, inoltre, quali sono gli strumenti essenziali per un approccio pedagogico ricreativo:

- giochi ben pensati e sfide stimolanti
- passione e coraggio dei docenti

Dall'analisi qualitativa dei questionari emergono diverse sollecitazioni che vengono riportate attraverso le stesse parole dei docenti partecipanti.

Si è scelto di partecipare perché è «molto coinvolgente per gli alunni», è «per tutti», favorisce l'inclusione e il protagonismo degli studenti:

> La questione dei protagonisti è quella che mi piace di più: molte volte a scuola ci si sente parte di un qualcosa che qualcun altro ha pensato e dirige... Matematica per tutti rende tutti costruttori del proprio lavoro, studenti e insegnanti. [Docente di scuola secondaria di primo grado, Lazio]

Nel protagonismo che viene favorito dalle attività di Matematica per tutti si scoprono anche «dei veri e propri talenti negli studenti, prima non individuati» in altre modalità di lavoro come il caso di «F.»:

> F. era un ragazzo di I liceo, dislessico e con forti problemi di autostima. Nella primissima fase didattica, quella in cui provavamo insieme i giochi da tavolo e affrontavamo quesiti individualmente, ci trovammo ad affrontare una serie di quesiti in cui veniva chiesto di produrre figure usando i polimini e rispettando certe richieste sul perimetro, sull'area e sulle simmetrie. Quando fu chiesto di creare una figura con un asse di simmetria, venne subito spontaneo a tanti in classe creare delle figure con asse verticale, qualcuno ne produsse una con asse orizzontale, con non poche difficoltà; quando ormai cominciavamo a confrontarci, F. mi chiamò perché aveva scoperto qualcosa di incredibile: una figura, con asse di simmetria obliquo, che rispettava tutte le richieste su perimetro e area.
>
> Fu un momento particolarmente significativo per tutti: F. aveva fatto un salto che nessuno aveva fatto, che superava ogni limitata interpretazione che si lasciasse ingabbiare nella quadrettatura fornita, interpretando con una creatività tutta nuova il testo del quesito. Per F. fu un'edizione di Matematica per tutti molto significativa, in cui arrivò con la sua squadra fino alla fase finale e di cui ancora oggi, in IV liceo, parla con soddisfazione, evidenziando quanto si fosse coinvolto personalmente nel paragone con quesiti, giochi e problemi, guardandosi in azione e mettendo in atto potenzialità di cui spesso dubitava. Per lui è stata un'occasione di conoscenza di sé; per me è stata occasione di assistere e contribuire a questo processo di crescita. [Docente di scuola secondaria di secondo grado, Lazio]

Interessante anche il caso di Sergio:

> Tra i miei ragazzi ne avevo uno (bocciato l'anno scorso) che era formidabile nel calcolo a mente! La cosa bella è stata che anche lui era all'oscuro di questa sua bella dote. Ho cominciato così a dargli bei voti nel calcolo e questo lo ha incredibilmente motivato: da una media del 6, ora ha 8 pieno! E con lui hanno guadagnato in motivazione anche gli altri che si divertivano a stargli dietro… [Docente di scuola secondaria di secondo grado, Toscana]

Emerge il protagonismo anche all'interno di una conversazione matematica vivace e partecipata:

> È stato utile per ciascuno e per tutta la classe che ogni studente esponesse la propria soluzione. Fattore importantissimo in questo processo è stato senza dubbio la possibilità di "reclamare come propria" una soluzione: i ragazzi si sono sentiti orgogliosi di aver scoperto qualcosa di proprio, magari alternativo a quello che avrebbero risposto gli altri della classe o perfino il professore stesso. [Docente di scuola secondaria di secondo grado, Lazio]

L'inclusione è descritta a più riprese attraverso il «per tutti» che prende concretamente forma con il coinvolgimento nel lavoro, attraverso il gioco, degli studenti disabili o BES, e sono molti i racconti di allievi che non solo si ritrovano coinvolti nel lavoro in classe ma che sono anche «contesi» dai propri compagni come:

> Una ragazza disabile, con scarsa autostima e con difficoltà di integrazione, è risultata essere indispensabile al gruppo per la sua velocità nel gioco *Set*. È stato bello vedere come i compagni dei vari gruppi se la "contendevano". [Docente di scuola secondaria di primo grado, Lazio]

o anche:

> Lancio di *Rolling*... classe con tre/quattro ragazze oltre la media normale. Si discute, si spostano i dadi, si ipotizzano soluzioni. Si esulta pensando di aver trovato la strada giusta ma qualcuno nota che un particolare non è stato rispettato... a un certo punto M., ragazzino diversamente abile (molto intelligente!), poco inserito e partecipativo, un po' snobbato didatticamente dai compagni propone una soluzione che dopo uno scetticismo iniziale si rivela corretta. A questo punto M. è al centro dell'attenzione, lo si ascolta parlare e spiegare, si discute con lui, lo si coinvolge. Lo si ricerca. E, la volta successiva, lo si consulta. [Docente di scuola secondaria di primo grado, Lazio]

C'è anche spazio per riprendere i desideri umani di Su (2020), come la pazienza e la speranza:

> Con le attività di Matematica per tutti si insegna la pazienza: la pazienza dell'attesa del proprio turno di gioco, la pazienza nel ragionare e mettere in pratica la propria strategia di gioco, la pazienza nei confronti del compagno con maggiori difficoltà, perché i ragazzi "bravi" si sono accorti che, in qualche caso, può essere più bravo di quello che pensavano. [Docente di scuola secondaria di primo grado, Marche]

e ancora:

> Siamo tutti grati, docenti e studenti, per aver avuto l'opportunità di fare un'esperienza come questa. Ho apprezzato ogni stimolo che ci avete offerto durante tutto il percorso. Mi sono commossa nel vedere come i ragazzi hanno gestito le prove: hanno condiviso, discusso, riflettuto..., ma soprattutto si sono aiutati, anche tra squadre avversarie. Il momento più intenso, però, è stata la premiazione, ma non per aver visto la nostra squadra salire sul palco (certamente dentro di me un po' di orgoglio c'era), ma per le parole che sono state pronunciate, per la testimonianza che ci avete regalato, per la dedizione, l'impegno e l'amore per l'insegnamento che avete dimostrato. Non è facile trovare colleghi con cui condividere idee, scambiare punti di vista, intelligenze e competenze. Mi avete ridato la **speranza**... [Docente di scuola secondaria di primo grado, Abruzzo]

Non sempre, tuttavia, le cose sono state semplici come sembra da queste prime riflessioni; infatti molti docenti hanno riscontrato una difficoltà nell'inserire le attività con i giochi all'interno della programmazione, soprattutto con le verifiche parallele di istituto da svolgere: «manca un percorso strutturato con "il programma"», le attività o i giochi proposti sono «difficilmente collegabili al programma da svolgere», ecc...

Si ritorna allora alla questione fondamentale sollevata nel §2.3: lo scopo, forse questo il più ambizioso di tutti, è fare matematica, più ancora che insegnare un particolare contenuto del "programma". Non c'è dubbio che lavorare secondo quest'approccio richieda tempo, tuttavia occorre fare una scelta, prima di dire che non c'è abbastanza tempo, o che quest'attività toglie del tempo necessario per svolgere il programma: si vuole insegnare a fare matematica o si vuole riempire gli studenti di nozioni, formule e procedure meccaniche? Solo prendendo posizione di fronte a questa domanda varrà la pena insegnare le matematiche elementari attraverso il gioco. Certamente sono importanti le idee e i materiali proposti: giochi ben pensati e sfide stimolanti, che permettano un lavoro graduale, che parte da richieste più semplici e osa arrivare a sfide sempre più difficili, in modo da favorire la partecipazione di tutti, che, stimolati dal successo raggiunto nelle richieste semplici, si muovono con «fiducia nella lotta» e «perseveranza» (Su, 2020) nel tentativo di andare oltre, oltre il noto, oltre se stessi, con un entusiasmo «a volte difficile da contenere» come riportato da molti insegnanti intervistati.

Tuttavia rimane indubbio che gli strumenti più importanti in questo lavoro non saranno mai i giochi, i materiali, i quesiti, le sfide, ma gli attori protagonisti dell'attività del fare matematica: i docenti insieme ai loro studenti, all'inizio, poi gli studenti insieme ai loro docenti. È inoltre vero che l'approccio ricreativo e il gioco favoriscono il divertimento anche dei docenti stessi, i quali possono imparare insieme ai propri studenti e a volte, i più fortunati, insieme ai colleghi, come testimoniato da diversi contributi al questionario:

> Tra docenti e alunni si è instaurata la possibilità di divertirsi insieme e la stima reciproca "alla pari": spesso le soluzioni dei ragazzi ci sorprendono, perché noi non le avevamo pensate. Inoltre loro vogliono sapere le nostre soluzioni, questo crea un clima in cui si impara insieme. In questo modo anche gli errori sono valorizzati perché avvicinano sempre alla soluzione, e anche correggerli insieme diventa una sfida per tutti. Così la conversazione matematica diventa più quotidiana, anche in ambiti diversi dal concorso o dai giochi, diventa l'abitudine per affrontare ogni situazione problematica. Anche io e la mia collega abbiamo imparato a riconoscere il valore didattico di ogni sfida, ci interroghiamo su come usare i materiali in modo graduale ed efficace per la didattica, abbiamo imparato a cogliere il valore delle diverse strategie risolutive dei ragazzi, consce del fatto che ogni alunno ha una sua *forma mentis* diversa da tutti gli altri, quindi arriva alla soluzione per strade personali, ogni strada è da valorizzare e molte ci stupiscono. Ci divertiamo anche noi a confrontare le nostre strategie risolutive che sono quasi sempre diverse. [Docente di scuola secondaria di primo grado, Lombardia]

> Un aneddoto racconta molto: preparo un bel problema su *Polyminix*, di quelli articolati con tante domande e tante possibili risposte. I ragazzi lavorano con entusiasmo, chi disegna, chi spiega con le parole, chi spiega il proprio ragionamento a un compagno che poi lo traduce o lo articola in modo più elaborato, chi sonnecchia con un po' di presunzione, ma poi guarda con curiosità... e poi qualcuno dice: "Adesso possiamo preparare noi un problema per lei?" ... e da quel momento... ho 24 problemi da risolvere, anche più belli di quelli pensati da me. Porto questi problemi nell'altra classe... risolvono quelli e quegli altri ancora... durante il pomeriggio ne parlo con un paio di colleghi che propongono anche loro varianti e idee nuove. Credo che questo sia lo spirito della scuola: studiare, lavorare, costruire, cooperare, sperimentare TUTTI in maniera paritaria. Io per prima, lavorando così, non ho smesso di imparare e questo per me è uno stimolo costante.

> Altra cosa sorprendente è che, in modo diverso da quel che si pensi, i ragazzi scelgono di investire il loro tempo facendo matematica! Suona l'intervallo e non ci si alza, si sta a casa e la domenica si manda una foto con una sfida per i compagni, si coinvolgono i genitori per far vedere e raccontare. La scuola non è quindi solo "io so e ti racconto, tu impari". [Docente di scuola secondaria di primo grado, Lazio]

Gli stessi organizzatori hanno parlato della loro esperienza in "interviste da vicino", delle quali si riportano gli stralci più significativi ai fini di questa analisi.

Maria Cristina Migliucci, che ha visto nascere il progetto Matematica per tutti, coinvolgendosi in esso fin dalle prime battute, descrive il cambiamento che ha visto avvenire in se stessa e nel concorso, ripercorrendo le tre edizioni. Il suo rapporto personale con il gioco non era stato positivo, ci racconta che durante gli anni di scuola si trovava a passare intere estati *subendo* i giochi da tavola proposti dalla sua famiglia, e la sua reazione era sempre quella della noia. Le piaceva giocare a carte, contare i punti e tenere a mente le carte uscite per studiare strategie di gioco, ma non sopportava i vari giochi da tavolo proposti in quel periodo (Trivial Pursuit, Taboo, Risiko). Risulta così ancora più significativo vedere come una persona che certamente non partiva da una passione per il gioco abbia accettato la proposta di fare matematica attraverso i giochi, addirittura quelli da tavolo da lei così mal sopportati! Il suo è un esempio di disponibilità al cambiamento, del coraggio di cui si parlerà anche in conclusione, in quanto ha voluto andare oltre il suo pregiudizio nei confronti dello strumento-gioco, per scoprire se era veramente possibile fare una matematica diversa, più avvincente e gratificante. Le sono bastate poche prove sperimentali nelle sue classi – insegna alla scuola secondaria di primo grado – per convincersi della validità della proposta e delle possibili ricadute positive sui suoi studenti.

Quello che racconta, però, ha anche una profondità diversa, e non nasconde le difficoltà riscontrate, ma le utilizza come stimolo per migliorare:

> L'impressione è quella della grande fatica, soprattutto perché nella scuola c'è una certa rigidità rispetto alle cose da fare, il programma, le verifiche intermedie comuni, e inserire una proposta come il concorso in questo contesto non era affatto scontato. La grande fatica di cui parlo era proprio questa: capire come ritagliare un tempo nel corso dell'anno scolastico per aggiungere il concorso. Quello che ho fatto durante la prima edizione è stato fermare la didattica e lavorare con i materiali proposti per un mese. L'anno successivo mi sono resa conto che avevo realizzato esattamente una contraddizione in termini rispetto a tutto quello che avevo sempre pensato, cioè avevo fatto quello che ritenevo sbagliato: fermarmi, dare spazio al gioco, e poi ricominciare con la didattica. Il secondo anno, quindi, ho cominciato a usare gli strumenti del concorso (i giochi e il materiale proposto) gradualmente, nel tempo, cercando di calarli in quello che era la mia programmazione didattica. In questo modo, a volte il gioco andava a sostituire quello che dovevo fare, altre lo andava a integrare, altre volte non veniva proprio usato. In questo modo, anziché aggiungere il gioco alla mia didattica (con la difficoltà di trovare del tempo appositamente per giocare), ho rimodulato la mia didattica all'uso del gioco. Questo però è possibile solo per chi conosce bene i giochi, altrimenti non si può fare. Faccio l'esempio dei polimini di *Polyminix*: l'idea di usarli con continuità per fare geometria in maniera regolare, non è una cosa immediata, ci vuole tempo ed esperienza. Anche rispetto agli altri insegnanti penso che la fatica maggiore sia questa, se un insegnante non ha il desiderio di andare oltre la scuola, rischia di fermarsi solo all'aspetto saltuario del gioco.

Racconta poi che il concorso Matematica per tutti ha cambiato anche lei, le ha insegnato a essere più organizzata, a programmare con maggior ordine e con più anticipo le sue lezioni e l'uso dei giochi:

> Il cambiamento che ho visto avvenire tra la prima e la terza edizione è sicuramente un cambiamento e una crescita personale. Il miglioramento che è avvenuto su di me è l'organizzazione, l'aver strutturato una serie di interventi in classe con il materiale che mi permettono di inserire questo lavoro nella vita quotidiana dei ragazzi.

Daniele Scopetti, l'altro organizzatore del concorso fin dalla sua prima edizione, docente di matematica in un liceo scientifico di Roma, racconta invece la sua esperienza di giocatore appassionato fin dall'infanzia:

> Il gioco è sempre stato per me legato al divertimento, mi piaceva giocare a carte, a casa mia si passavano intere domeniche a giocare a briscola, scopa, burraco, tresette… principalmente c'era quell'aspetto. Con gli amici invece avrei desiderato giocare a giochi da tavolo (Risiko, Monopoli), ma non ci sono state molte occasioni, tra l'altro io passavo molto tempo a fare sport, quindi vivevo anche quest'altro aspetto del gioco, e del gioco di squadra. Quando eravamo ragazzi, invece, ricordo che molto più che adesso nelle classi si vedeva giocare a carte, cosa che ora non succede quasi più: era il modo per stare insieme, prima di tutto, e poi per confrontarsi, studiare strategie, e soprattutto per imparare dai propri errori, laddove un errore era lecito e non aveva conseguenze, se non sull'esito di una partita. Io sono sempre stato competitivo, in casa coi nonni, a scuola con i compagni e sul campo di pallacanestro, e quindi il gioco mi aiutava per imparare dai miei errori e dagli errori degli altri. Se dovessi racchiudere in tre parole il mio rapporto con il gioco, sarebbero: competitività (o voglia di vincere), capacità di imparare dagli altri e dai propri errori, e infine divertimento.
>
> L'altro aspetto importantissimo del gioco è la bellezza dello stare insieme. Nella mia esperienza da ragazzino, quando ero alle superiori, per la prima volta ho partecipato a una competizione scolastica a squadre (olimpiadi di matematica). Lì c'è stato un vero cambiamento. Così come mi annoiavo a risolvere problemi da solo, ho scoperto la ricchezza e il divertimento nel farlo in squadra.

Si riportano anche le testimonianze di due "voci fuori campo", persone che per motivi diversi si sono avvicinate al concorso e ne hanno vissuto i momenti salienti, pur non essendo insegnanti o studenti. Una di queste è Fulvia Subania, la videomaker che si è occupata di realizzare i filmati per il progetto (spiegazione dei giochi, lezioni a distanza, video promozionali). Dopo l'incontro con il team di docenti che organizzava il concorso ha raccontato:

> La cosa che più mi piacque era vedere la passione con cui questi giovani insegnanti desideravano proporre una didattica nuova. Un modo di apprendere innovativo, stimolante e gioioso. Mi venne naturale considerare che la cosa più importante fosse quella di creare sì dei buoni contenuti, ma di trasmettere parallelamente anche questa coinvolgente passione. Anzi, penso che proprio questo fosse il loro punto di forza, il focus dal quale partire.

L'altro osservatore privilegiato è Emanuele Pessi, fondatore dell'azienda di giochi CreativaMente, che vent'anni fa ha rimesso in gioco la sua professione, lasciando un lavoro da brillante informatico per diventare un inventore di giochi. Nella sua intervista ha riflettuto sulle caratteristiche che hanno i giochi da tavolo, caratteristiche che lui persegue nel momento in cui inventa un nuovo gioco da produrre: un gioco di successo deve poter essere utilizzato tante volte risultando ogni volta una novità. Questa è la differenza da lui evidenziata con i rompicapo matematici, pure molto stimolanti, ma che vengono risolti una volta per tutte. Pessi ha saputo così coniugare le caratteristiche di sfida del rompicapo matematico, e di ripetibilità del gioco, ideando e realizzando giochi come *Rolling CUBES Pytagora*: è convinto, infatti, che nella scuola occorre portare dei giochi che possano essere giocati molte volte e che ogni volta mostrino una sfida, una magia, sempre nuova. Racconta così la sua «missione»:

> Vivo da sempre un conflitto tremendo, perché il mio lavoro, il dirigere la mia azienda, mi occupa moltissimo tempo e moltissime energie. Tolgo tempo a me stesso e ai miei affetti per dedicarlo a ideare e produrre giochi per altri. Mi ripeto sempre che il mio lavoro ha un valore sociale, e faccio mie le parole di un amico che una volta mi ha detto: "Il tuo ruolo è quello, rischi di trascurare la famiglia, e di lavorare troppo, perché è la missione che ti è stata assegnata, fare cose che hanno un altissimo valore per i bambini".
>
> Questa frase è diventata vera nel momento in cui ho partecipato alla finale della prima edizione del concorso Matematica per tutti: vedere i miei giochi usati da più di mille ragazzi durante la finale a Cinecittà World, rimane l'esperienza e l'emozione più grande che abbia mai provato dal punto di vista professionale, mi sono letteralmente tremate le gambe. La prima postazione che ho visto è stata quella di *Rolling Pytagora*, poi ho visto il *Conta che ti passa* e ho fatto il giudice per la gara con *La Boca*. Il momento più incredibile è stato avvicinarmi e vedere 45 tavolini bianchi circondati ciascuno da 8 bambini, quasi 400 bambini che giocano contemporaneamente con un mio gioco… è stata un'emozione pazzesca, ho visto con i miei occhi che i miei giochi sono una scusa, una occasione per insegnare, per imparare, per fare gruppo, per divertirsi insieme. Allora si fa chiaro che tutti i sacrifici che faccio e tutta la fatica hanno un senso.

E infine racconta il suo cambiamento attraverso le tre edizioni del con-corso Matematica per tutti:

> Sono cambiato nel senso che ho avuto la consapevolezza più ampia dell'utilità dei miei giochi, e questo mi ha dato molta fiducia ed entusiasmo. Ora lavoro con uno spirito più consapevole. Le restrizioni imposte alla scuola legate alla situazione pandemica, inoltre, ci hanno costretto a trovare la formula del kit per alunno, che secondo me è migliorativo. I bambini possono portarsi via il loro kit e diffondere ad altri le loro scoperte. Il concorso migliora perché diamo giochi sempre più ricchi. Addirittura la mia azienda, CreativaMente, si è orientata a realizzare prima i giochi per Matematica per tutti, e poi per il proprio catalogo. Se mi avessero detto una cosa del genere quattro anni fa non ci avrei creduto, eppure è così, e ora il più convinto sono proprio io.

Tutti i «dati grezzi» raccolti al termine di questi tre anni testimoniano di come giochi e sfide non basterebbero da soli per realizzare un approccio pedagogico attraverso il gioco. Occorre, infatti, lo strumento essenziale: la passione e il coraggio dei docenti. Per molti passione e coraggio sono alla base della scelta di fare l'insegnante, altri invece scoprono nell'esperienza che, senza coraggio e passione, si ha vita difficile. Di questo coraggio ha parlato, in una lettera che è diventata virale sul web, Lizanne Foster, un'insegnante di liceo di Surrey, in Canada:

> […] Se vogliamo cambiare i sistemi d'istruzione, sì, è importante che ci sia un sostegno politico ed economico al cambiamento, che ci sia un sostegno sociale all'innovazione, e che agli insegnanti sia dato abbastanza tempo per esplorare nuove idee. Ma la cosa più importante di tutte è che ciascun insegnante trovi il coraggio necessario a superare la propria paura di cambiare, ogni giorno, in classe.
>
> Perché il cambiamento richiede coraggio. (…) Quel coraggio che impone alla volontà di essere vulnerabile, di correre il rischio di essere ferita. Quel tipo di coraggio che viene lubrificato dalle lacrime [Foster 2016]

Una docente nello spazio libero dedicato alle ulteriori osservazioni del questionario ha scritto:

> La forza del progetto è stata non solo nelle idee ma anche nella gestione di tutto il percorso di Matematica per tutti: chi c'è dietro al concorso ha a cuore le persone nella loro totalità. Spesso nei concorsi c'è un distacco tra gli organizzatori e i partecipanti, che diventano numeri che devono solo produrre risultati, devono essere veloci e geniali. Qui c'è stata una crescita di tutti, alunni e insegnanti,

un cammino da fare insieme divertendosi... è qualcosa di più di un semplice e arido concorso. [docente scuola secondaria primo grado, Abruzzo]

È ed è stato proprio così, «qualcosa di più di un semplice e arido concorso»: ciascuno seguendo il proprio percorso è uscito da quest'esperienza cambiato, ma ancora prima ha accettato di lasciarsi cambiare, ha accettato la sfida della matematica in prima persona. Ciascuno, in altre parole, si è "messo in gioco" e non è un caso che si usi questa espressione, pensando al rapporto tra matematica e gioco investigato nel §1.3 ma anche agli studi antropologici sul valore del gioco nella crescita della società umana (§1.2). Così la crescita e il cambiamento di tutti - alunni, insegnanti (partecipanti e organizzatori), genitori e altri soggetti coinvolti in diversi modi - sono stati il denominatore comune al termine di questa sperimentazione, che ha confermato la possibilità di una matematica "dal volto umano": l'approccio pedagogico attraverso il gioco non è rimasto un "fuoco d'artificio", ma ha lasciato il segno in chi si è lasciato coinvolgere fino in fondo, ha in-segnato che si può fare matematica divertendosi, che si può fare fatica da soli o insieme ad altri, che si può sbagliare e imparare dai propri errori, che accogliere la sfida della matematica significa essere disponibili a un cambiamento continuo, che poi non è altro che la crescita dell'essere umano attraverso i desideri e le virtù individuate da Su.

Perché possa realizzarsi un approccio come quello proposto in questa ricerca e messo alla prova nella sperimentazione del Con-corso, è necessaria dunque la disponibilità al cambiamento da parte di chi vuole imparare a fare matematica, ma ancora prima da parte di chi vuole insegnare a farla, ammesso che poi un insegnante smetta mai di imparare. Così si è scelto di riportare in conclusione di quest'analisi il contributo prezioso di chi, come Elena Gil Clemente, dopo 35 anni di insegnamento nella scuola secondaria a Saragozza, all'inizio del nuovo anno scolastico (2021/22), riconosce ancora l'esigenza di un cambiamento, nonostante i "successi" e i riconoscimenti ottenuti durante la sua carriera:

> Per cosa vale la pena? Cosa imparano i nostri studenti? Stanno ponendo le "basi" che serviranno loro per il futuro? Si tratta della gettonatissima preparazione al lavoro? O forse non sarebbe meglio se ci concentrassimo a insegnare ciò che piace loro, in ogni classe, se provassimo a far loro sperimentare che sono in grado di risolvere un problema difficile, a lasciarli parlare, discutere con gli altri, essere sorpresi, eccitati... Ho sempre più chiaro che sono queste cose che rendono utile l'apprendimento della matematica.
>
> **Gli insegnanti a volte dicono che non siamo lì per "divertire" gli studenti, ma per addestrarli. Ma l'ultima cosa che dovremmo fare è "annoiarli"**. Se crediamo che l'essere umano provi gusto per ciò che lo fa crescere, ciò che lo fa capire, ciò che lo rende più capace, che gli studenti stiano "gustando" il loro lavoro e la matematica, è un buon segno. Segno che siamo sulla strada giusta.
>
> Voglio offrire più opportunità agli studenti di esplorare, avere più pazienza e non dare loro la soluzione... Non voglio trasmettere la mia sintesi, fatta dopo tanti anni di lavoro, ma voglio metterli in contatto con problemi, con giochi, con attività, che fanno "fare matematica". [...] Voglio realizzare nella mia classe le virtù di cui parla Francis Su: lavorare con la matematica creando uno spirito di gioco, di libertà, di comunità. Fare in modo che tutti trovino il loro posto nella classe. Smettere di "combattere" in modo che capiscano a fondo e "seminare" di più. Seminare il gusto di pensare, di esplorare, di scoprire.
>
> Quindi sto per iniziare il nuovo corso con un nuovo spirito. Proverò attività, giochi, mi fiderò, **avrò meno paura di non finire il programma**, che comunque potrebbero non imparare. Approfitterò

> di tutta l'esperienza che ho accumulato, non per confrontare i miei nuovi studenti con il passato, ma per avere l'intuizione di ciò che funziona, che li aiuterà a costruire le conoscenze a poco a poco. Mi fiderò anche di me stessa. Mi perdonerò di più per non essere "tecnicamente perfetta" nella didattica ma non mi perdonerò più se non riuscirò a essere attenta alle persone che ho di fronte.

4.2.2 Difficoltà e speranze

Il limite di questa ricerca è stato sicuramente il periodo di emergenza sanitaria durante il quale si è svolta. È vero, infatti, che è stato possibile realizzare iniziative in presenza come descritto relativamente alla prima edizione e a una parte della seconda, ma senza dubbio hanno costituito una difficoltà rilevante la mancanza di occasioni di osservazione sul campo per un anno e mezzo e una terza edizione limitata nella possibilità di lavorare in classe in gruppo e con i materiali proposti, nonché ridotta nel numero e nella tipologia di giochi da utilizzare.

Allo stesso tempo, nonostante la forza indubbia delle attività realizzate a distanza, per alimentare il coraggio e la passione degli insegnanti c'è bisogno di "fisicità", nel senso che è necessario che ci siano occasioni per lavorare fisicamente insieme sia per i materiali concreti come i giochi, sia per poter discutere e confrontarsi sulle scelte didattiche, condividendo passioni e speranze, fatiche e traguardi.

L'approccio pedagogico attraverso il gioco ha bisogno, come detto, di insegnanti e di persone che si coinvolgono pienamente, tanto da non temere più il cambiamento del loro modo di essere insegnanti, e di loro stessi. Così la speranza è quella di riuscire a consolidare quanto è già stato costruito dentro la fatica di questo periodo, ovvero una comunità di insegnanti di matematica che si sono messi in gioco in circostanze e contesti molto diversi e attorno al Con-corso Matematica per tutti si sono ritrovati meno soli, più coraggiosi e meno preoccupati di sbagliare o di non completare il tanto chiacchierato programma. Non si tratta di voler favorire solamente uno scambio di idee o di materiali, come accade spesso tra le tante community di insegnanti presenti sui social, ma si vuole moltiplicare le occasioni di confronto e collaborazione reale attorno a un approccio che ha l'ambizione della crescita dell'essere umano, nella sua intera esigenza di bellezza e verità («human flourishing», Su 2020).

Sarebbe bello riuscire a diffondere la cultura del gioco nella didattica della matematica anche attraverso un coinvolgimento delle famiglie, riproponendo iniziative come quella realizzata il 14 marzo 2019 (prima dell'emergenza Covid-19) presso l'IC Don Milani a Monteporzio Catone (RM), dove 200 genitori si sono divertiti a giocare con la matematica in coppia con i propri figli. Nel giro di due ore le coppie genitore-figlio si sono spostate di aula in aula (ognuna dedicata a uno dei giochi di Matematica per tutti), riuscendo a sperimentare tutti i giochi proposti e portandosi a casa una sensazione di fatica, sì, ma anche di fascino, curiosità, desiderio di mettersi in gioco, e uno spirito riconciliato con la matematica, che finalmente è stata vissuta non solo come formule, numeri, esercizi e problemi, ma come sfida ricca di opportunità per tutti.

A causa dell’emergenza Covid-19 si è dovuta interrompere, inoltre, la ricerca di coloro che si occupano di matematica ricreativa in Italia e che si spera di poter coinvolgere non appena la situazione sanitaria sarà migliorata: si hanno in mente, in particolare, l’insegnante in pensione Gianfranco Bo, autore di un libro di testo per la scuola secondaria di primo grado e di un sito di didattica con una sezione interamente dedicata alla matematica ricreativa, ma anche il falegname bolognese Dario Uri, risolutore di numerosi rompicapo, autore e collezionista di rompicapo meccanici e in legno di ogni tipo[167], che ha avuto il privilegio di partecipare a numerosi incontri internazionali tra gli anni ‘70 e ‘90 conoscendo ad esempio Solomon Golomb (l’inventore dei polimini) e il citato Martin Gardner.

Per il futuro si continuerà perciò, senza alcun dubbio, nella direzione della sperimentazione analizzata – a cominciare da una quarta edizione che ha già preso il via a novembre 2021 – sia per i riscontri ottenuti sia per quelli non ancora ottenuti con giochi che sono stati un po’ sacrificati in questo periodo di pandemia. Sarà ancora importante riflettere su come arricchire o eventualmente ridurre la varietà dei quesiti, delle sfide e dei problemi, come ampliare i collegamenti con i nuovi giochi e come migliorare ulteriormente il catalogo dei giochi valutando l’inserimento di un nuovo gioco per l’ambito Geometria.

[167] Qui si trovano alcune foto della sua collezione situata al piano superiore della sua fabbrica vicino a Bologna: http://www.uriland.it/matematica/Raccolta/index.html

CONCLUSIONI GENERALI

> E che cosa invero significa un semplice gioco, dal momento che sappiamo che tra tutti gli stati dell'uomo per l'appunto il gioco ed unicamente il gioco è ciò che lo fa completo e nello stesso tempo sviluppa la sua duplice natura? ... Io direi dunque, piuttosto: con il piacevole, con il buono, con il perfetto, l'uomo si comporta unicamente con serietà, ma con la bellezza gioca ... la bellezza realmente esistente è degna dell'istinto del gioco realmente esistente; ma con l'ideale della bellezza che la ragion pone, è anche posto un ideale dell'istinto del gioco, che l'uomo in tutti i suoi giochi deve avere dinanzi agli occhi.
>
> Friedrich Schiller (*Lettere sull'educazione estetica dell'uomo, 1795)*

Afferma Schiller nella lettera in epigrafe che il gioco è "ciò che fa completo l'uomo" e che l'uomo "gioca con la bellezza" (Schiller 1795). In questa tesi si è affrontato il gioco all'interno degli studi antropologici e lo si è messo in relazione con l'insegnamento della matematica, parlando di una matematica per il "fiorire umano" (Su 2020). Osando un po' si potrebbe dire che per scoprire la bellezza della matematica, del fare matematica, il gioco è uno strumento di conoscenza privilegiato, perché permette di catturare quel carattere dinamico, sorprendente, affascinante della matematica. Si tratta, però, come detto, di scegliere di mettersi in gioco, di sedersi attorno al tavolo per giocare la partita dell'insegnamento e/o dell'apprendimento della matematica: in fondo, a chi non è capitato, almeno una volta nella vita, di non riuscire a resistere al fascino di un tavolo "apparecchiato" per giocare, con una sedia che sembrava quasi chiedere di essere occupata?

In questa tesi si è indagato dapprima il patrimonio culturale materiale e immateriale della matematica ricreativa, scoprendo letteralmente "un mondo" in parte noto e in gran parte meno conosciuto: la ricerca storica ha permesso di guardare con più consapevolezza a un approccio ricreativo alla didattica della matematica per non ridurla ad un'occasionale proposta di singoli quesiti in momenti particolari e isolati all'interno del periodo scolastico. È stato importante scavare la relazione tra antropologia e gioco e poi, grazie a Guzmán e Su, tra la matematica e il gioco, mettendo in luce la "componente gioco" del fare matematica. Fondamentali sono stati i contributi studiati di alcuni autori che si sono occupati di matematica ricreativa e di gioco nella didattica. In particolare, si evidenziano due elementi su tutti che hanno permesso di mettere in luce meglio la dimensione umana della matematica, quella che richiede impegno e fatica, ma per la quale è sufficiente scegliere di sedersi sulla sedia preparata per noi e iniziare la partita. Il primo elemento è la definizione di "iniziativa matematica" data da Kordemsky (§2.1.2), che introduce l'aspetto della creatività, ovvero del prendere "iniziativa", che vuol dire prendere decisioni in modo indipendente da quanto detto da qualcun altro o ancora "assumersi la responsabilità" del proprio agire. Il secondo è l'idea del "multiple embodiment" di Dienes, l'idea cioè che per comprendere veramente un concetto occorra osservarlo da diverse angolazioni e attraverso diverse rappresentazioni, come nell'esempio illuminante mostrato sui numeri interi nel §2.1.3, dove si passa dalle coppie di ballerini alla bilancia aritmetica passando per le passeggiate. Nell'insegnamento della matematica non si pretende di avere una creatività uguale a quella geniale del matematico ungherese, ma senza dubbio rimane impresso cosa significhi fare lo sforzo di tradurre in rappresentazioni diverse uno stesso concetto: in quest'ottica il gioco può costituire uno dei possibili punti di vista da cui guardare un argomento matematico.

La sperimentazione del Con-corso Matematica per tutti si è sviluppata di pari passo con gli studi riportati nella parte I della tesi ed è certo che molto sarebbe stato pensato diversamente in origine, così come molto si è modificato proprio alla luce di quanto emerso negli studi. Come già evidenziato, l'analisi del progetto è stata condizionata dall'emergenza sanitaria, ma da quanto emerso dai riscontri dei docenti, dalle osservazioni da vicino del sottoscritto e dal numero di adesioni raggiunto nella seconda edizione (280 docenti che hanno guidato oltre 6.500 studenti partecipanti da tutta Italia) si può certamente concludere che un approccio pedagogico attraverso il gioco nella modalità del Con-corso abbia raggiunto gli obiettivi indicati nella Tavola 2.11, contribuendo a fornire nuova linfa vitale a una didattica della matematica in Italia in bilico tra rigidità di un approccio procedurale e meccanico e un'innovazione esagerata all'insegna del digitale e alla ricerca di materiali e metodi che portino effetti risolutori definitivi e immediati.

Non si tratta di aver trovato, infatti, IL metodo per insegnare la matematica a scuola, ma è emerso come non solo lavorare attraverso il gioco coinvolga e convinca, ma fornisca anche lo strumento per costruire (o, a volte, ricostruire) il proprio rapporto con questa disciplina. Si sono osservati docenti e studenti:

- anzitutto divertirsi facendo matematica, ovvero scoprire una bellezza nel fare fatica, perché non c'è materiale o metodo che possa risparmiare la fatica dell'impegno personale e non delegabile a nessun altro, che la matematica richiede
- percorrere strade diverse e mettere in moto la propria creatività senza la paura di sbagliare
- cercare in tutti i modi possibili e non smettere la propria ricerca anche quando qualcun altro aveva trovato una soluzione
- confrontarsi anche in modo acceso sulle strategie intraprese (si pensi invece al silenzio assordante che spesso avvolge le aule scolastiche durante le lezioni di matematica)
- condividere le fatiche ma anche i successi perché trovare un risultato talvolta insperato è ancora più bello se si ha qualcuno a cui dirlo
- scoprire di avere un valore anche solamente partecipando senza trovare la strategia vincente, la strada per la soluzione, ma mettendosi sempre in cammino alla ricerca di un "canto" che è diverso per ciascuno.

Come insegnante chi scrive è consapevole che spesso – per non dire sempre - non si ha la fortuna di vedere i frutti del proprio lavoro: i semi piantati negli studenti potranno produrre frutti che saranno altri a raccogliere, in un tempo e in uno spazio per forza lontano, ma, d’altra parte, “se non si semina è certo che non ci sarà raccolto”. Anche nel caso del Con-corso si è convinti che i veri frutti si potranno vedere solamente a maggiore distanza nel tempo, ma intanto si può rilevare che qualcosa non solo è stato seminato, ma ha anche dato dei frutti a volte impensabili per gli stessi docenti che hanno sperimentato un modo nuovo di fare matematica. Così anche chi scrive, in congedo da tre anni dall’attività didattica, si ritrova cambiato e con una voglia matta di tornare a lasciarsi cambiare in classe dai suoi studenti e dalla matematica: *domani si gioca a fare matematica!*

BIBLIOGRAFIA

B1 Articoli e raccolte di matematica ricreativa

Antologia Palatina, 4 voll., a cura di Filippo Maria Pontani, Torino: Einaudi, 1978-1981

Dictionnaire encyclopédique des amusements des sciences mathématiques et physiques, des procédés curieux des arts, des tours récréatifs et subtils de la magie blanche, et des découvertes ingénieuses et variées de l'industrie, Paris: Panckoucke, 1792

AHRENS Wilhelm 1901, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* [seconda edizione rivista, corretta e ampliata dallo stesso autore, 1910 (I Volume) e 1918 (II Volume)], Leipzig: B.G. Teubner

1904 *Scherz und Ernst; geflügelte und ungeflügelte Worte*, Leipzig: B.G. Teubner

1907 *Mathematische Spiele* [seconda edizione (1911) rivista, corretta e ampliata dallo stesso autore, così anche le successive: terza (1916) e quarta (1918)], Leipzig: B.G. Teubner

ALCUINO DI YORK (a cura di Franci Raffaella) 2005, *Giochi matematici alla corte di Carlomagno. Problemi per rendere acuta la mente dei giovani,* Pisa: ETS

APSIMON Hugh 1991*, Mathematical byways: in ayling, beeling, and ceiling,* Oxford (New York): Oxford University Press (Collana "Recreations in Mathematics" a cura di D. Singmaster)

ARNOLD Vladimir I 2004, *Problemi per ragazzini dai 5 ai 15 anni*, www.imaginary.org

BACHET Claude Gaspar 1612, *Problèmes plaisans et délectables, qui se font par les nombres, partie recueillis de divers autheurs, et inventez de nouveau, avec leur démonstration, par Claude Gaspar Bachet, Sr. de Méziriac. Très utiles pour toutes sortes de personnes curieuses qui se servent d'arithmétique*, Lione: Pierre Rigaut [seconda edizione (1624), rivista, corretta e ampliata dallo stesso autore, Lyon: Pierre Rigaud e Associés; quinta edizione (1884) riveduta, semplificata e ampliata da A. Labosne, Parigi: Gauthier-Villars]

1621, *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus, nunc primum graece et latine editi, atque absolutissimis commentariis illustrati,* Lutetiae Parisiorum [Paris]: sumptibus Hieronymi Drouart

BAKST Aaron 1954*, Mathematical puzzles and pastimes,* Princeton (New Jersey): Van Nostrand

BALL W W Rouse 1892, *Mathematical Recreations and Essays* (tr. it. della quarta edizione del 1905 *Ricreazioni e problemi matematici dei tempi antichi e moderni* 1910, Bologna: Zanichelli), Londra: MacMillan & co [numerose edizioni riviste, corrette e ampliate dall'autore fino alla decima edizione del 1922; 11a (1939 e numerose ristampe), 12a (1974, Toronto: University of Toronto Press) e 13a edizione (1987, New York: Dover) riviste da Harold S. M. Coxeter]

1912, *Four Fours. Some Arithmetical Puzzles*, «The Mathematical Gazette», 6(98), pp. 289-290

BELLOS Alex 2011, *Il meraviglioso mondo dei numeri* (ed. orig. *Alex's Adventures in Numberland. Dispatches from the Wonderful World of Mathematics* 2010), Torino: Einaudi

2019, *Enigmi. I migliori rompicapi logici e matematici di tutti i tempi* (ed. orig. *Can You Solve My Problems? A casebook of ingenious, perplexing and totally satisfying puzzles* 2016), Torino: Einaudi

BENJAMIN Arthur 2016, *La magia della matematica* (ed. orig. *The Magic of Math. Solving for x and Figuring Out Why* 2015), Torino: Codice Edizioni

BENJAMIN Arthur, SHERMER Michael 2006, *Secrets of Mental Math: The Mathemagician's Guide to Lightening Calculation and Amazing Maths Tricks*, New York: Three River Press

BERLEKAMP Elwyn R, CONWAY John H, GUY Richard K 2001-2004, *Winning Ways for your Mathematical Plays (Vol 1-4)*, Wellesley (Massachusetts): A K Peters Ltd

BERZOLARI Luigi, VIVANTI Giulio, GIGLI Duilio (a cura di) 1930-1951, *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi. Con estensione alle principali teorie analitiche, geometriche e fisiche, loro applicazioni e notizie storico-bibliografiche (Vol 1-3, 7 tomi)*, Milano: Hoepli

BEUTELSPACHER Albrecht 2010, *Le meraviglie della matematica. 66 esperienze spiegate attraverso i numeri* (ed. orig. *Einmal sechs Richtige und andere Mathe-Wunder* 2007), Milano: Ponte alle Grazie (Salani Editore)

BEUTELSPACHER Albrecht, WAGNER Marcus 2012, *Matematica senza paura. Pensare il mondo in numeri. Dai 4 ai 90 anni* (ed. orig. *Warum kühe gern im Halbgreis grasen... und andere mathematische Knobeleien* 2010), Milano: Ponte alle Grazie (Salani Editore)

BO Gianfranco 2019, *33 problemi di matematica ricreativa*, http://utenti.quipo.it/base5/libretti/33problemi.pdf

BOLT Brian 1985, *More Mathematical Activities. A resource book for teachers*, New York: Cambridge University Press

1987, *Even More Mathematical Activities*, New York: Cambridge University Press

BRESSANINI Dario, TONIATO Silvia 2011*, I giochi matematici di fra' Luca Pacioli. Trucchi, enigmi e passatempi di fine Quattrocento,* Bari: Dedalo

CAMESCASSE James 1916, *Notice sur l'Initiateur mathématique, jeu de petits cubes assemblables aidant à appliquer dans la famille et à l'école "L'Initiation mathématique" de C.-A. Laisant ... [Précédé d'une lettre de C.-A. Laisant] 3e édition*, Paris: Hachette

CARROLL Lewis 1958, *The Mathematical Recreations of Lewis Carroll. Pillow Problems and A Tangled Tale. Both Books are Bound as One* (rist. di *Pillow Problems* 1895 e *A Tangled Tale* 1885), New York: Dover Publications

CERUTI Nicola (a cura di) 2014, *Test e giochi matematici*, Ariccia (RM), Barbera Editore

CIUFFOLI Fabio 2015, *Giochi matematici e logici*, Milano: FrancoAngeli

CODOGNO Maurizio 2016, *Matematica in pausa pranzo. Piacevoli passeggiate nel mondo della matematica*, Torino: Codice Edizioni

2017, *Matematica in relax 2. Altri 99 problemi divertenti, sempre con l'aiutino*, Wroclaw: Amazon Distribution

2018a, *Sembra difficile ma non lo è. Enigmi per una matematica gioiosa*, [n.41 Collana "Sfide e giochi matematici"], Milano: Hachette

2018b, *Enigmi seri e meno seri. Quizzini della domenica*, [n.57 Collana "Sfide e giochi matematici"], Milano: Hachette

2019, *Numeralia*, Torino: Codice Edizioni

COHEN Gilles (a cura di) 2006a, *Pitagora si diverte 1*, Milano-Torino: Mondadori

2006b, *Pitagora si diverte 2*, Milano-Torino: Mondadori

2009, *Pitagora continua a divertirsi*, Milano-Torino: Mondadori

2013, *Pitagora dà i numeri*, Milano-Torino: Mondadori

COTO Alberto 2011, *Breve corso di ginnastica per il cervello* (ed. orig. *Fortalece tu mente*, 2007), Milano: Antonio Vallardi Editore

DE TOFFOLI Dario, ZACCARIOTTO Dario, DE TOFFOLI Silvia 2017, *Numeri divagazioni, calcoli, giochi*, Monza (MB): Koala Edizioni

DE TOFFOLI Dario, ZACCARIOTTO Dario 2017a, *Esercizi per tenere in forma la mente. Volume Primo*, [n. 12 Collana "Sfide e giochi matematici"], Milano: Hachette

2017b, *Cibo per la mente. Mantenere in forma il cervello giocando*, [n.15 Collana "Sfide e giochi matematici"], Milano: Hachette

DEMAINE Erik D, DEMAINE Martin L, RODGERS Tom (a cura di) 2008, *A lifetime of puzzles. A collection of puzzles in honor of Martin Gardner's 90th birthday*, Wellesley (Massachusetts): A K Peters LTD

DUDENEY Henry Ernest 1908, *The Canterbury's Puzzles and Other Curious Problems*, New York: E.P. Dutton Company

1917, *Amusements in Mathematics*, Londra, Edinburgo, New York: Thomas Nelson and Sons

1967, *536 Puzzles & Curious Problems* (a cura di M. Gardner), New York: Charles Scribner's Sons

FOURREY Émile 1899, *Recréations arithmétiques* (ed. ampliata a cura di Jean-Louis Nicolas 1994, rist. 2001), Paris: Vuibert et Nony

1907, *Curiosités géométriques* (ed. ampliata a cura di Evelyne Barbin 1994, rist. 2001), Paris: Vuibert et Nony

FREDERICKSON Greg N 1997, *Dissections. Plane & Fancy*, Cambridge: Cambridge University Press

FRIEDLANDER Alex, TAIZI Nomi 1987, *Early Algebra Games*, «Mathematics in School», 16(1), pp. 2-6

FUJIMURA Kobon 1978, *The Tokyo Puzzles*, New York: Charles Scribner's Sons

GARDNER Martin 1961, *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions*, New York: Simon and Schuster

1984, *Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Diversions from "Scientific American"*, Chicago: The University of Chicago Press

1994, *My Best Mathematical & Logic Puzzles*, New York: Dover Publications

1996, *The universe in a handkerchief: Lewis Carroll's mathematical recreations, games, puzzles, and word plays*, New York: Copernicus (Springer-Verlag)

2001a, *The colossal book of mathematics: classic puzzles, paradoxes, and problems: number theory, algebra, geometry, probability, topology, game theory, infinity, and other topics of recreational mathematics*, New York, Londra: W W Norton & Company

2001b, *Enigmi e giochi matematici* (ed. orig. *Mathematical Puzzles and Diversions* 1959), Milano: BUR

2012, *Come buttarsi dalla torre di Hanoï. Enigmi e giochi matematici* (ed. orig. *Hexaflexagons, Probability, Paradoxes and Tower of Hanoï* 2008), Firenze: Emmebi Edizioni

2017, *Quadrati magici, labirinti e origami. Giochi matematici per menti curiose* (ed. orig. *Origami, Eleusis, and the Soma Cube* 2008) [n.4 Collana "Sfide e giochi matematici"], Milano: Hachette

GHERSI Italo 2013, *Matematica dilettevole e curiosa* (ed. orig. 1921), Milano: Hoepli

GORINI Pietro 2010, *Enigmi intuitivi*, Roma: L'Airone

GOUTHIER Daniele, FOSCHI Massimiliano 2017, *Dar la caccia ai numeri. Enigmi, problemi e giochi matematici*, Bari: Dedalo

GUYOT Edme-Gilles 1769-70, *Nouvelles récréations physiques et mathématiques* (Vol. 1-4), Parigi: Gueffier [III ed. Vol. 1-3, 1799]

HINZ Andreas M.M., KLAVŽAR Sandi, MILUTINOVIC Uros, CIRIL Petr 2013, *The Tower of Hanoï – Myths and Maths*, Basel: Birkhäuser

HOFFMAN Professor (pseudonimo di LEWIS Angelo John) 1893, *Puzzles old and new*, London: Frederick Warne

KHAN Sara 2015, *99 Giochi matematici*, Londra: Edizioni Usborne

KIRKBY Dave 1986a, *Maths Games Workshop: Part 1*, «Mathematics in School», 15(4), pp. 19-21

1986b, *Maths Games Workshop. Part 2. Rummy, War, and Remembering*, «Mathematics in School», 15(5), pp. 14-15

1987a, *Maths Games Workshop. Part 3. Alignment Games*, «Mathematics in School», 16(1), pp. 20-21

1987b, *Maths Games Workshop. Part Four. Take a Board*, «Mathematics in School», 16(2), pp. 12-13

1987c, *Maths Games Workshop. Part Five. Four* Digits, «Mathematics in School», 16(3), pp. 8-9

1987d, *Maths Games Workshop. Part Six. Chess Games*, «Mathematics in School», 16(4), pp. 8-9

1987e, *Maths Games Workshop. Part Seven: Multiplication in Five Lessons*, «Mathematics in School», 16(5), pp. 12-15

1988a, *Maths Games Workshop. Part Nine Additionally. Take a Board*, «Mathematics in School», 17(2), pp. 10-12

1988b, *Maths Games Workshop. Part 11. Sorting Numbers*, «Mathematics in School», 17(4), pp. 12-16

1988c, *Maths Games Workshop. Part Twelve. Position Exchange Games*, «Mathematics in School», 17(5), pp. 14-17

1989, *Maths Games Workshop. Part Thirteen. Types of Mathematical Games*, «Mathematics in School», 18(1), pp. 32-35

KORDEMSKY Boris A. 2014, *Gli enigmi di Mosca* (ed. orig. *Matematicheskaya smekalka* 1954; trad. inglese *The Moscow puzzles: 359 mathematical recreations*, a cura di Martin Gardner 1971-2), Milano: Antonio Vallardi Editore

KORDEMSKY Boris A., RUSALEV N. V. 1952, *Udivitel'nyi kvadrat* [tr. it. "Il meraviglioso quadrato"], Moscow-Leningrad: Gostechizdat

KRAITCHIK Maurice 1953, *Mathematical Recreations (Second Revised Edition)*, Mineola (N.Y.): Dover Publications

LHULLIER Sylvain 2011, *Il grande libro degli enigmi matematici* (ed. orig. *Le Grand Livre des Énigmes Mathématiques* 2009), Roma: Gremese

LIETZMANN Walther 1922, *Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen*, Breslau: F. Hirt

LOYD Sam 1914, *Cyclopedia of puzzles*, New York: The Lamb Publishing Company

1968, *The Eight Book of Tan. 700* Tangrams, Mineola (New York): Dover Publications

LUCAS Édouard 1882, *Récréations mathématiques, vol. 1*, [2a ediz. 1891] Paris: Gauthier-Villars

1883 *Récréations mathématiques, vol. 2*, [2a ediz. 1893] Paris: Gauthier-Villars

1893 *Récréations mathématiques, vol. 3*, Paris: Gauthier-Villars

1894 *Récréations mathématiques, vol. 4*, Paris: Gauthier-Villars

MACMAHON Percy A 1886, *Certain special partitions of numbers*, «Quarterly Journal of Mathematics», 21, pp. 367-373

1921, *New Mathematical Pastimes*, Cambridge: University Press

MADACHI Joseph S 1966, *Mathematics on vacation*, New York: Charles Scribner's Sons

MAZZA Fabrice 2010, *Il grande libro degli enigmi. Giochi logici, rompicapi e indovinelli. Vol 2* (a cura di Pietro Gorini (ed. orig. *Le Grand Livre des Enigmes 2* 2008), Roma: Gremese

2011, *Enigmi contorti* (ed. orig. *Énigmes tourdes* 2008), Roma: L'Airone

MAZZA Fabrice, LHULIER Sylvain 2012, *Il grande libro degli enigmi. Giochi logici, rompicapi e indovinelli. Vol 1* (a cura di Pietro Gorini) (ed. orig. *Le Grand Livre des Enigmes* 2007), Roma: Gremese

MOSCOVICH Ivan 2006, *The Big Book of Brain Games. 1000 PlayThinks of Art, Mathematics & Science*, New York: Workman Publishing

MOTT-SMITH Geoffrey 1954, *Mathematical Puzzles for Beginners and Enthusiasts* (2 ed. rivista), New York: Dover Publications

O'BEIRNE T.H. 1965, *Puzzles and Paradoxes*, New York: Oxford University Press

OZANAM Jacques 1694, *Récréations mathématiques et physiques* (2 Vol), Parigi: Jean Jombert (ed. rivista, aumentata da Montucla 1778, poi tradotta in inglese da Charles Hutton *Recreations in mathematics and natural philosophy*… 1803, 1814, infine rivista da Riddle e pubblicata in inglese con il titolo *Recreations in science and natural philosophy* 1844)

PACIOLI Luca, *De Viribus Quantitatis* (manoscritto n.250 della Biblioteca Universitaria di Bologna: https://manus.iccu.sbn.it/opac_SchedaScheda.php?ID=96698; http://www.uriland.it/matematica/DeViribus/Presentazione.html)

PEANO Giuseppe 2017, *[Problemi matematici antichissimi.] Giochi di aritmetica e quesiti interessanti* (I Edizione 1929), Firenze: Edizioni Clichy

PEIRETTI Federico 2012, *Matematica per gioco*, Milano: Longanesi

PERELMAN Yakov 1985, *Mathematics can be fun*, Moskva: Mir Publishers

2008, *Algebra ricreativa* (ed. orig. *Занимательная алгебра* 1933), Brescia: RBA Italia

2015, *Geometria ricreativa* (ed. orig. *Занимательная геометрия* 1925), Brescia: RBA Italia

PERES Ennio 2017, *Matematica per comuni mortali. Giochi, numeri curiosi, enigmi, paradossi, logica e strategia*, Milano: Salani Editore

RODRIGUEZ ANNONI Rafael 1959, *Al margen de la clase*, Zaragoza: Librería general

RODRIGUEZ VIDAL Rafael 1983, *Diversiones matemáticas*, Barcelona: Reverté

SCHUBERT Hermann 1903 *Mathematical Essays and Recreations* (ed. orig. *Mathematische Mussestunden*, 2a ed. 3 voll. 1900; 1a ed 1897), Chicago: Open Court

SCHUH Frederik 1968, *The master book of Mathematical Recreations* (ed. orig. *Leer zaam Tijdverdrijf Door Puzzle en Spel* 1943), New York: Dover Publications

SINGMASTER David 2022, *Adventures in Recreational Mathematics* (2 voll), Toh Tuck Link, Singapore: World Scientific publishing (collana "Problem Solving in Mathematics and Beyond", vol. 21)

SMITH Seaton E Jr, BACKMAN Carl A (a cura di) 1975, *Games and Puzzles for Elementary and Middle School Mathematics. Readings from the ARITHMETIC TEACHER*, Washington D.C.: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

STEWARD Don 1996, *Going Loopy*, «Mathematics in School», 25(3), pp. 28-33

TAHAN Malba 1996, *L'uomo che sapeva contare* (ed. orig. *O homem que calculava* 1938), Milano: Salani Editore

TAKUMI Yamada 2017, *La bibbia del calcolo mentale rapido*, Leipzig: Amazon Distribution

TAMMARO Giovanni 2018, *Giochi di logica, di matematica e di bastoncini*, Wroclaw: Amazon Distribution

TARRY Gaston 1900, *Le Problème de 36 Officiers*, «Comptes Rendu de l'Association Française pour l'Avancement de Science Naturel», 1, pp. 122-123

1901 *Le Problème de 36 Officiers*, «Comptes Rendu de l'Association Française pour l'Avancement de Science Naturel», 2, pp. 170-203

TONI Paolo 2011, *Scintille matematiche*, Roma: Editori Riuniti University Press

TOWNSEND Charles Barry 2004, *I rompicapo più divertenti del mondo* (ed. orig. *World's most amazing puzzles* 1993), Milano: Il Castello

VALSECCHI Maria Cristina, GEWURZ Daniele A 2012, *Giochi di intelligenza*, Milano: Alpha Test

YIU Paul 2003, *Recreational Mathematics* (dispense), Department of Mathematics: Florida Atlantic University

WELLS David 1987, *The Penguin Dictionary of curious and interesting numbers*, Londra: Penguin Books

WILLERS Michael 2012, *ALGEBRA utile e divertente. Le avventure della x e della y* (ed. orig. *The Bedside Book of Algebra* 2009), Milano: Hoepli

ZVORKIN Alexander K 2012, *Math from Three to Seven: the Story of a Mathematical Circle for Preschoolers* (ed. orig. *Malyshi i matematika* 2007), Berkeley (California): MSRI (Mathematical Sciences Research Institute)

B2 Altre fonti e studi

2020 *Memorial Layman Edward Allen '51*, «Princeton Alumni Weekly», Giugno-Luglio, reperibile online https://paw.princeton.edu/memorial/layman-edward-allen-51 (ult. acc. 20/01/2022)

AGOSTINI Amedeo 1924, *De Viribus Quantitatis di Luca Pacioli*, «Periodico di Matematiche», IV, pp. 165-192

ALLEN Layman E, MAIN Dana B 1974, *The effect of instructional gaming upon absenteeism: The first step* in J. E. Moriarty (a cura di) *Simulation and gaming. Proceedings of the 12th Annual Symposium, National Gaming Council*, Washington D.C.: National Bureau of Standards, pp. 135-158

AFONINA S.I. 1952, *Внеклассная работа по математике в старших классах средней школы:* [tr. it. "Lavoro extracurriculare in matematica nelle classi superiori della scuola secondaria"] Tesi, Tahskent: Università pedagogica statale di Tashkent intitolata a Nizami, abstract reperibile online https://www.mathedu.ru/text/afonina_s_i_1952/p0/ (ult. acc. 20/01/2022)

ANDERSON Terry, SHATTUCK Julie 2012, *Design-based research: A decade of progress in education research?*, «Educational Researcher», 41(1), pp. 16-25

ANDREEVSKY N.V. 1954, *Методы, формы и содержание математических кружков* (tr. it. "Metodi, forme e contenuto dei circoli matematici") Tesi, Moskva: Accademia di Scienze Pedagogiche della RSFSR

AUVINET Jérome 2017, *De l'usage des récréations pour une Initiation mathématique selon Charles-Ange Laisant*, «Dossier: Récréations mathématiques APMEP», 523, pp. 172-182

BARBIN Evelyne, MENGHINI Marta 2014, *History of teaching geometry*, in: (a cura di A. Karp e G. Schubring) *Handbook on the history of mathematics education*, New York-Heidelberg-Dordrecht-London: Springer, pp. 473-492

BARUK Stella 1998, *Dizionario di matematica elementare* (ed. orig. "Dictionnaire de mathématiques" 1992) élémentaires, Bologna: Zanichelli

BEAR Ashley, SKORTON David (a cura di) 2018 [pubblicazione firmata da: National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine; Policy and Global Affairs; Board on Higher Education and Workforce; Committee on Integrating Higher Education in the Arts, Humanities, Sciences, Engineering, and Medicine], *The Integration of the Humanities and Arts with Sciences, Engineering, and Medicine in Higher Education: Branches from the Same Tree*, Washington (DC): National Academies Press (US)

BEASLEY John D 1990, *The Mathematics of Games*, Oxford (New York): Oxford University Press (Collana "Recreations in Mathematics" a cura di D. Singmaster)

BELHOSTE Bruno, HAZEBROUCK Denise, *Récréations mathématiques mondaines au XVIII^e siècle: le cas de Guyot*, «Historia mathematica», 41, pp. 490-505

BIGGS Edith 1985, *Teaching Mathematics 7-13: Slow Learning and Able Pupils*, Windsor: NFER-Nelson

BJARNADÓTTIR Kristin 2014, *History of Teaching Arithmetic*, in: (a cura di A. Karp e G. Schubring) *Handbook of the history of mathematics education*, New York: Springer, pp. 431-457

BONDARENKO Antonina K. 1977, *Бондаренко А.К. Словесные игры в детском саду. Пособие для воспитателя дет. сада* (tr. it. automatica *Giochi di parole all'asilo. Manuale dell'insegnante*) Moskva: Просвещение (Formazione Scolastica)

BARAB Sasha, SQUIRE Kurt 2004, *Design-based research: Putting a stake in the ground*, «Journal of science education and training», 13(1), pp. 1-14

BORSARI Andrea 2020, *El tótem y el oso espadachín. Antropología filosófica de la imitación: Helmuth Plessner y Arnold Gehlen*, Córdoba (Argentina): Universitas

BRAKE Laurel, DEMOOR Marysa (a cura di) 2009, *Dictionary of nineteenth-century journalism in Great Britain and Ireland,* Gent: Academia Press/London: The British Library

BRAMBILLA Simona, HAYEZ Jérôme (a cura di) 2016, *Il tesoro di un povero. Il Memoriale di Francesco Bentaccordi*, Roma: Viella [«Scritture e libri del Medioevo», 16]

BREZZI Francesca 2017, *Il gioco come arte o l'arte in gioco*, «Critical Hermeneutics», 1, pp. 251-263

BRIGHT George W. 1980, *Games moves as they relate to strategy and knowledge*, «Journal of Experimental Education», 48(3), pp. 204-209

BRIGHT George W., HARVEY John G. 1982, *Using Games to Teach Fraction Concepts and Skills* in L. Silvery, J. R. Smart (a cura di) *Mathematics for the Middle Grades (5-9)*, Reston (Virginia): National Council of Teachers of Mathematics, pp. 205-216

BRIGHT George W., HARVEY John G., WHEELER Margariete M. 1979, *Using Games to Retrain Skills with Basic Multiplication Facts*, «Journal for Research in Mathematics Education», 10(2), pp. 103-110

1983a, *Using Games to Teach some Probability Concepts* in: (a cura di D. R. Grey et al) *Proceedings of the first I.C.O.T.S (vol. 1)*, Sheffield: Teaching Statistics Trust, pp. 110-115

1983b, *Teaching Statistics Concepts through Instructional Games* in D. R. Grey et al (a cura di) *Proceedings of the first I.C.O.T.S (vol. 1)*, Sheffield: Teaching Statistics Trust, pp. 158-168

BROADBENT Thomas A.A. 1933, Review: *W.Lietzmann, Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen*, «The Mathematical Gazette», 17(223), pp. 143-144, https://doi.org/10.2307/3605360

BROWN Ann L. 1992, *Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings*, «Journal of the Learning Sciences», 2(2), pp. 141-178, https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_2

BUYTENDIJK Friedrich J. J. 1935, *El juego y su significado* (ed. orig. *Wesen und Sinn des Spiels*, 1933), Madrid: Revista de Occidente

CAILLOIS Roger 1994, *I giochi e gli uomini. La maschera e la vertigine* (ed. orig. *Les Jeux et les hommes: le masque et le vertige* 1958), Milano: Bompiani

CAPITANI Ovidio 1967, *Introduzione* in: Huizinga J., *La mia via alla storia ed altri saggi*, Bari: Laterza, pp. 5-54

CARREL Alexis 1953, *Riflessioni sulla condotta della vita* (ed. orig. *Reflexions sur la conduite de la vie* 1950), Milano: Bompiani

CARVALHO E SILVA Jaime, *Miguel de Guzmán (Cartagena 1939-Madrid 2004)*, in sito: *History of ICMI*, a cura di F. Furinghetti e L. Giacardi, https://www.icmihistory.unito.it/portrait/guzman.php

CASTELNUOVO Emma (a cura di F. Arzarello e M. G. Bartolini Bussi) 2017, *Didattica della matematica* (ed. orig. 1963), Novara: UTET

CHABAUD Gilles 1994, *Sciences en jeux: les «récréations mathématiques et physiques» en France du XVIe au XVIIe* siècle, Tesi di dottorato inedita, Paris: EHESS

1996 *La physique amusante et les jeux expérimentaux en France au XVIIIe siècle*, «Ludica. Annali di storia e di civiltà del gioco» 2, pp. 61-73

1997 *Science, magie, illusion. Les romans de la physique amusante (1784-1789)*, «Revue du roman populaire», 8, pp. 18-38

2014 *Littérature savante et assignation culturelle: le Dictionnaire encyclopédique des amusements des sciences mathématiques et physiques*, «Littératures classiques», 85, pp. 217-232

CHEMLA Karine (a cura di) 2014, *Explorations on the History of Recreational Mathematics*, «Historia Mathematica», 41(4), pp. 367-520

CLAPARÈDE Edouard 1912, *Psicologia del fanciullo e pedagogia sperimentale: storia, problemi, metodi, svolgimento mentale, fatica intellettuale* (ed. orig. *Psychologie de l'enfant et pedagogie experimentale* 1905), Pavia: Mattei, Speroni & c.

CLARKE Doug, ROCHE Anne 2010, *The power of a single game to address to a range of important ideas in fraction learning*, «Australian Primary Mathematics Classroom», 15(3), pp. 18-24

COLLET Claude-Georges, ITARD Jean 1947, *Un mathematician humaniste: Claude-Gaspar Bachet de Meziriac, 1581-1638*, «Revue d'histoire des sciences», 1(1), pp. 26-50

COLLINS Allan, DIANA Joseph, BIELACZYC Katerine 2004, *Design Research: Theoretical and Methodological Issues*, «Journal of the Learning Sciences», 13(1), pp. 15-42, https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2

COLLINS Allan 1992, *Toward a Design Science of Education* in: (a cura di E. Scanlon e T. O'Shea) *New Directions in Educational Technology. NATO ASI Series (Series F: Computer and Systems Sciences)*, 96, Berlin Heidelberg: Springer, pp. 15-22, https://doi.org/10.1007/978-3-642-77750-9_2

CORBETTA Piergiorgio 2014, *Metodologia e tecniche della ricerca sociale*, Bologna: il Mulino

COSTA Maria Corda 1980, Pedagogia, in *Enciclopedia del Novecento*, Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana, *ad vocem*

COSSABOOM Catherine 2020, "The Four Fours Puzzle: To infinity and beyond! in GLEAM (Girls Leading through Mathematics), https://www.gleammath.com/post/the-four-fours (ult. acc. 29/01/2022)

COWLEY Elisabeth B. 1931, Review: *Vera Sanford, A Short History of Mathematics*, «Bulletin of the American Mathematical Society», 37(5), p. 333

COXETER H S M 1952, *Rouse Ball's unpublished notes on three fours*, «Scripta Mathematica», 18, pp. 85-86

CRÉPEL Pierre, PELAY Nicolas 2011, *Récréations mathématiques d'Ozanam*, in *Images des Mathématiques*, CNRS http://images.math.cnrs.fr/Recreations-mathematiques-d-Ozanam.html?id_forum=4006&lang=fr#commentaires (ult. acc. 29/01/2022)

CUSINATO Guido 2010 *Max Scheler: Dall'antropologia filosofica del Geist all'antropologia filosofica della Bildung*, «Giornale di filosofia», 1, pp. 1-29

2010 *Espressività, empatia, intersoggettività. Alcune riflessioni a partire dal Sympatiebuch di Max Scheler*, https://www.phenomenologylab.eu/public/uploads/2010/10/cusinato-sympatiebuch.pdf (ult. acc. 29/01/2022)

D'ALTORIO Stefania 2020, *Geometria e innovazione didattica nel progetto Nuffield per la matematica nella scuola primaria (1964-1976)*, Tesi di laurea inedita, Roma, Università degli studi Roma Tre

D'ANGOUR Armand 2013, *Plato and play. Taking education seriously in ancient Greece*, «American Journal of Play», 5(3), pp. 293-307

D'ENFERT Renaud 2006, *L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Troisième République aux années 1960: enjeux sociaux et culturels d'une scolarisation «de masse»*, «Gazette des mathématiciens», 108, pp. 67-81

DALBY Diane, NOYES Andrew 2015, *Connecting Mathematics Teaching with Vocational Learning*, «Adults Learning Mathematics: An International Journal», 10(1), pp. 40-49

DAUBEN Joseph, SCRIBA Christoph 2002, *Writing the history of mathematics*, Basel: Birkhäuser

DAVIS Benjamin L, MACLAGAN Diane 2003, *The card game set*, «The Mathematical Intelligencer» 25, pp. 33-40

DÉCAILLOT Anne-Marie 1999, *Édouard Lucas (1842-1891): le parcours original d'un scientifique dans la deuxième moitiée du XIX siècle*, tesi di dottorato, Paris: Université de Paris René Descartes (Paris 5)

2003 *Géométrie des tissus. Mosaïques. Échiquiers. Mathématiques curieuses et utiles*, «Revue d'Histoire des Mathématiques», 8(2), pp. 145-206

2014 Les *Récréations Mathématiques d'Édouard Lucas: quelques éclairages*, «Historia Mathematica», 41(4), pp. 506-517

DENNISS John 2009, *Learning arithmetic: textbooks and their users in England 1500-1900*, in: (a cura di E. Robson e J. Stedall) *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, pp. 448-467

2012, *Figuring it out. Children's arithmetical manuscripts 1680-1880*, Oxford: Huxley Scientific Press

DEULOFEU PIQUET Jordi 2003, *Juegos y recreaciones para la enseñanza de las matemáticas: diversidad de opciones y de recursos*, in C. Azcárate, J. Deulofeu (a cura di) *Guías para el profesorado: Matemáticas ESO*, Barcelona: Cisspraxis, pp. 115-125

DIENES Zoltán P. 1960, *Building up mathematics*, London: Hutchinson Educational LTD

1963, *An experimental study of mathematics-learning*, London: Hutchinson

1967, *Costruiamo la matematica* (edizione riveduta e tradotta in italiano di *Building up mathematics* 1960), Firenze: OS

1971, *An example of the passage from the concrete to the manipulation of formal systems*, «Educational Studies in Mathematics», 3, pp. 337-352

1973, *The Six Stages in the Process of Learning Mathematics*, Windsor Berks: NFER Publishing Company Ltd.

1976, *Uno studio sperimentale sull'apprendimento della matematica* (1 ed. 1968, traduzione in italiano di *An experimental study of mathematics-learning* 1963), Milano: Feltrinelli

1978, *Motivi per una didattica moderna della matematica*, supplemento al n.5 di «La vita scolastica», Firenze: Giunti Marzocco

1999, *Memoirs of a Maverick mathematician*, Atlanta/London/Sidney: Minerva Press

2007, *Some thoughts on the dynamics of learning mathematics* in: Sriraman Bharath (a cura di), *Zoltan Paul Dienes and the dynamics of mathematical learning. The Montana Mathematics Enthusiast, Monograph 2*, Missoula: The University of Montana Press, pp. 1-118

DILWORTH Thomas 1810, *The Schoolmaster's Assistant, Being a Compendium of Arithmetic Both Practical and Theoretical* (prima edizione 1743), New York: R. McDermut & E. Duyckinck

DONOGHUE Eileen F. 1998, *In Search of Mathematical Treasures: David Eugene Smith and George Arthur Plimpton*, «Historia Mathematica», 25, pp. 359-365

EGAN Kieran 1983, *Education and philosophy: Plato, Piaget, and scientific psychology*, London: Teachers College Press

ERNEST Paul 1986, *Games. A Rationale for Their Use in the Teaching of Mathematics in School*, «Mathematics in School», 15(1), pp. 2-5

FERRERO Luis 2004, *El juego y la matemática*, Constancia (Madrid): Ed. La Muralla S.A.

FINK Eugen 2008, *L'oasi del gioco* (ed. orig. *Oase des Glücks: Gedanken zu einer Ontologie des Spiels* 1957), Milano: Raffaello Cortina

2018, *Per gioco. Saggio di antropologia filosofica* (ed. orig. *Nietzsches Metaphysik des Spiels* 1946; *Spiel und Feier* 1975; *Das kindliche Spiel* 1958; *Spiel und Philosophie* 1966; *Die Weltbedeutung des Spiels* 1973; *Spiel und Kult* 1972-1973), Brescia: Editrice Morcelliana

FOLKERTS Menso 2003, *"Rithmomachia", a mathematical game from the Middle Ages*, in: (a cura di M. Folkerts) *Essays on early Medieval mathematics. The Latin tradition*, Abingdon: Routledge, pp. 1-23

FOSTER Lizanne 2016, *I ragazzi hanno bisogno di insegnanti coraggiosi*, reperibile online sul sito dell'"Internazionale" https://www.internazionale.it/opinione/lizanne-foster/2016/01/03/scuola-insegnanti

FRANCI Raffaella 1999, *Il ruolo della matematica nella istruzione carolingia e le Propositiones ad acuendos juvenes di Alcuino*, «La matematica nella Società e nella cultura, Bollettino della Unione Matematica Italiana», (8), 3-A, pp. 283-295

2000 *L'insegnamento dell'aritmetica nel Medioevo*, in: (a cura di P. Freguglia, L. Pellegrini e R. Paciocco) *Scienze Matematiche e insegnamento in epoca medioevale. Atti del Convegno internazionale di studi Chieti 2-4 maggio 1996*, Napoli-Roma: Edizioni Scientifiche Italiane, pp. 111-132

2005, *Leonardo Pisano e la trattatistica dell'abaco in Italia nei secoli XIV e XV*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», 23(2), pp. 33-54

FRANCI Raffaella, TOTI RIGATELLI Laura 1989, *La matematica nella tradizione dell'abaco nel XIV e XV secolo*, in: (a cura di C. Macagni e P. Freguglia) *Storia sociale e culturale dell'Italia. Vol. 5 La storia delle scienze*, Busto Arsizio: Bramante Editore, pp. 68-94

DE FREITAS Sara 2018, *Are Games Effective Learning Tools? A Review of Educational Games*, «Educational Technology & Society», 21(2), pp. 74-84

FRIED Michael N. 2018, *History of Mathematics, Mathematics Education, and the Liberal Arts*, in: (a cura di G. Kaiser et al) *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education*, Cham: Springer, pp. 85-101

FRIEDLANDER Alex 1977, *The Steeplechase*, «Mathematics Teaching», 80, pp. 37-39

FRIEDLANDER Alex, TAIZI Naomi 1987, *Early Algebra Games*, «Mathematics in School», 16(1), pp. 2-6

GADAMER Hans-Georg 1960, *Wahrheit und Methode. Grundzüge ainer philosophischen Hermeneutik* (1a ed. it. *Verità e metodo*, Milano: Bompiani 1983)

GARDNER Martin 1998, *A Quarter-Century of Recreational Mathematics*, «Scientific American», pp. 68-75

GARIN Eugenio 1976, *L'educazione in Europa 1400-1600. Problemi e programmi* (1a ed. 1957), Roma-Bari: Laterza

GIACARDI Livia, SCOTH Roberto 2014*, Secondary school mathematics teaching from the early nineteenth century to the mid-twentieth century in Italy*, in: (a cura di A. Karp e G. Schubring) *Handbook on the History of Mathematics Education*, pp. 201-228

GOLOMB Solomon W 1996, *Polyominoes. Puzzles, Patterns, Problems, and Packings (Revised and expanded second edition)*, Princeton: Princeton University Press

GONZALEZ H. B., KUENZI J. J. 2012, *Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) Education: A Primer*, Congressional Research Service Report https://fas.org/sgp/crs/misc/R42642.pdf

GOREV Pavel M. et al 2018, *Puzzles as a Didactic Tool for Development of Mathematical Abilities of Junior Schoolchildren in Basic and Additional Mathematical Education*, «EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education», 14(10), em1602 https://doi.org/10.29333/ejmste/93675 (ult. acc. 20/12/2021)

GRATTAN-GUINNESS Ivor 1994, *Talepiece: The history of mathematics and its own history*, in: (a cura di I. Grattan-Guinness) *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences Vol. 2*, New York: Routledge, pp. 1665-1675

GUZMÁN OZÁMIZ Miguel de 1986, *Juegos matemáticos en la enseñanza*, in *Informes de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemática (Santa Cruz de Tenerife, 10-14 Septiembre 1984)*, Santa Cruz de Tenerife: Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton, pp. 49-86. (ristampa in: 2004 «Números», 59, pp. 5-38)

1991, *Some contemporary tendencies in mathematics education*, in: (a cura di P. Kupari) *Mathematics education research in Finland. Yearbook 1989-90*, Jyväskyla: University of Jyväskylä, pp. 1-8 (Institute for Educational Research Publication series B. Theory into Practice, 66)

1993 *Las matemáticas: hablando con Miguel de Guzmán*, Madrid: Acento (reperibile online http://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/profesion-las-matematicas/, ult. acc. 15/12/2021)

2007, *Enseñanza de las ciencias y la matemática*, «Revista Iberoamericana de Educación», 43, pp. 19-58

HALLINEN Judith 2015, STEM, *Encyclopedia Britannica*, ad vocem

HART Lynn C, OESTERLE Susan, SWARS Auslander Susa, KAJANDER Ann (a cura di) 2016, *The Mathematics Education of Elementary Teachers. Issues and Strategies for Content Courses*, Charlotte: Information Age Publishing

HARVEY Jo, OGILVIE Marilyn B, *Sanford, Vera*, in: (a cura di M. Ogilvie, J. Harvey, M. Rossiter) *The biographical dictionary of women in science: Pioneering lives from Anciente Times to the mid-20th century*, Abingdon/New York: Routledge, ad vocem

HAY Cynthia 1988, *Mathematics from manuscript to print 1300-1600. Proceedings of a joint conference of the British society for the history of mathematics and the Open university on Renaissance mathematics, held at Keble college, Oxford on September 27-30, 198]*, Oxford: Clarendon Press

HEEFFER Albrecht 2006, *Récréations Mathématiques (1624). A Study on its Authorship, Sources and Influence*, «Gibecière», 2, pp. 77-167

HERMELINK Heinrich 1978 *Arabic recreational mathematics as a mirror of age-old cultural relations between Eastern and Western civilizations*, in: (a cura di A.Y. al-Hassan, Gh. Karmi, N. Namnum) *Proceedings of the First International Symposium for the History of Arabic Science, April 5-12, 1976*, Aleppo: Institut for the History of Arabic Science, vol. 2 (Papers in European languages), pp. 44-52

1978, *Arabische Unterhaltungsmathematik als Spiegel jahrtausendealter Kulturbeziehungen zwischen Ost und West*, «Janus», 65, pp. 105-17

HOLT Michael, DIENES Zoltán P. 1973, *Let's Play Maths*, London: Penguin Books

HØYRUP Jens 1990 *Sub-scientific mathematics: Observations on a pre-modern phenomenon*, «History of Science», 27, pp. 63-87

2016, *Mathematics Practical and Recreational*, in *Encyclopaedia of the History of Science, Technology and Medicine in Non-Western Cultures*, New York: Springer

HUIZINGA Johan 2002, *Homo ludens* (ed. orig. *Homo Ludens* 1938), Torino: Einaudi

2008 *Sui limiti del gioco e del serio nella cultura*, «Aut Aut», 337, pp. 95-122 (ed. orig. *Over de grenzen van spel en ernst in de cultuur* 1933)

ILANY Bat-Sheva, TAIZI Naomi, BRUCKHEIMER Maxim 1982, *Variations of a Game as a Strategy for Teaching Skills*, in: (a cura di L. Silvery, J. R. Smart) *Mathematics for the Middle Grades (5-9)*, Reston (Virginia): National Council of Teachers of Mathematics, pp. 220-225

ISRAEL Giorgio 2013, *Quale matematica insegnare?*, in: (a cura di L. Catastini, F. Ghione, E. Rogora) *La formazione degli insegnanti di Matematica. Italia e Europa a confronto*, Pristem/Storia n. 36-37, pp. 147-157

2017, *Luigi Cremona*, in: (a cura di G. Israel) *Correspondence of Luigi Cremona (1830-1903), conserved in the Department of Mathematics, "Sapienza" Università di Roma*, Thurnout: Brepols, pp. 33-58

ISRAEL Giorgio, MILLÁN GASCA Ana 2008, *Il mondo come gioco matematico. La vita e le idee di John von Neumann*, Torino: Bollati Boringhieri [Traduzione inglese rivista e aumentata *The world as a mathematical game. John von Neumann in 20th century science*, Basel: Birkhäuser, 2009]

ISRAEL Giorgio, MILLÁN GASCA Ana, REGOLIOSI Luigi 2018, *Democratization of mathematics through Cremona's correspondence with foreign colleagues (1860-1901)*, in: (a cura di M.T. Borgato, E. Neuenschwander e I. Passeron) *Mathematical Correspondences and Critical Editions*, "Trends in the History of Science", Basel: Birkhäuser, pp. 247-269

JACKSON Rosa L. 1930, Review: *"The History and Significance of Certain Standard Problems in Algebra" by Vera Sanford*, «The American Mathematical Monthly», 37(8), pp. 445-446

JAEGER Werner 1944, *Die Formung des griechischen Menschen*, Berlin-Leipzig: Walter de Gruyter; trad. it. 2003, *Paideia. La formazione dell'uomo greco*, Milano: Bompiani

JEAY Madeleine 2002, *The Philosophers' Game: Rithmomachia in Medieval and Renaissance Europe, with an Edition of Ralph Lever and William Fulke, The Most Noble, Auncient, and Learned Playe (1563)*, «Renaissance and Reformation Renaissance Et Reforme», n.s., 26(1), pp. 68-71

KARP Alexander 2012, *Soviet mathematics education between 1918 and 1931: a time of radical reforms*, «ZDM-Mathematics Education», 44, pp. 551-561

KIRKBY Dave 1992, *Games in the teaching of mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press

KLEIN James D., FREITAG Eric 1991, *Effects of Using an Instructional Game on Motivation and Performance*, «The Journal of Educational Research», 84(5), pp. 303-308

KNOBLOCH Eberhard 1973, *Zur Überlieferungsgeschichte des Bachetschen Gewichtsproblems*, «Sudhoffs Archiv. Zeitschrift fuer Wissenschaftsgeschichte», 57(2), pp. 142-151

KORDEMSKY Boris A. 1958, *Очерки о математических задачах на смекалку* (tr. it. "Saggi sui problemi matematici per l'ingegno. Guida per l'insegnante", automatica dal sito *https://sheba.spb.ru/shkola/matemat-ocherki-1958.htm*), Moskva: Uchpedgiz

KRAUS William H 1980, *An exploratory study of the use of problem solving heuristics in the playing of games involving mathematics*, Tesi di dottorato inedita, Madison: Università del Wisconsin (referred to in Wheeler 1983)

1982, *The Use of Problem-Solving Heuristics in the Playing of Games Involving Mathematics*, «Journal for Research in Mathematics Education», 13(3), pp. 172-182

LAFFORGUE Laurent 2010, *L'importance du calcul et de la geometrie à lécole primaire*, Journées "Trans-Maître" des 23 et 24 octobre 2010: "Instruire aujourd'hui à l'école primaire", reperibile online https://www.laurentlafforgue.org/textes/ImportanceCalculGeometrie.pdf (ult. acc. 29/01/2022)

LAMBERT Anselm 2018, *Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen*, «MUED [Mathematik-Unterrichts-Einheiten-Date] Rundbrief», 206, "Mathematik hat viele Gesichter … angewandt, 'abgewandt' – und zugewandt!", pp. 30-35, reperibile online https://www.die-mueden.de/rundbrief/rb206.pdf (ult. acc. 29/01/2022)

LANDGRAF Edgar, SCHREIBER Elliott 2020, *Play in the age of Goethe: Theories, narratives, and practices of play around 1800*, Ithaca, NY: Bucknell University Press

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm, 1710 *Annotatio de quibusdam Ludis; Inprimis de Ludo quodam Sinico, differentiaque trunculorum, & novo genere Ludi Navalis*, in *Miscellanea Beroliniensia ad incrementum scientiarum*, Berolini: sumptibus J. Chr. Papenii, pp. 21-26. (tr. ing. di Richard K. Pulskamp, *A note on certain games, especially a certain Chinese game, and on the difference between chess and Iatrunculus and on a new kind of naval game*, Cincinnati, OH: Department of Mathematics & Computer Science, Xavier University

1768 (a cura di Louis Dutens), *Gothofredi Guillelmi Leibnitii, Opera omnia, nunc primum collecta, in Classes distributa, præfationibus & indicibus exornata, studio Ludovici Dutens* (6 voll) (rist. 1989, Hildesheim: Georg Olms), Ginevra: Fratres De Tournes

LIETZMANN Walther, TRIER Peter Viggo 1913, *Wo steckt der Fehler?: Trugschlüsse und Schülerfehler*, Leipzig/Berlin: B.G. Teubner

LIVERANI Marco 2005, *Qual è il problema? Metodi, strategie risolutive, algoritmi*, Milano: Mimesis

2008, *Graficamente - Dossier su alcuni aspetti della teoria dei grafi e degli algoritmi (La ricerca della via più breve, A spasso per la città di Königsberg, Quattro bastano!*), «X la Tangente», 7/8, il testo è reperibile qui: http://www.mat.uniroma3.it/users/liverani/doc/DossierGrafi.pdf

2019, "Breve introduzione al linguaggio Python", dispensa pdf reperibile online http://www.mat.uniroma3.it/users/liverani/doc/pythonIntro.pdf

LOCKHART Paul 2010, *Contro l'ora di matematica* (ed. orig. *A Mathematician's Lament* 2009), Milano: Rizzoli

LOMBARDO RADICE Lucio 1979, *Il giocattolo più grande. Tante proposte aguzzaingegno*, Firenze: Giunti Marzocco

MACCAGNI Carlo 1996, *Cultura e sapere dei tecnici nel Rinascimento*, in: (a cura di M. Dalai Emiliani e V. Curzi), *Piero della Francesca tra arte e scienza*, Atti del Convegno internazionale di studi (Arezzo, 8-11 ottobre 1992, Sansepolcro, 12 ottobre 1992) Venezia: Marsilio, pp. 279-292

MAGRONE Paola MILLÁN GASCA Ana 2018, *I bambini e il pensiero scientifico. Il lavoro di Mary Everest Boole*, Roma: Carocci

MAHONEY Michael S., SCHNEIDER Ivo 1986, *Eloge: Kurt Vögel, 30 September 1888-27 October 1985*, «Isis» 77(4), pp. 667-69

MARUSHINA Albina 2012, *From the history of recreational mathematics: Boris Kordemsky and Leonid Kantorovich*, «Newsletter of the International Group for Mathematical Creativity and Giftedness», 2, pp. 5-9

MCCORMACK Thomas J. 1910, *Why we study mathematics: A philosophical and historical retrospect. Addresss delivered befor the Secondary mathematics section of the National Educcation Association, Boston, July 8, 1910*, Cedar Rapids, Iowa: the Torch Press

MCMAHON Liz, GORDON Gary, GORDON Hannah, GORDON Rebecca 2017, *The Joy of Set. The Many Mathematical Dimensions of a Seemingly Simple Card Game*, Princeton: Princeton University Press

MC MURRAY Frank Morton, SMITH David Eugene 1903, *Mathematics in elementary school*, «Teachers College Record. A journal devoted to the practical problems of elementary and secondary educaton and the professional training of teachers», 4(2), pp. 1-70

MENGHINI Marta 1999, *Gambioli, Dionisio*, in *Dizionario Biografico degli Italiani*, vol. 52, Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana, *ad vocem*

MILLÁN GASCA Ana 1988, *El matemático Julio Rey Pastor*, Logroño: Colegio Universitario de La Rioja/Instituto de Estudios Riojanos

2003a, *Organization and mathematics: a look into the prehistory of industrial engineering*, in: (a cura di M. Lucertini, A. Millán Gasca, F. Nicolò) *Technological concepts and mathematical models in the evolution of modern engineering systems: Controlling, Managing, Organizing*, Basel: Birkhäuser Verlag, pp. 21-50

2003b, *Early approaches to the management of complexity in engineering systems*, in: (a cura di V. Benci et al.) *Determinism, Holism, and Complexity*, New York/Boston/Dordrecht/London/Moscow: Kluwer Academic/Plenum Publishers, pp. 349-357

2009, *Matematica e organizzazione: un capitolo della storia della matematica applicata,* «La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana», 1(2), pp. 127-156

2016, *Numeri e forme. Il bambino e la matematica*, Bologna: Zanichelli

MONTUCLA Jean-Etienne 1798-1802, *Histoire des mathématiques… (4 voll)*, [1a ediz. 1758, edizione ampliata: voll. 1-2 pubblicati nel 1798, voll. 3-4 nel 1802 a cura di Jérôme de La Lande, poiché Montucla muore nel 1799], Paris: chez Henry Agasse

MORRIS Helen 1997, *Resources for Games and Puzzles in the Maths Classroom*, «Mathematics of School», 26(4), pp. 44-45

MOYER Ann E. 2001, *The philosopher's game. Rithmomachia in Medieval and Renaissance Europe*, Ann Arbor: University of Michigan Press

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (a cura di) 2001, *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics,* Washington, DC: The National Academies Press

NIKONOV, Vladimir, EFIMOV Georgy 2009? *Kordemsky BA Libri on line* (in russo), in *Biblioteca elettronica "Il cubo"* (in russo), https://www.koob.ru/kordemskiy_b/(ult. acc. 13/12/2021)

NURZIA Laura (a cura di) 1999, *La corrispondenza tra Luigi Cremona e Thomas Archer Hirst (1864–1892)* in: (direzione di G. Israel, volume a cura di L. Nurzia) *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903), vol. 4*, pp. 1-224

NUTI Andrea 1998, *Ludus e iocus. Percorsi di ludicità nella lingua latina*, Roma/Treviso: Viella/Fondazione Benetton Studi Ricerche (Ludica: collana di storia del gioco, 4)

O'CONNOR John J, ROBERTSON Edmund F 1996, *Mathematical games and recreations*, in *MacTutor History of Mathematics Archive*, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Mathematical_games.html (ult. acc. 13/12/2021)

OLDFIELD Bernard J 1991a, *Games in the Learning of Mathematics 1: A Classification*, «Mathematics in School», 20(1), pp. 41-43

1991b, *Games in the Learning of Mathematics Part 2: Games to Stimulate Mathematical Discussion*, «Mathematics in School», 20(2), pp. 7-9

1991c, *Games in the Learning of Mathematics Part 3: Games for Developing Strategies* «Mathematics in School», 20(3), pp. 16-18

1991d, *Games in the Learning of Mathematics Part 4: Games for Developing Concepts*, «Mathematics in School», 20(5), pp. 36-39

1992, *Games in the Learning of Mathematics Part 5: Games for Reinforcement of Skill*, «Mathematics in School», 21(1), pp. 7-13

PALUMBO Marguerita 2008, *"Les livres en Hollande sont en perpetuelle circulation...": Intorno a un libro appartenuto a Finé e Leibniz*, «Bruniana & Campanelliana», 14(1), pp. 45-58

PALMARINI Luca, SOSNOWSKI Roman 2019, *Ma l'uovo era veramente di Colombo? L'attestazione dell'aneddoto nel manoscritto di Piero da Filicaia dell'inizio del Cinquecento*, «Cuadernos de Filología Italiana», 26, pp. 167-180

PAPP Katalin 1999, *Hungarian schools: past, present, and future*, «Fizikai Szemle», 49(5), pp. 220-224

PARKER Jean 1955, *The use of puzzles in teaching mathematics*, «The Mathematics Teacher», 48(4), pp. 218-227

PASCAL Blaise (1623-1666), *La liasse Divertissement*, in *Les pensées de Blaise Pascal*, edizione elettronica dei frammenti manoscritti ed editi a cura di Dominique Descotes e Gilles Proust, http://www.penseesdepascal.fr/Divertissement/Divertissement.php (ult. acc. 24/01/2022)

PASQUALI Chiara 2020 *Augustus De Morgan (1806-1871) nella storia dell'istruzione matematica elementare*, tesi di laurea inedita, Roma: Università Roma Tre

PELAY Nicolas 2011, *Jeu et apprentissages mathematiques: élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*, Tesi di dottorato inedita, Lyon: Université Claude Bernard-Lyon 1

PIEPER Josef 2009, *Leisure. The basis of culture*, San Francisco: Ignatius Press (ed.or. 1952)

PLECHL Helmut 1953, *Albert von Stade*, in *Neue Deutsche Bibliographie*, https://www.deutsche-biographie.de/sfz278.html (ult. acc. 24/01/2022)

POLYA George 1970-71, *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere problemi*, (ed. orig. *Mathematical discovery* 1962-1967), Milano: Feltrinelli, 2 vols.

2016, *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico* (ed. orig. *How to solve it* 1945), Novara: UTET

PORTER Rutherford B. 1938, *Effects of recreations in teaching of mathematics*, «School Review», 46, pp. 423-427

PRICE Michael 1994, *Mathematics for the multitude? A History of the Mathematical Association*, Leicester: The [Mathematical] Association

QUADRIO ARISTARCHI Assunto 1996, Motivazione, in *Enciclopedia delle scienze sociali Treccani online*, ad vocem

REMMERT V. R., SCHNEIDER M.R., SØRENSEN H.K. (a cura di) 2016, *Historiography of Mathematics in the 19th and 20th Centuries*, Cham: Springer International Publishing (Imprint: Birkhäuser)

ROGGERO Marina 1994, *Conti sulle dita, calcoli a penna. L'aritmetica elementare a fine Settecento*, «Studi Storici», 35(4), pp. 1039-1060

ROMEO Alice 2021 Il «fenomeno Singapore» nella didattica della matematica. Analisi dei libri *Challenging word problems* per la scuola primaria", Tesi di laurea inedita, Roma: Università Roma Tre

RUTHERFORD F. James, ALHGREN Andrew 1990, *Project 2061: Science for all Americans*, New York: Oxford University Press

SALEN Katie, ZIMMERMAN Eric 2004, *Rules of Play: Game Design Fundamentals*, London: The MIT Press Cambridge

SANFORD Vera 1927, *The history and significance of certain standard problems in Algebra*, New York: Teachers College, Columbia University

SAWYER W. W. 1964, *Vision in Elementary Mathematics*, London: Penguin Books

SCHAAF William 1955-63 *Number game*, in *Encyclopedia Britannica*, ad vocem (versione elettronica corrente rivista https://www.britannica.com/topic/number-game (ult. acc. 31/01/2022)

1970-1978, *A Bibliography of Recreational Mathematics*, Washington D.C.: National Council of Teachers of Mathematics

SCHELER Max F. 1973, *Vom fremden Ich: Versuch einer Eidologie, Erkenntnistheorie und Metaphysik der Erfahrung und Realsetzung des fremden Ich und der Lebewesen*, in *Wesen und Formen der Sympathie - Die deutsche Philosophie der Gegenwart*, Bern: Francke, pp. 209-258 (vol. 7 delle Opere complete)

2009 (a cura di Giuliana Mancuso) *Formare l'uomo. Scritti sulla natura del sapere, la formazione, l'antropologia filosofica*, Milano: Franco Angeli

SCHILLER Friedrich 1971, *Lettere sull'educazione estetica dell'uomo*, (trad. it. di A. Negri, ed. orig. 1795) Roma: Armando Editore

SÉGUIN Édouard (edizione italiana a cura di G. Bollea) 2002, *L'idiota. Volume 2 L'educazione degli idioti, metodo e pratica* (ed. orig. *Traitement moral des idiots e des autres enfants arriérés* 1846), Roma: Armando Editore

SHORTZ Will, GRABARCHUK Serhiy 2004, *Famous Puzzlemakers: Boris Kordemsky*, «The World Puzzle Newsletter», 9, pp. 24-25; ultimo aggiornamento online 2008 *Boris Kordemsky*, in *Age of puzzles. A colorful journey through endless patterns of quick wits*, http://www.ageofpuzzles.com/Masters/BorisKordemsky/BorisKordemsky.htm) (ult. acc. 15/12/2021)

SIMONS Lao Genevra 1945, *David Eugene Smith. In memoriam*, «Bulletin of the American Mathematical Society», 51(1), pp. 40-50

SINGMASTER David 1994, *Recreational Mathematics* in: (a cura di I. Grattan-Guiness) *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences Vol. 2*, New York: Routledge, pp. 1568-1575

2005, *1892 Walter William Rouse Ball, Mathematical recreations and problems of past and present times in*: (a cura di I. Grattan Guinness) *Landmark writings in Western mathematics 1640-1940*, Amsterdam: Elsevier, pp. 653-663

2013 *Sources in recreational mathematics – An annotated bibliography*, ora disponibile nel sito Puzzle Museum, di James Dalgety, https://www.puzzlemuseum.com/singma/singma-index.htm (ult. acc. 15/12/2021)

2016, *The Utility of Recreational Mathematics*, «The UMAP Journal», 37(4), pp. 339-380

SJØBERG Svein 2019, *The PISA-syndrome - How the OECD has hijacked the way we perceive pupils, schools and education*, in: *Confero: Essays on Education, Philosophy and Politics*, 7, pp. 12-65

SMITH David Eugene 1900, *The teaching of elementary mathematics*, New York: The MacMillan Company

1925, *History of mathematics*, Boston: Ginn and Company (edizione rivista da May Luse Smith E. 1953)

1931, Review: *Geschichte der Elementar-Mathematik. Erster Band, Rechnen by Johannes Tropfke*, «The American Mathematical Monthly», pp. 331-334

SOSNOWSKI Roman 2014, *Tra Firenze e Borgo San Sepolcro. Una ricognizione sulla lingua del testo inedito di Giuochi mathematici di Piero da Filicaia*, in: (a cura di E. Jamrozik e R. Sosnowski) *Percorsi linguistici tra Italia e Polonia. Studi di linguistica italiana offerti a Stanisław Widłak* Firenze: Franco Cesati, pp. 55-63

SRIRAMAN Bharath, LESH Richard 2007, *A Conversation with Zoltan P. Dienes*, «Mathematical Thinking and Learning», 9(1), pp. 59-75

STEDALL Jacqueline 2012, *The history of mathematics: A very short introduction*, Oxford: Oxford University Press

STEPANOV S.I. 1952, *Квопросу о психологической природе математического развития школьников* (tr. it. "Sullo questione della natura psicologica dello sviluppo matematico degli studenti") Tesi, Moskva: Accademia di Scienze Pedagogiche della RSFSR, abstract online https://www.mathedu.ru/text/stepanov_a_v_1952/p0/ (ult. acc. 29/01/2022)

STRÄßER RUDOLF 2014, *History of Teaching Vocational Mathematics*, in: (a cura di A. Karp e G. Schubring) *Handbook on the History of Mathematics Education*, pp. 515-524

SUMPTER Lovisa 2015, *Recreational Mathematics – Only For Fun?*, «Journal of Humanistic Mathematics», 5(1), pp. 121-138

SWAN Malcolm (a cura di) 1984, *Problems with Patterns and Numbers*, prodotto da Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, Manchester: Joint Matriculation Board, reperibile online: https://www.mathshell.com/materials.php?item=ppn&series=tss (ult. acc. 29/01/2022)

SZÉNASSY B 1992, *History of Mathematics in Hungary until the 20th century*, New York: Springer Verlag (trad. aumentata di *A Magyarországi Matematica Története*, Budapest: Akadémiai Kiadó, 1970)

THIELE Rüdiger 1994, *Mathematical Games* in *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences Vol. 2* (a cura di Ivor Grattan-Guiness), New York: Routledge

TOBIAS Sheila 2007, *Come vincere la paura della matematica* (ed. orig. *Overcoming Math Anxiety* 1978), Milano: TEA

TRIGG Charles W 1978, *What is Recreational Mathematics?*, «Mathematics Magazine», 51(1), pp. 18-21

ULIVI Elisabetta 1986, *Sulla Rithmomachia, gioco da scacchiera del Medioevo e del Rinascimento*, «Mathematics Magazine», 51(1), pp. 18-21

2013, *Su Piero di Niccolò di Antonio da Filicaia, autore del Libro di giuochi mathematici*, «Bollettino di storia delle scienze matematiche», XXXIII(2), pp. 235-274

2015, *Masters, questions and challenges in the abacus schools*, «Archive for the History of Exacts Sciences», 69, pp. 651-670

TROPFKE Johannes 1902, *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berucksichtigung der Fachworter, Erster Band, Rechnen und Algebra*, Leipzig: Verlag von Veit & Comp.

VAN DYCK Maarten, VERMEIR Koen 2014, *Varieties of wonder: John Wilkins' mathematical magic and the perpeuity of invention*, «Historia mathematica», 41, pp. 463-489

VAN MANEN Max 1979, *The Phenomenology of Pedagogic Observation*, «Canadian Journal of Education / Revue canadienne de l'éducation», 4(1), pp. 5-16

1989, *By the light of anecdote*, «Phenomenology + Pedagogy», 7, pp. 232-253

1990, *Researching Living Experience*, Albany: State University of New York Press

1991, *The tact of teaching: The meaning of pedagogical thoughtfulness*, Albany: State University of New York Press

2006, *Writing qualitatively, or the demands of writing*, «Qualitative health research», 16(5), pp. 713-722 https://doi.org/10.1177/1049732306286911

VERTES Bob 1988, *Maths Games Workshop. Part Eight. From Little Acorns… Or How to Get Vertigo*, «Mathematics in School», 17(1), pp. 8-9

VÖGEL Kurt, REICH Karin, GERICKE Helmuth (a cura di) 1979, *Johannes Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik 4.Auflage, Band 1: Arithmetik und Algebra*, Berlin: de Gruyter (ed. orig. Tropfke 1902) https://doi.org/10.1515/9783110833478

WARDAUGH Benjamin 2012, *A wealth of numbers. An anthology of 500 years of popular mathematics writing*, Princeton: Princeton University Press

WATE MIZUNO Mitsuko 2010 *The works of König Dénes (1884-1944) in the domain of mathematical recreations and his treatment of recreational problems in his works of graph theory*, tesi di dottorato, Paris, Université Paris Diderot (Paris 7)

2014 *Mathematical recreations of Dénes König and his work on graph theory*, «Historia Mathematica», 41(4), pp. 377-399

WATTERS J. J., CHRISTENSEN C. 2014, *Vocational education in science, technology, engineering and maths (STEM): Curriculum innovation through school industry partnerships*, in: (a cura di C. P. Constantinou, N. Papadouris e A. Hadjigeorgiou) *E-Book Proceedings of the ESERA 2013 Conference: Science Education Research For Evidence-based Teaching and Coherence in Learning*, Nicosia, Cyprus: European Science Education Research Association, Strand 10, pp. 89-110

WELLS David 2012, *Games and mathematics. Subtle connections*, New York: Cambridge University Press

WHEELER Margariete M. 1983, *Studies in a Continuing Investigation of the Cognitive Effects of Mathematics Instructional Games* in: (a cura di M. Zweng et al) *Proceedings for the Fourth I.C.M.E.*, Boston: Birkhäuser, pp. 652-654

WILLIAMS Hugh C 1998 *Edouard Lucas and primality testing*, New York: Wiley

YELDHAM Florence A. 1936, *The teaching of arithmetic through 400 years 1535-1935*, London/Bombay/Sidney: George G. Harrap & co

ZETTERBERG J. Peter 1980, *The mistaking of "the Mathematicks" for Magic in Tudor and Stuart England*, «Sixteenth Century», 11(1), pp. 83-97

ZHAO Yong 2016, *Who's Afraid of PISA: The Fallacy of International Assessments of System Performance*, in: (a cura di A. Harris e M. S. Jones) *Leading Futures*, Thousand Oaks, CA: Sage, pp. 7-21

2020, *Two decades of havoc: A synthesis of criticism against PISA*, «Journal of Educational Change», 21, pp. 245-266

B3 Sitografia

BASE CINQUE - APPUNTI DI MATEMATICA RICREATIVA (a cura di Gianfranco Bo), http://utenti.quipo.it/base5/scuola/labormed1.htm (ult. acc. 31/01/2022)

COMITÉ INTERNATIONAL DES JEUX MATHÉMATIQUES, https://www.cijm.org (ult. acc. 31/01/2022)

CON-CORSO MATEMATICA PER TUTTI, http://www.matematicapertutti.it (ult. acc. 31/01/2022)

THE CRAFTY PUZZLES COMPANY, http://www.craftypuzzles.com (ult. acc. 31/01/2022)

CREATIVAMENTE, http://www.creativamente.eu (ult. acc. 31/01/2022)

ENIGMATHS (a cura di Paulo Ferro, docente portoghese di scuola secondaria), https://sites.google.com/view/enigmaths (ult. acc. 31/01/2022)

THE GEOMETRY JUNKYARD (a cura di David Eppstein, Professore all'Università di Irvine in California), https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/ (ult. acc. 31/01/2022)

LIVIO ZUCCA (archivio del suo lavoro), https://www.iread.it/index.php (ult. acc. 31/01/2022)

MATHIGON, https://mathigon.org/ (ult. acc. 31/01/2022)

MATH PUZZLE – THE PUZZLING WEBLOG OF RECREATIONAL MATHEMATICS (ult. agg. giugno 2020), http://www.mathpuzzle.com (ult. acc. 31/01/2022)

MR. P.'S MATH PAGE (David Pleacher, professore americano di matematica per 40 anni nelle scuole di Virginia e New York, sito online dal 1998), https://www.pleacher.com/mp/mpframe.html (ult. acc. 31/01/2022)

THE PARALLEL MATHS PROJECT (a cura di Simon Singh con sfide per studenti dagli 11 ai 15 anni), https://parallel.org.uk/?fbclid=IwAR0ccUXyE4olQcei6XWsC4uxQTm4wq0gcMiVeHADJHXOo3ypTqdpH3YyQ (ult. acc. 31/01/2022)

PLAISIR MATHS (presidente Nicolas Pelay), https://www.plaisir-maths.fr/ (ult. acc. 31/01/2022)

PUZZLE FUN (a cura di Rodolfo Kurchan), https://www.puzzlefun.online/ (ult. acc. 31/01/2022)

RALLY MATEMATICO TRANSALPINO

archivio delle prove, http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_ral2.php?langue=it&w=0 (ult. acc. 31/01/2022)

ricerca per concetto, titolo, sunto..., http://www.projet-ermitage.org/ARMT/bp-it2.html (ult. acc. 31/01/2022)

RECREATIONAL MATHEMATICS MAGAZINE (a cura dell'associazione Ludus con il supporto del CIUHCT - Centro Interuniversitario della Storia della Scienza e della Tecnologia di Lisbona), http://rmm.ludus-opuscula.org (ult. acc. 31/01/2022)

RÉCRÉOMATH (a cura di Charles-É. Jean), http://www.recreomath.qc.ca/ (ult. acc. 31/01/2022)

SET GAME

The Daily SET Puzzle https://www.setgame.com/set/puzzle (ult. acc. 31/01/2022)

Set, Set-Scrabble, Set-Classic https://smart-games.org/en/set/ (ult. acc. 31/01/2022)

SOLVEME PUZZLES, https://solveme.edc.org/ (ult. acc. 31/01/2022)

SU FRANCIS, https://www.francissu.com/flourishing-discussion (ult. acc. 31/01/2022)

TOKALON ASSOCIAZIONE, www.associazionetokalon.com (ult. acc. 31/01/2022)

VISUAL MATH LEARNING (a cura di Wayne Allen Bateman), http://www.visualmathlearning.com/index.html (ult. acc. 31/01/2022)

YOUCUBED (da un'idea di Jo Boaler, Stanford University), https://www.youcubed.org (ult. acc. 31/01/2022)

B4 Videografia

ALLEN Laymen 2012 (novembre 24), *Learn to play EQUATIONS: The Game of Creative Mathematics* (84') https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=ihnmavs9xJ4 (ult. acc. 31/01/2022)

DÍAZ Ildefonso s.d., *Registros audiovisuales de Miguel de Guzmán* (43'), Cátedra Miguel de Guzmán https://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/videos/ (ult. acc. 31/01/2022)

TOKALON Associazione 2020 (novembre 11), *EQUAL DAY: UN NOME, UN PERCHÉ* (100'), https://youtu.be/Sg3I880zLGc (ult. acc. 31/01/2022)

TOKALON Associazione 2021 (marzo 17), *UNA SFIDA TRA LE SFIDE - SECONDARIA DI PRIMO GRADO* (72'), https://youtu.be/4OEeTc3I_z8 (ult. acc. 31/01/2022)

TOKALON Associazione 2021 (marzo 19), *UNA SFIDA TRA LE SFIDE – PRIMARIA* (65'), https://youtu.be/US9s0TMUZH4 (ult. acc. 31/01/2022)

TOKALON Associazione 2021 (aprile 27), *CALCOLO, RAGIONAMENTO E CALCOLATRICE* (151'), https://youtu.be/-ZHvuHvdO3c (ult. acc. 31/01/2022)

TOKALON Associazione 2021 (aprile 28), *ROLLING CUBES PYTAGORA* (24'), https://www.youtube.com/watch?v=oqutI2Vbz_0&t=6s (ult. acc. 31/01/2022)

TOKALON Associazione 2021 (giugno 4), *FINALISSIMA - cat. E4-E5* (67’), https://youtu.be/FJmVVn9Pzu0 (ult. acc. 31/01/2022)

TOKALON Associazione 2021 (giugno 4), *FINALISSIMA - cat. E2-E3* (41’), https://youtu.be/Arqo4n5zsd8 (ult. acc. 31/01/2022)

TOKALON Associazione 2021 (giugno 4), *FINALISSIMA - cat. MEDIE* (57’), https://youtu.be/opzOj_fN088 (ult. acc. 31/01/2022)

TOKALON Associazione 2021 (ottobre 11), *MATEMATICA PER TUTTI - IV EDIZIONE* (140’), https://youtu.be/2q_oG0IbR6o (ult. acc. 31/01/2022)

TOKALON Associazione 2021 (novembre 11), *EQUAL DAY* (127’), https://youtu.be/y4yTxM_P90o (ult. acc. 31/01/2022)

TOKALON Associazione 2021 (novembre 28), *GIOCARE CON LA MATEMATICA A SCUOLA* (210’), https://youtu.be/4uuLP2PqTZ8 (ult. acc. 31/01/2022)

B5 Relazioni a convegni e seminari

BIASCO Luca, MILLÁN GASCA Ana e REGOLIOSI Luigi 2021, “La matematica ricreativa dalla storia alla scuola di oggi”, *XX Congresso della Società Italiana di Storia delle Matematiche*, Ferrara 11 novembre 2021

KARP Alexander 2021a, Seminario “Meanings and rhythms behind the comical hieroglyphics: Some thoughts on mathematical problem solving”, Roma, Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre, 13 ottobre 2021

2021b Seminario “International influences in education: myths and reality. Case of mathematics in Russia”, Roma, Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre, 20 ottobre 2021

MILLÁN GASCA Ana 2018, “La matematica attraverso il gioco: introduzione”, Roma, Dipartimento di Scienze della Formazione, Università Roma Tre, 1 dicembre 2018

SU Francis 2021, “Mathematics for human flourishing”, *Jornadas de difusión y formación ‘La fuerza transformadora de las matemáticas en los niños. Encuentro, comunicación, cambio de mirada*, Universidad de Zaragoza/Sesdown, Zaragoza, 6 novembre 2021

Appendice A – *FOUR FOURS PROBLEM*

A.1 La voce 7.I di David Singmaster [2004]

A.2 I programmi con Python

A.2.a – Bersaglio.py

A.2.b – Rolling.py

A.3 Un percorso-avventura con *Rolling CUBES Pytagora*

Appendice B – DIENES

B.1 A detailed examination of the mathematical abstraction process [Dienes 2007, pp. 18-30]

Appendice C – MATHEMATICS FOR HUMAN FLOURISHING

C.1 Desirees & virtues [Su 2020, pp. 229-231]

Appendice D – ANFoMAM: L'Officina di Geometria

D.1 **Le tre sessioni intorno a *Polyminix***

D.2 **La sessione intorno a *La Boca***

Appendice E – I materiali del Con-corso

E.1 La schermata di «Una sfida al giorno»

E.2 I problemi per il corso «Istituzioni di matematica»

E.2.a Il problema del PolyMaxxi

E.2.b Il problema del lancio infinito di Rolling

E.3 Le sfide

E.3.a Le sfide di Rolling CUBES Pytagora

E.3.b Le sfide di Polyminix

E.3.c Le sfide di SET

E.4 Il calcolo mentale

E.5 Foto dei giochi dalle classi

E.6 Prove di selezione locale

E.6.a Prima Edizione M1-M2

E.6.b Prima Edizione M3-S1

E.6.c Seconda Edizione M1-M2

E.6.d Seconda Edizione M3-S1

E.6.e Terza Edizione M1-M2

E.6.f Terza Edizione M3-S1

Appendice F – Le regole dei giochi di CreativaMente

F.1.a *Rolling CUBES Pytagora*

F.1.b *Pytagora SMARTY Puzzle*

F.1.c *Polyminix*

F.1.d *La Boca*

F.1.e *SET*

F.1.f *FUNB3RS*

Appendice G – I DATI DELL'ANALISI QUALITATIVA

G.1 Il questionario

G.2 Le interviste da vicino